Math. 9.
490 t

Salomon (Jos.)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Versuch

eines

gemeinfaßlichen Unterrichtes

in der

Arithmetik.

Ein Handbuch

für

Alle, welche im praktischen Leben Gebrauch von der Mathematik machen wollen,

bearbeitet

von

Joseph Salomon,

Professor der Elementar-Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Wien,

gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1825.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.
Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Sr. Wohlgeboren

dem

Herrn

Thomas Joseph Powondra,

k. k. wirklichem n. ö. Regierungsrathe,

Doctor der Philosophie, Director der philosophischen Studien und Präses der philosophischen Facultät, ꝛc.

gewidmet

aus Hochachtung und wahrer Verehrung

vom

Verfasser.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Der Zweck des vorliegenden Werkes ist, den ersten Anfänger in den Stand zu setzen, die Elemente der Arithmetik im weitern Sinne des Wortes unter Anleitung eines geschickten Lehrers oder durch Selbststudium mit jener Gründlichkeit und Vollständigkeit sich eigen zu machen, welche beym mathematischen Studium überhaupt unerläßlich ist.

In diesem Werke, welches die Elementar-Arithmetik ihrem ganzen Umfange nach enthalten und zugleich Anleitung geben soll, die erlernten allgemeinen Sätze aufs praktische Leben anzuwenden, findet man daher nicht nur die ganze Theorie streng entwickelt, sondern auch durch die erforderliche Anzahl von Beyspielen erläutert. — Da der Anfänger, so wie jeder Lernende, nur das gut weiß und als wahres Eigenthum betrachten kann, was er von und durch sich selbst weiß, so habe ich nicht unterlassen, die Selbstthätigkeit des Lernenden häufig in Anspruch zu nehmen, und ihm so das Vergnügen des Selbstfindens zu überlassen.

Wenn ich demohngeachtet diesem Buche den Titel »gemeinfaßlicher Unterricht« gebe, so will ich dadurch nicht jene unnütze und höchst nachtheilige Weitläufigkeit in der Behandlung des Gegenstandes andeuten, bey welcher der Anfänger die Materien gleichsam mechanisch, ohne eigene Kraftanstrengung, erlernen kann, wodurch er wohl sein Gedächtniß, aber keineswegs seinen Verstand bereichert, sondern ich appellire durch jene Überschrift nur an den gesunden Menschenverstand, welcher beym Erlernen einer jeden Wissenschaft, und beym Studium der Mathematik ins Besondere die Conditio sine qua non ist. — Ich habe bey vielen

Digitized by Google

Gelegenheiten die allgemeinen Ausdrücke in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, um den ersten Anfänger stufenweise an die algebraische Zeichensprache zu gewöhnen, und ihn so in den Stand zu setzen, bey vorkommenden Fällen die allgemeinen Beziehungen der Größen symbolisch darzustellen, und umgekehrt, allgemeine Formeln gehörig zu interpretiren und mit Sicherheit anzuwenden.

Derjenige, welcher sich nach dem vorliegenden Leitfaden selbst unterrichten will, kann, ohne den Zusammenhang des Ganzen zu unterbrechen, bey der ersten Lektüre folgende Paragraphen überschlagen: §. 57, §. 61, §. 124, §. 125, §. 126, §. 127 und §. 140.

Ist dieses Buch gleichwohl zunächst für den Privat- und Selbstunterricht bestimmt, so dürfte es dennoch auch für den öffentlichen Unterricht, vorzüglich in den höhern Classen des Gymnasiums, geeignet seyn. In wie fern übrigens dieses Werk der Form und dem Umfange nach dem beabsichtigten Zwecke entspricht, muß ich dem billigen Urtheile vorurtheilsfreyer Sachverständigen überlassen, deren Berichtigungen ich jederzeit mit Freuden und innigem Danke annehmen werde.

Wien, im Julius 1825.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Einleitung . . . . . Seite 1

Erstes Kapitel.

Entwicklung des Begriffes und der Natur unseres Zahlen-Systemes . 4

Zweytes Kapitel.

Von der Addition und Subtraction unbenannter Zahlen.

A. Von der Addition 16
B. Von der Subtraction 22

Drittes Kapitel.

Von der Multiplication und Division unbenannter Zahlen.

A. Von der Multiplication 43
Von der Bildung des Quadrates gegebener Größen 64
Besondere Eigenschaften der Quadratzahlen 71
Von der Bildung des Würfels gegebener Zahlen 74
Besondere Eigenschaften der Kubikzahlen 83
B. Von der Division 85
Allgemeine Sätze von Producten und Quotienten 96
Begriff vom Wurzelausziehen 112
Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Quadratwurzel als ganze Zahl zu ziehen 116
Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Kubikwurzel als ganze Zahl auszuziehen 123

Viertes Kapitel.

Vom Maß und Vielfachen, von absoluten und relativen Primzahlen, und Zerfällung der Zahlen in ihre Factoren 130

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Von den Brüchen.

	Seite
Allgemeine Begriffe und allgemeine Eigenschaften der Brüche . .	158
Gegebene Brüche zu addiren	165
Gegebene Brüche von einander abzuziehen	167
Von der Multiplication der Brüche	168
Gebrochene Zahlen durch einander zu dividiren	171
Von den künstlichen Brüchen	173
A. Von den Decimal-Brüchen	174
B. Von den Kettenbrüchen	200

Sechstes Kapitel.

Von den Wurzelgrößen.

Allgemeine Sätze	214
Aus irgend einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel entweder vollkommen genau oder näherungsweise auszuziehen	231
Aus irgend einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel entweder vollkommen genau oder näherungsweise auszuziehen	238
Reduction des Ausdruckes $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, und Anwendung der entsprechenden Reductionsformel auf imaginäre Größen	239

Siebentes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln mehrgliedriger Größen . . .	247

Zweyte Abtheilung.

Achtes Kapitel.

Von der Rechnung mit benannten Zahlen.

Allgemeine Begriffe	261
I. Vom Längenmaße	262
II. Vom Flächenmaße	263
III. Vom Körpermaße	264
IV. Vom Gewichte	265
V. Vom Zeitmaße	267
VI. Von der Geldrechnung	268

Digitized by Google

Seite

Vom metrischen Systeme und Vergleichung desselben mit dem alten französischen 270
Vergleichung des österreichischen Maß-, Gewichts- und Münz-Systemes mit dem metrischen und alten französischen Systeme . . 275
Vom Auflösen benannter Zahlen 277
Von der Reduction benannter Zahlen 279
Von der Addition » » 282
Von der Subtraction » » 282
Von der Multiplication » » 284
Von der Division » » 288

Neuntes Kapitel.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, nebst ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben 295
I. Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen . . —
II. Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen . . 299
III. Anwendung der Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben . . 322
Allgemeine Bemerkungen . . . . . —
A. Von der einfachen goldenen Regel 324
B. Von der zusammengesetzten Regel de tri 330
C. Von der Theilregel 343

Zehntes Kapitel.

Von den Logarithmen 349
Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen 350
Von den gemeinen oder Brigg's'schen Logarithmen 359
Von der dekadischen Ergänzung 375

Eilftes Kapitel.

Von den Gleichungen im Allgemeinen.

Vorbegriffe 377
Grundregeln zur Auflösung der Gleichungen 379
Eintheilung der Gleichungen 381
Begriff und Eintheilung der Algebra 383
Vom Ordnen der Gleichungen 384

Digitized by Google

Zwölftes Kapitel.

Von der Auflösung der Gleichungen des ersten und zweyten Grades ins Besondere.

Seite

A. Von der Auflösung der einfachen Gleichungen.
a) Von der Auflösung bestimmter Probleme mit einer unbekannten Größe 386
b) Auflösung bestimmter Probleme mit zwey und mehreren Unbekannten 405
B. Von der Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades . . 417

Dreyzehntes Kapitel.

Von den Progressionen.

Vorbegriffe 438
A. Von den arithmetischen Progressionen 439
Anwendung der arithmetischen Progressionen 446
B. Von den geometrischen Progressionen 452
Anwendung der geometrischen Progressionen 460

Digitized by Google

Erste Abtheilung,

enthält

die verschiedenen Rechnungs-Operationen mit besondern und allgemeinen, ganzen und gebrochenen Größen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

§. 1.

Alle Dinge, welche wir mit unsern Sinnen wahrnehmen, können wir uns aus Theilen zusammengesetzt denken, die mit dem Ganzen, dem Inbegriffe aller dieser Theile einerley Natur haben; wir können uns demnach jedes Ding als eine Menge gleichartiger Theile vorstellen. Durch Hinzusetzen oder durch Wegnahme eines oder mehrerer solcher Theile kann also jene Menge vermehrt oder vermindert werden, und dieses gemeinsame Merkmal aller vorhandenen Dinge nennen wir die Größe (Quantität) derselben, obgleich man die Dinge selbst auch Größen (Quanta) zu nennen pflegt.

§. 2.

Jede Größe selbst erscheint uns entweder als bloße Menge (Aggregat) mehrerer gleichartiger abgesonderter Theile, oder als ein einziges Ganze, dessen Theile innig mit einander verbunden, und also nicht abgesondert sind. Im ersten Falle heißt die Größe eine abgesonderte (discrete) — oder Zahl — im andern wird sie stätig oder zusammenhängend genannt. So z. B. ist ein Kornhaufen eine discrete Größe, — eine Linie aber, eine Fläche und ein Körper sind stätige Größen.

§. 3.

Das, woraus man sich eine Größe entsprungen denkt, heißt das Maß oder die Einheit; also heißt Zahl die Größe, welche man sich aus der Wiederhohlung derselben Einheit entsprungen denkt, und zwey Zahlen heißen gleich, wenn sie einerley Größe oder einerley Menge derselben Einheiten enthalten: im entgegengesetzten Falle aber heißen die Zahlen ungleich.

Digitized by Google

§. 4.

Wenn bey irgend einer Zahl außer ihrer Größe auch noch die Eigenschaft oder Qualität der Einheit, auf welche sie bezogen, oder aus welcher sie entsprungen gedacht wird, bestimmt ist; so nennt man sie eine benannte oder concrete Zahl, im Gegentheile aber heißt sie unbenannte oder abstracte Zahl. So ist die Zahl fünf eine unbenannte, fünf Pfund aber eine benannte Zahl.

§. 5.

Eine Zahl heißt in Beziehung auf eine andere, die als Einheit betrachtet wird, gebrochen oder ein Bruch, wenn sie kleiner ist als diese. Diese zweyte Zahl heißt in Beziehung auf die erstere (die gebrochene) das Ganze oder die ganze Zahl. Wenn wir z. B. den Gulden in sechzig gleiche Theile theilen, und jeden solchen Theil einen Kreuzer nennen, so ist der Gulden das Ganze oder die Einheit, und jeder Kreuzer, als der sechzigste Theil des Ganzen, ist ein Bruch. Eben so sind die vierzig Kreuzer in Beziehung auf den Gulden ein Bruch, weil man noch zwanzig Kreuzer, oder zwanzig Sechzigstel Gulden zu ihnen hinzugeben muß, um das Ganze oder einen Gulden zu erhalten. Übrigens können wir uns auch wieder den Kreuzer als das Ganze denken, ihn in vier gleiche Theile — Pfenninge genannt — theilen, und es ist dann der Pfenning in Bezug auf den Kreuzer ein Bruch. Eben so ist der Fuß in Bezug auf den Zoll das Ganze, in Bezug auf die Klafter aber ein Bruch. Es kommt also bey der Beurtheilung, ob eine gegebene Größe eine ganze oder gebrochene Zahl sey, lediglich auf die Beschaffenheit der zum Grunde liegenden Einheit an.

§. 6.

Wenn zwey oder mehrere Zahlen auf dieselbe Einheit bezogen werden, so heißen sie gleichartig (homogen), im Gegentheile aber ungleichartig (heterogen). So sind z. B. Acht Thaler und zwanzig Kreuzer gleichartig, wenn man beyde auf dieselbe Einheit Thaler oder Kreuzer bezieht, ungleichartig aber, wenn die eine auf die Einheit Thaler und die andere auf die Einheit Kreuzer oder Gulden bezogen wird.

§. 7.

Eine Zahl heißt eine bestimmte (besondere) — oder eine unbestimmte (allgemeine) Zahl, je nachdem die Menge

Digitized by Google

der in ihr enthaltenen Einheiten bestimmt oder unbestimmt ist. Zur Bezeichnung der allgemeinen Zahlen hat man die Buchstaben des lateinischen oder deutschen Alphabets gewählt, zur Bezeichnung der besonderen Zahlen aber hat man eigene Figuren — Ziffern genannt — erfunden, die wir bald kennen lernen werden.

§. 8.

Die Wissenschaft der Größen überhaupt heißt Mathematik, und zerfällt in zwey Haupttheile, nähmlich in die Arithmetik und die Geometrie. Jene ist die Wissenschaft der Zahlen und diese die Wissenschaft der stätigen Größen, oder der Größen im Raume.

Die Arithmetik wird wieder eingetheilt in die besondere (Rechenkunst), und in die allgemeine (Algebra), je nachdem sie bloß besondere Zahlen oder auch allgemeine Größen in Betrachtung zieht.

§. 9.

Rechnen heißt das Auffinden einer Zahl aus andern gegebenen Zahlen.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Entwickelung des Begriffes und der Natur unseres Zahlensystemes.

§. 10.

Die ersten ganzen Zahlen, welche so viele Einheiten enthalten, als Puncte daneben stehen, werden der Ordnung nach also ausgesprochen:

Eins .
Zwey . .
Drey . . .
Vier . . . .
Fünf . . . . .
Sechs . . . . . .
Sieben . . . . . .
Acht . . . . . .
Neun . . . . . .
Zehn . . . . . .

§. 11.

Zehn Einheiten, wie sie im gewöhnlichen Sinne genommen werden, heißen eine Einheit der ersten Ordnung oder ein Zehner; zehn Einheiten der ersten Ordnung heißen eine Einheit der zweyten Ordnung oder ein Hunderter; zehn Einheiten der zweyten Ordnung heißen eine Einheit der dritten Ordnung oder ein Tausender; zehn Einheiten der dritten Ordnung heißen eine Einheit der vierten Ordnung; zehn Einheiten der vierten Ordnung heißen eine Einheit der fünften Ordnung; u. s. w.

Die Einheiten der sechsten Ordnung heißen Millionen, eine Einheit der siebenten Ordnung heißt Zehnmillion, eine Einheit der achten Ordnung wird Hundertmillion genannt, u. s. w.

Eine Einheit der zwölften Ordnung, d. i. eine Million Millionen heißt Billion, dann folgen die Zehner, Hunderte, Tausende u. s. f.

Digitized by Google

der Billionen, eine Million Billionen, d. i. eine Einheit der achtzehnten Ordnung heißt eine Trillion, u. s. f.

§. 12.

Die Zeichen, deren wir uns bedienen, um jede beliebige bestimmte Zahl zu bezeichnen, heißen Ziffern, deren wir folgende zehn haben:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Sie heißen: Null, Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs,

7, 8, 9.

Sieben, Acht, Neun.

Die Null wird gar nicht ausgesprochen, weil sie den Mangel der Einheit bezeichnet, und deßwegen auch die unbedeutende Ziffer genannt wird, im Gegensatze der übrigen neun Zeichen, welche bedeutende Ziffern heißen. 1 wird ausgesprochen Eins und in Verbindung mit andern Ziffern Ein.

§. 13.

Steht eine Ziffer für sich allein, so bezeichnet sie so viele Einheiten schlechtweg, als ihre Figur anzeigt, z. B. 8 ganz allein geschrieben, bedeutet acht Einheiten schlechtweg. Stehen aber mehrere Ziffern neben einander, so bezieht sich, wenn man von der Rechten gegen die Linke hinzählt, die erste auf gewöhnliche Einheiten, die zweyte auf Einheiten der ersten Ordnung, die dritte auf Einheiten der zweyten Ordnung, die vierte auf Einheiten der dritten Ordnung, u. s. w. So z. B. bedeutet 87654 vier Einheiten schlechtweg, 5 Einheiten der ersten Ordnung, sechs Einheiten der zweyten, sieben Einheiten der dritten und acht Einheiten der vierten Ordnung.

Wenn in einer Stelle eine Null vorkommt, so zeigt diese an, daß keine Einheiten derjenigen Ordnung, worauf sich eine Ziffer in dieser Stelle bezieht, vorhanden sind. Z. B. 405 bezeichnet fünf Einheiten schlechtweg, und vier Einheiten der zweyten Ordnung; 4005 bezeichnet fünf gewöhnliche Einheiten und vier Einheiten der dritten Ordnung; 40050 bedeutet fünf Einheiten der ersten Ordnung, und vier Einheiten der fünften Ordnung, und eben so bezeichnet 45000 fünf Einheiten der dritten, und vier Einheiten der vierten Ordnung.

Daß die Nullen nicht weggelassen werden dürfen, leuchtet aus dem bereits Gesagten von selbst ein, weil sonst die übrigen linksfolgen-

Digitized by Google

den bedeutenden Ziffern, in frühere Stellen rücken, und dadurch ihren innern Werth verändern. Eben so leicht wird man einsehen, daß wenn einer Zahl rechts eine oder mehrere Nullen vorgesetzt werden, dadurch der Werth der Zahl geändert werde. So z. B. sind die Zahlen 48, 480, 4800 u. s. w. ganz verschieden. Wenn aber einer Zahl am Ende links eine oder mehrere Nullen beygefügt werden, so bleibt die Zahl in ihrem Werthe ungeändert. So z. B. sind die Zahlen 48, 048, 0048, 00048 u. s. w. alle einander gleich.

§. 14.

Wenn eine Zahl mit Ziffern geschrieben ist, so kann man immer die nächst größere, d. i. diejenige, die eine Einheit mehr enthält, schreiben, und zwar auf folgende Art:

1) Endiget sich die schon geschriebene Zahl rechts mit einer Ziffer, die keine Neun ist, so schreibe man statt ihr die nächst höhere Ziffer, und lasse die übrigen ungeändert. Z. B. Die gegebene, mit Ziffern geschriebene Zahl sey:

7326, so ist die folgende: 7327.

2) Endiget sich die schon geschriebene Zahl mit einer oder mehreren neben einander geschriebenen Neunern, welchen noch andere Ziffern vorausgehen, so schreibe man von der Rechten gegen die Linke hin statt jeder Neune eine Null, statt der nächst folgenden Ziffer aber, die keine Neun mehr ist, setze man die nächst höhere Ziffer, und lasse die übrigen ungeändert, z. B.

Auf die Zahl 49,	auf die Zahl 4759
folgt: 50.	folgt: 4760.
Auf die Zahl 7999,	auf die Zahl 4569999
folgt: 8000.	folgt: 4570000.

3) Ist die gegebene Zahl mit lauter Neunern geschrieben, so schreibe man die 1 mit so vielen rechts folgenden Nullen an, mit wie vielen Neunern die gegebene Zahl geschrieben ist, z. B.

Auf die Zahl 9,	auf die Zahl 9999
folgt: 10.	folgt: 10000.

Der erste Fall ist für sich klar. Im zweyten Falle kommt bey der Zahl 4569999 zu den gewöhnlichen Einheiten noch eine hinzu, wodurch man zehn Einheiten schlechtweg, oder einen Zehner erhält; dieser macht mit den schon vorhandenen Einheiten der ersten Ordnung

Digitized by Google

zehn Zehner, oder eine Einheit der zweyten Ordnung; diese gibt in Verbindung mit den schon vorhandenen Hunderten zehn Einheiten der zweyten Ordnung, oder eine Einheit der dritten Ordnung, welche mit den schon gegebenen neuen Einheiten der dritten Ordnung verbunden, eine Einheit der vierten Ordnung ausmacht. Verbindet man die so erhaltene Einheit mit den sechs gegebenen Einheiten derselben Ordnung, so erhält man eine Zahl, welche aus sieben Einheiten der vierten, fünf Einheiten der funften und vier Einheiten der sechsten Ordnung besteht, d. i. man erhält die Zahl 4570000.

Ganz auf dieselbe Art überzeugt man sich auch von der Richtigkeit der Auflösung beym dritten Falle.

1. Zusatz.

Da wir nun alle Zahlen von eins bis neun durch einzelne Ziffern und die Zahl zehn durch 10 bezeichnen können; so können wir nach dem obigen Satze auch alle größeren, mithin alle Zahlen entweder durch eine Ziffer oder durch die Verbindung mehrerer Ziffern bezeichnen. Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, u. s. w. heißen die natürlichen Zahlen.

2. Zusatz.

Hat man zwey verschiedene, aus gleichviel Ziffern bestehende Verbindungen, und man vergleicht bey beyden die Ziffern, die in einerley Stelle stehen, von der Linken gegen die Rechte; so kommt man nothwendig einmal zu einer Stelle, welche in beyden Verbindungen (weil diese als verschieden vorausgesetzt wurden) mit verschiedenen Ziffern besetzt ist. Jene Verbindung, welche die erwähnte Stelle mit einer höhern Ziffer besetzt hat, ist die größere Zahl von den beyden gegebenen. Z. B. von den Zahlen

743568
743746 } ist 743746 die größere.

3. Zusatz.

Die 10 entsteht, wenn man zur 9 noch eine Einheit hinzufügt, also ist 10 größer als 9. Nun ist aber 9 die größte einziffrige und 10 die kleinste zweyziffrige Zahl, folglich ist jede zweyziffrige Zahl größer als eine einziffrige. Vermehrt man die größte zweyziffrige Zahl 99 um eine Einheit, so erhält man die kleinste dreyziffrige Zahl 100 (Hun-

Digitized by Google

dert); folglich ist jede dreyziffrige Zahl größer als jede zweyziffrige. Eben so wird bewiesen, daß jede vierziffrige Zahl größer als jede dreyziffrige, jede fünfziffrige größer als jede vierziffrige u. s. w., und daß allgemein eine Zahl um so größer seyn müsse, mit je mehr Ziffern dieselbe geschrieben ist. Sind also zwey Zahlen mit ungleich viel Ziffern geschrieben, so können sie einander nicht gleich seyn. Sollen demnach zwey Zahlen einander gleich seyn, so müssen sie 1) mit gleich viel Ziffern geschrieben seyn, und 2) müssen diese Ziffern in den gleichnahmigen Stellen selbst einander gleich seyn.

§. 15.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl aussprechen.

I. Ist die Zahl nur einziffrig, so ist die Aussprache für sich klar.

II. Ist die Zahl zweyziffrig, so sind zwey Fälle zu unterscheiden, denn es ist dann entweder die Stelle der Einheiten eine Null oder nicht. Im ersten Falle spricht man die folgenden Zahlen so aus, wie die daneben stehenden Worte angeben:

10 Zehn, oder ein Zehner, oder eine Einheit der ersten Ordnung,
20 Zwanzig, oder zwey Zehner, od. zwey Einheiten » » »
30 Dreyßig, » drey » » drey » » » »
40 Vierzig, » vier » » vier » » » »
50 Fünfzig, » fünf » » fünf » » » »
60 Sechzig, » sechs » » sechs » » » »
70 Siebenzig, » sieben » » sieben » » » »
80 Achtzig, » acht » » acht » » » »
90 Neunzig, » neun » » neun » » » »

Ist aber die Stelle der Einheiten mit einer bedeutenden Ziffer besetzt, so spricht man diese zuerst, setzt das Wort und hinzu, und spricht dann die Stelle der Zehner nach der vorhin angegebenen Regel aus. Z. B.

28 wird gelesen: acht und zwanzig,
39 » » neun und dreyßig,
81 » » ein und achtzig.

Ist aber die Stelle der Zehner mit der Ziffer 1 besetzt, so läßt man das Wörtchen und weg, z. B.

18 wird gelesen: achtzehn,
19 » » neunzehn u. s. w.

Die Zahl 11 wird kurz eilf, und die Zahl 12 kurz zwölf gelesen.

Digitized by Google

III. Wenn die auszusprechende Zahl mit drey Ziffern geschrieben ist, und es sind die beyden letzten Ziffern rechts Nullen, so spricht man bloß die Ziffer in der dritten Stelle nach I aus, und setzt das Wort hundert dazu, z. B. 700 wird gelesen siebenhundert. Ist bloß die Ziffer der Zehner einer dreyziffrigen Zahl eine Null, so spricht man die Ziffer in der dritten Stelle (von der Rechten gegen die Linke) nach I aus, setzt die Worte hundert und hinzu, und liest dann auch die Ziffern der Einheiten nach I. z. B. 305 wird gelesen: dreyhundert und fünf. Ist endlich die Stelle der Zehner auch mit einer bedeutenden Ziffer besetzt, so spricht man zuerst die höchste Zifferstelle nach I aus, fügt das Wort hundert und hinzu, und liest dann die folgenden zwey Ziffern nach II. Z. B.

340 wird gelesen: dreyhundert und vierzig,
827 » » achthundert und sieben und zwanzig,
913 » » neunhundert und dreyzehn.

IV. Ist die gegebene Zahl mit vier, fünf oder sechs Ziffern geschrieben, so schneide man von der Rechten gegen die Linke die ersten drey Ziffern durch einen Punct oder einen kleinen Strich ab, spreche die linksstehende Zahl nach den bereits gegebenen Regeln aus, setze dann das Wort Tausend hinzu, und spreche endlich noch die drey folgenden Ziffern nach den bekannten Regeln hinzu, z. B. die Zahl

8,457 wird gelesen: achttausend vier hundert und sieben und fünfzig, — 26,043 — sechs und zwanzig tausend drey und vierzig, — 719,804 — siebenhundert neunzehntausend acht hundert und vier, — 802,007 — achthundert zweytausend und sieben, — 40,300 — vierzigtausend dreyhundert, — 160,050 — einhundert sechzigtausend und fünfzig.

V. Ist die gegebene Zahl mit mehr als sechs Ziffern geschrieben; so theilt man sie

1) von der Rechten gegen die Linke in Classen von sechs Ziffern, wo jedoch die letzte Classe links auch weniger als sechs Ziffern haben kann.

2) Zwischen die höchste Ziffer der ersten Classe und die niedrigste Ziffer der zweyten Classe setze man oben das Zeichen (′), welches Millionen gelesen wird; zwischen die höchste Zifferstelle der zweyten Classe, und die niedrigste Zifferstelle der dritten Classe setze man oben das Zeichen (″), welches Billionen gelesen wird; eben so setze man zwischen die achtzehnte und neunzehnte Ziffer oben das Zeichen (‴), welches Trillionen bezeichnet u. s. w.

3) Spreche man von der Linken gegen die Rechte jede Classe für

Digitized by Google

sich nach der in IV aufgestellten Regel aus, und setze am Ende immer die Benennung der letzten Ziffer rechts hinzu. Es sey z. B. die Zahl 843709600532792 auszusprechen. Man schreibe

843″709.600′532,792 und spreche nun: Achthundert drey und vierzig Billionen, siebenhundert neun tausend und sechshundert Millionen, fünfhundert zwey und dreyßig Tausend siebenhundert zwey und neunzig.

Eben so wird die Zahl

40576‴700008″463705′690043 ausgesprochen wie folgt: Vierzigtausend fünfhundert sechs und siebenzig Trillionen, siebenhundert tausend und acht Billionen, vierhundert drey und sechzig tausend siebenhundert und fünf Millionen, sechshundert neunzigtausend und drey und vierzig.

Endlich liest man die Zahl

7‴493768″000000′908001 auf folgende Art:

Sieben Trillionen, vierhundert drey und neunzig tausend siebenhundert acht und sechzig Billionen, neunhundert achttausend und eins.

§. 16.

Wir können uns jede Zahl aus Theilen auf verschiedene Art zusammengesetzt denken; denn so besteht z. B. die Zahl 37654′192415 entweder aus den folgenden untereinanderstehenden Theilen:

37654000000
192415 } oder aus den Theilen

37000000000
654000000
192000
415

oder auch aus folgenden:

30000000000		drey Zehntausende		
7000000000		siebentausend		
600000000		sechshundert		Millionen
50000000		fünfzig		
4000000		vier		
100000	d. i.	einhundert	tausend	
90000		neunzig		
2000		zwey		
400		vierhundert		Einheiten.
10		zehn		
5		fünf		

Digitized by Google

§. 17.

Eine ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Um sich Fertigkeit im Anschreiben der ausgesprochenen Zahlen zu erwerben, kann der Schüler anfänglich die ausgesprochene Menge der gewöhnlichen (primitiven) Einheiten, Millionen, Billionen u. s. w. mit den im vorigen Paragraphen angegebenen Kennzeichen (′, ″, ‴,) erst unter einander schreiben, dann setze er an die Classe der Einheiten unter der höchsten Benennung die Classe der Einheiten unter der nächst niedrigern Benennung rechts hinzu, u. s. w. reihe er alle Classen in ihrer natürlichen Ordnung an einander. Würde eine ganze Classe von Einheiten, deren Benennung niedriger ist, als die Benennung einer andern gegebenen Classe, fehlen, oder nicht ausgesprochen worden seyn, so müssen die sechs fehlenden Stellen durch Nullen ausgefüllt werden. Eben dieß muß auch geschehen, wenn in einer gegebenen Classe eine oder mehrere Stellen nicht ausgesprochen worden sind. Folgende Beyspiele werden dieses Verfahren noch deutlicher machen.

1. Beyspiel. Man soll die Zahl: "Sieben und achtzig Millionen, dreyhundert fünf und vierzig tausend, neunhundert acht und sechzig" anschreiben.

Man setze $\left.\begin{matrix} 87′ \\ 345968 \end{matrix}\right\}$ also 87′345968.

2. Beyspiel. Man schreibe die Zahl: »Vierhundert neun tausend, achthundert und zwölf Trillionen, sieben und sechzigtausend und vier Billionen, achttausend und siebenzehn Millionen, vierhundert tausend und dreyßig« mit Ziffern an. Man setze:

$$\left.\begin{matrix} 409812‴ \\ 067004″ \\ 008017′ \\ 400030 \end{matrix}\right\} \text{ also ist die Zahl}$$

409812‴067004″008017′400030.

3. Beyspiel. Man bezeichne durch Ziffern folgende Zahl: »Neuntausend und vierzehn Billionen, sechshundert neun und zwanzigtausend und eins.« Man setze:

$$\left.\begin{matrix} 9014″ \\ 000000′ \\ 629001 \end{matrix}\right\} \text{ also } 9014″000000′629001.$$

*) Die beyden vorstehenden Aufgaben faßt man unter dem Nahmen Numeration zusammen.

Digitized by Google

§. 18.

Aus dem bereits Gesagten erhellt, daß jede Ziffer einer gegebenen Zahl einen doppelten Werth habe, einen unveränderlichen, welcher ihr vermöge ihrer Figur zukommt, und ihr absoluter oder natürlicher Werth genannt wird, und einen veränderlichen, welchen sie vermöge der Stelle, die sie einnimmt, erhält, und der Werth der Stelle oder der Localwerth genannt wird.

Ferner ist aus §. 11 und 12 klar, daß der Werth einer jeden Ziffer um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache u. s. w. gesteigert werde, wenn diese Ziffer um eine, zwey, drey u. s. w. Stellen weiter gegen die Linke gerückt wird.

Es wird nämlich der durch die Ziffer 1 bezeichnete Zahlenwerth vermöge der Stelle, welche sie einnimmt, auf folgende Art gesteigert:

1 10 100 1000 10000 100000

Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, Hunderttausend,

1'000000 10'000000 100'000000

Million, Zehnmillion, Hundertmillion u. s. w.

Eben so wird auch der Zahlenwerth jeder andern Ziffer durch das Vorsetzen der Nullen gesteigert.

§. 19.

Die bisher erklärte Art, ganze Zahlen zu bezeichnen, heißt das zehntheilige oder das decadische System, weil festgesetzt wurde, daß immer zehn Einheiten von einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern bilden soll.

§. 20.

Setzt man über oder unter die Ziffern einer gegebenen Zahl von der Rechten gegen die Linke die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3,.....; so heißen diese letzten Zeiger (Indices) oder Ordnungsexponenten, weil sie andeuten, von welcher Ordnung die Einheiten sind, auf welche sich die Ziffer bezieht, über der sie stehen. Bey der Zahl 7458263 z. B. bezieht sich nach §. 12 die Ziffer 3 auf gewöhnliche (primitive) Einheiten,

Die Ziffer 6 auf Einheiten der ersten Ordnung
» » 2 » » » zweyten »
» » 8 » » » dritten »
» » 5 » » » vierten »

Digitized by Google

die Ziffer 4 auf Einheiten der fünften Ordnung
» » 7 » » » sechsten »
und man kann die gegebene Zahl deßhalb auch so schreiben:

$$7458263 \text{ oder } 7458263$$

*) Wenn der Zeiger einer einzigen Ziffer bey einer gegebenen Zahl bekannt ist, so sind auch die Zeiger aller übrigen Ziffern derselben Zahl bekannt; man könnte demnach die vorige Zahl auch so bezeichnen: 7458263 oder 7458263 oder 7458263 u. s. f. Man könnte daher die Zahl 6475908000000 kürzer auch so schreiben:

$$6475908 \text{ oder } 6475908 \text{ oder } 6475908 \text{ oder } 6475908 \text{ u. s. f.}$$

§. 21.

So wie der innere Werth einer Ziffer durch das Anhängen von einer, zwey, drey u. s. w. Nullen, um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache u. s. w. gesteigert wird, so muß umgekehrt durch das Wegnehmen von einer, zwey, drey u. s. f. Nullen der innere Werth einer Ziffer um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache u. s. w. vermindert werden, oder der innere Werth einer Ziffer wird um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache u. s. w. vermindert, wenn man sie um eine, zwey, drey u. s. w. Stellen weiter gegen die Rechte rückt. So wie aber das Fortrücken einer Ziffer gegen die Linke ohne Ende geschehen kann, so ist auch das Fortrücken einer Ziffer gegen die Rechte durch nichts gehindert. Bemerkt man nun die Stelle der primitiven Einheiten durch einen oben ihrer Ziffer rechts gesetzten Punct, so kann man eine Ziffer auch über diese Gränze hinausschieben, wo oben die rechts von jenem Absonderungszeichen durchgangenen Stellen durch Nullen ausgefüllt werden müssen. Wenn z. B. die Ziffer 8, statt acht Einheiten schlechtweg auszudrücken, einen zehnfach geringern Werth, oder den zehnten Theil von acht Einheiten bezeichnen soll; so setzt man an die Stelle der gewöhnlichen Einheiten eine Null, aber rechts von ihr den Punct (das Absonderungszeichen), und nach diesem erst die Ziffer 8; man schreibet nämlich 0·8 oder auch 0,8. Sollte die 8 einen hundertfach geringeren Werth bezeichnen, als ihr vermöge ihrer Figur zukommt, so würde man sie um eine Stelle noch weiter rechts schieben, und ihr also noch eine Null (zwischen dem Absonderungszeichen und ihr) vorsetzen. Man

Digitized by Google

dürfte nämlich nur schreiben: 0·08. Schreibt man 0·008 so hat 8 einen tausendfach geringern Werth, als wenn man 8· geradezu schreibt. Eben so hat die Zahl 0·0008 einen Werth, der zehntausend Mal geringer ist, als der natürliche Werth der Ziffer 8.

So wie man ferner bey den Zahlen 80, 800, 8000, 80000 u. s. f. lesen kann: 8 Zehner, 8 Hunderter, 8 Tausender, 8 Zehntausender u. s. w.; so liest man die Zahlen 0·8, 0·08, 0·008, 0·0008 ꝛc. ꝛc. also: 8 Zehntel, 8 Hundertel, 8 Tausendtel, 8 Zehntausendtel u. s. w.

Man könnte demnach die Zahl 0·8888 so lesen: 8 Zehntel, 8 Hundertel, 8 Tausendtel und 8 Zehntausendtel, und die Zahl 0·34756 also: 3 Zehntel, 4 Hundertel, 7 Tausendtel, 5 Zehntausendtel und 6 Hunderttausendtel. Allein man spricht der Kürze halber diese Zahlen so wie die gewöhnlichen Zahlen aus, und setzt am Ende die Benennung (d. i. den Nahmen des Localwerthes) der letzten Ziffer rechts dazu. Man würde demnach die beyden obigen Zahlen also lesen: 8 tausend, 8 hundert acht und achtzig Zehntausendtel, und vier und dreyßigtausend siebenhundert sechs und fünfzig Hunderttausendtel.

Die Zahl 24·597 kann man also lesen: 24 Einheiten (oder Ganze), 5 Zehntel, 9 Hundertel und 7 Tausendtel, oder 24 Ganze und 597 Tausendtel, oder endlich 24 Tausend 597 Tausendtel.

Die rechts vom Absonderungszeichen stehenden Ziffern nennen wir in der Folge Decimalziffern, und die Zahlen bey welchen auch Decimalziffern vorkommen, Decimalzahlen.

§. 22.

Versieht man auch die Decimalziffern mit Zeigern (§. 20), so sieht man sogleich, daß die Zehner und Zehntel, Hunderte und Hundertel, Tausende und Tausendtel, Zehntausende und Zehntausendtel u. s. w. gleichweit von der Stelle der Einheiten abstehen.

Soll demnach eine ausgesprochene Decimalzahl durch Ziffern richtig bezeichnet werden; so schreibe man zuerst die ausgesprochene Zahl ganz nach §. 17 an, ohne auf den zuletzt mitgenannten Localwerth Rücksicht zu nehmen, und dann setze man das Absonderungszeichen, um so viele Stellen von der Rechten gegen die Linke hin, als von der wievielsten Ordnung die Einheit des ausgesprochenen Localwerthes ist.

Sollte z. B. die Zahl 728 Tausendtel angeschrieben werden; so

Digitized by Google

ſetze man vorerſt die Zahl 728, und weil die Tauſendtel den Zeiger 3 haben, ſo ſetze man das Abſonderungszeichen nach der dritten Stelle von der Rechten gegen die Linke, man ſchreibe nämlich: ·728 oder 0·728. Eben ſo ſchreibt man 34728 Tauſendtel alſo: 34·728. — Sind nicht ſo viele Ziffern vorhanden, als der Zeiger der letzten Ziffer rechts anzeigt, ſo füllet man die fehlenden Stellen mit Nullen aus. Wäre z. B. 728 Hunderttauſendtel anzuſchreiben; ſo ſetze man:

·00728 oder 0·00728.

Digitized by Google

Zweytes Kapitel

Von der Addition und Subtraction unbenannter Zahlen.

A. Von der Addition.

§. 23.

Addiren heißt eine Größe finden, die durch Vereinigung mehrerer gleichartiger Größen entsteht. Die zu verbindenden Größen heißen Summanden oder Additionsposten, und die durch die Verbindung hervorgebrachte Größe die Summe.

Mithin ist die Summe eine mit allen Summanden gleichartige Größe, d. i. die Zahl, welche die Summe darstellt, bezieht sich mit den Zahlen, durch welche die Summanden bezeichnet worden sind, auf eine und dieselbe Einheit. Addiren heißt demnach auch eine Größe finden, welche mehreren gegebenen gleichartigen Größen zusammen genommen gleich ist.

§. 24.

Daß zwey oder mehrere Größen addirt, oder in eine Summe gebracht werden sollen, wird dadurch angedeutet, daß man dieselben in einer beliebigen Ordnung neben einander setzt, und zwischen je zwey derselben das Zeichen + schreibt. Dieses Zeichen wird gelesen mehr (plus) oder und. Sollen z. B. die Zahlen 7 und 5 addirt werden, so schreibt man 7+5, und liest 7 mehr 5, oder 7 und 5. Hat man den Ausdruck A+B+C, so bezeichnet dieser nichts anders als die Summe der drey gleichartigen Größen A, B und C, oder er deutet an, daß jene Größen addirt werden sollen. Die Buchstaben A, B, C u. s. w. können alle beliebigen Zahlen bezeichnen, oder man hat sich unter diesen Buchstaben was immer für Zahlen vorzustellen.

Um auszudrücken, daß zwey Größen A und B einander gleich seyn, wird dadurch angedeutet, daß man zwischen dieselben das Zeichen = (gleich) setzt, nämlich man schreibt A=B oder B=A, und liest: A gleich B oder B gleich A. Will man aber anzeigen, daß die Größe A größer als eine andere B sey; so schreibt man A>B oder

Digitized by Google

$B < A$, so also, daß das Zeichen $>$ die Öffnung immer gegen die größere Zahl, und die Spitze gegen die kleinere richtet. — Ist noch nicht bestimmt, ob A größer oder kleiner als B sey, und man will anzeigen, daß die Größen A und B ungleich seyen; so schreibt man $A \gtrless B$, oder $A \lessgtr B$ oder auch $A \gtrless B$.

Ausdrücke von der Form $A = B$, oder $A + B = C + D + E$, oder $A + B + C = F$ u. s. w. heißen Gleichungen, und die beyden Theile, die auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, Glieder oder Seiten der Gleichung. In der Gleichung $A + B = C + D + E$ ist daher $A + B$ das eine, und $C + D + E$ das andere Glied der Gleichung.

§. 25.

Zwey oder mehrere gegebene ganze Zahlen zu addiren.

Es können hier mehrere Fälle vorkommen, welche wir der Ordnung nach durchgehen wollen.

1. Es sollen zwey einzifferige Zahlen addirt werden.

Man addire zu der einen Summande nach und nach die Einheit so oft, wie oft sie in der andern Summande enthalten ist. Sollen z. B. die Zahlen 5 und 3 addirt werden, so schreibe man, weil $3 = 1 + 1 + 1$ ist

$$5 + 1 = 6$$
$$6 + 1 = 7$$
$$7 + 1 = 8$$

also ist die Summe $5 + 3 = 8$.

In der Addition zweyer einziffriger Zahlen muß sich der Anfänger fleißig üben, um in vorkommenden Fällen sogleich die Summe angeben zu können. Zu diesem Zwecke präge man das folgende sogenannte Eins und Eins dem Gedächtnisse gut ein.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Digitized by Google

Soll nun nach dieser Tafel die Summe zweyer einzifferigen Zahlen gefunden werden, so suche man die eine der gegebenen Summanden in der oberen horizontalen Reihe, und die andere in der ersten Vertical-Reihe links. Dann suche man dasjenige Fach auf, welches mit der Summande in der obern Horizontalreihe in einer Vertical-Reihe, und mit der andern Summande in der ersten Vertical-Reihe links in einerley Horizontalreihe ist. Das so gefundene Fach enthält die verlangte Summe.

2. Zu einer mehrzifferigen Zahl eine einzifferige zu addiren.

Man addire zur Ziffer in der Stelle der Einheiten bey der mehrzifferigen Summande die einzifferige Summande, so ist diese Summe entweder einzifferig oder zweyzifferig. Im ersten Falle schreibe man die einzifferige Summe an die Stelle der Einheiten der mehrzifferigen Summande, und lasse die übrigen Ziffern ungeändert. Z. B.

$$80 + 4 = 84, \text{ denn } 0 + 4 = 4$$
$$\text{und } 83 + 6 = 89, \text{ weil } 3 + 6 = 9 \text{ ist.}$$

Im zweyten Falle aber, wenn nähmlich die gefundene Summe eine zweyzifferige Zahl ist, bey welcher, wie aus dem Eins und Eins ersichtlich ist, die Stelle der Zehner stets mit 1 besetzt ist, schreibe man die Ziffer der primitiven Einheiten statt der niedrigsten Ziffer der vielzifferigen Summande, und statt der Ziffer in der Stelle der Zehner setze man die nächst höhere Ziffer. Z. B. $478 + 6 = 484$; denn $478 + 6 = 470 + 8 + 6 = 470 + 14 = 470 + 10 + 4 = 480 + 4 = 484$; eben so ist $5869 + 7 = 5876$, denn es ist $5869 + 7 = 5860 + 9 + 7 = 5860 + 16 = 5860 + 10 + 6 = 5870 + 6 = 5876$.

3. Zu einer gegebenen vielzifferigen Zahl mehrere gegebene einzifferige Zahlen zu addiren.

Man addire in diesem Falle zur gegebenen vielzifferigen Summande die erste gegebene einzifferige, zu dem gefundenen Resultate (zu dem, was herauskommt) die zweite einzifferige Zahl u. s. w., bis man endlich alle einzifferige Zahlen addirt hat. Z. B. $4728 + 4 + 6 + 8 + 7 = 4753$; denn es ist nach Nro. 2.:

$$4728 + 4 = 4732$$
$$4732 + 6 = 4738$$
$$4738 + 8 = 4746$$
$$4746 + 7 = 4753.$$

Auf die Ordnung, in welcher die einzifferigen Zahlen zur gegebenen oder gefundenen mehrzifferigen Zahl addirt werden, kommt es, wie von selbst einleuchtet, nicht an.

(*) Beziehen sich die Additionsposten nicht auf gewöhnliche Einheiten, sondern auf Einheiten einer und derselben höhern Ordnung, so muß nothwendig auch die Summe sich auf Einheiten derselben Ordnung beziehen. So z. B. ist

$$400 + 300 = \overset{2}{4} + \overset{2}{3} = \overset{2}{7} = 700, \text{ und eben so}$$
$$62000 + 7000 = \overset{3}{62} + \overset{3}{7} = \overset{3}{69} = 69000.$$

Wenn man daher die Summe mehrerer gegebenen Zahlen gefunden hat, und man will alle Summanden auf eine höhere Einheit beziehen, so darf man nur die vorige Summe auf dieselbe Einheit beziehen, um die Summe der neuen Summanden zu enthalten, d. h. wenn man allen Summanden gleich viel Nullen anhängt, so muß man auch der obigen Summe eben so viele Nullen beyfügen. Z. B. Da $821 + 3 + 5 + 8 = 837$, so ist auch

$\overset{1}{821} + \overset{1}{3} + \overset{1}{5} + \overset{1}{8} = \overset{1}{837}$ oder $8210 + 30 + 50 + 80 = 8370$

$\overset{2}{821} + \overset{2}{3} + \overset{2}{5} + \overset{2}{8} = \overset{2}{837}$ » $82100 + 300 + 500 + 800 = 83700$

$\overset{3}{821} + \overset{3}{3} + \overset{3}{5} + \overset{3}{8} = \overset{3}{837}$ » $821000 + 3000 + 5000 + 8000 = 837000$

$\overset{4}{821} + \overset{4}{3} + \overset{4}{5} + \overset{4}{8} = \overset{4}{837}$ » $8210000 + 30000 + 50000 + 80000 = 8370000$

und allgemein

$\overset{n}{821} + \overset{n}{3} + \overset{n}{5} + \overset{n}{8} = \overset{n}{837}$

wo n jede beliebige ganze Zahl bezeichnet.

4. Mehrere vielzifferige Zahlen zu addiren.

Man schreibe die gegebenen Zahlen nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit, d. h. so unter einander, daß immer jene Ziffern, welche sich auf Einheiten derselben Ordnung beziehen, genau unter einander zu stehen kommen, und ziehe unter der letzten Zahl eine horizontale Linie.

Hierauf addire man von der Rechten gegen die Linke hin alle bedeutenden einzifferigen Zahlen jeder Vertical-Reihe nach Nro. 3, und setze die gefundene Summe jeder Vertical-Reihe, wenn sie einzifferig

Digitized by Google

ist, gerade unter die horizontale Linie; ist jene Summe aber eine mehrzifferige Zahl, so setze man bloß ihre niedrigste Ziffer unter die horizontale Linie, und die von den höhern Ziffern gebildete Zahl addire man gleich zur nächst folgenden Vertical-Reihe links; sollte jedoch keine Vertical-Reihe mehr folgen, so schreibe man die gefundene mehrzifferige Summe so unter die horizontale Linie, daß ihre niedrigste Ziffer unter die addirte Vertical-Reihe zu stehen kommt.

Beyspiel 1. Man addire die Zahlen:
4736, 53848, 704, 8319.

Man setze:

4736
53848
704
8319

67607. Man erhält nämlich:

$9 + 4 + 8 + 6 = 27 = {}^{1}2 + 7$
${}^{1}1 + {}^{1}0 + {}^{1}4 + {}^{1}3 = {}^{1}8 = {}^{1}8$
${}^{2}3 + {}^{2}7 + {}^{2}8 + {}^{2}7 = {}^{2}25 = {}^{3}2 + {}^{2}5$
${}^{3}8 + {}^{3}3 + {}^{3}4 = {}^{3}15 = {}^{4}1 + {}^{3}5$
$\quad {}^{4}5 = {}^{4}5$

---

also Summe . . . . $= {}^{4}6 + {}^{3}7 + {}^{2}5 + {}^{1}10 + 7$
$= {}^{4}6 + {}^{3}7 + {}^{2}6 + {}^{1}0 + 7$
$= 67607.$

Beyspiel 2. Man addire die Zahlen
54342, 73081, 90674, 613708, 963 und 72.

Man schreibe:

54342
73081
90674
613708
963
72

Summe = 832840, denn man erhält

$$
\begin{array}{rrrr

In der Summe spricht man: $6 + 7 = 13$, 13 weniger 9 sind 4, und 6 sind 10, weniger 9 ist 1, und 7 sind 8. Da nun hier auch 8 übrig geblieben sind, so hat man Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Rechnung.

B. Von der Subtraction unbenannter Zahlen.

§. 27.

Subtrahiren heißt eine Größe finden, die zu einer gegebenen Größe addirt, eine andere gegebene Größe hervorbringt. — Die erstere der gegebenen Größen heißt der Subtrahend, die andere heißt der Minuend, und die zu suchende Größe heißt der Unterschied, oder die Differenz oder der Rest. — Also müssen der Minuend, Subtrahend und Rest gleichartige Größen seyn, d. h. diese drey Größen müssen sich nothwendiger Weise auf dieselbe Einheit beziehen.

§. 28.

Um anzudeuten, daß von der Größe A die Größe B abzuziehen (zu subtrahiren) sey, setzt man zwischen Minuend und Subtrahend das Zeichen —, welches weniger (minus) gelesen wird; man schreibt nähmlich: A — B und liest: A weniger B, oder A minus B. Bezeichnen wir nun den Unterschied zwischen den beyden Zahlen A und B durch R; so erhalten wir die Gleichung $A - B = R$.

§. 29.

Zwey gegebene Zahlen von einander zu subtrahiren.

1) Sind die beyden gegebenen Zahlen einzifferig, so ist der Unterschied aus dem Eins und Eins bekannt (§. 25). So z. B. ist $9 - 5 = 4$, weil $9 = 5 + 4$. Ich frage mich nähmlich gleichsam in Gedanken, welche Zahl gibt zur Zahl 5 addirt, die Zahl 9?

2) Ist der Minuend zweyzifferig, und hat die Stelle der Zehner mit einer Eins besetzt, der Subtrahend aber einzifferig; so ist dieser entweder gleich, oder kleiner oder größer als die Ziffer in der Stelle der Einer beym Minuend. — Im ersten Falle ist der Rest immer 10, im zweyten Falle ist er 10 + dem Unterschiede zwischen den Ziffern der primitiven Einheiten, welcher nach Nro. 1 gefunden wird, und endlich im dritten Falle stelle man sich dieselbe Frage wie in Nro. 1, so gibt das Eins und Eins den gesuchten Rest.

Digitized by Google

Beyspiele: 1. $18-8=10$; denn $18=10+8$, also $18-8=10+8-8=10$, weil zwey gleiche Größen von einander abgezogen, oder eine Größe von sich selbst abgezogen, den Rest 0 gibt.

2. $18-5=13$, denn $18-5=10+8-5=10+3=13$.

3. $14-8=6$, weil $14=8+6$.

3) Sind die beyden gegebenen Zahlen mehrzifferig, so schreibe man den Subtrahend nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit unter den Minuend, ziehe einen horizontalen Strich, und subtrahire nach Nro. 1 und 2 von der Rechten gegen die Linke hin, jede Ziffer des Subtrahends von der darüber stehenden gleichnahmigen Ziffer des Minnends, und setze den Rest, der immer einzifferig seyn muß, gerade darunter unter die horizontale Linie. Sollte es sich ereignen, daß eine Ziffer des Subtrahends größer wäre, als die gleichnahmige Ziffer im Minuend, so vermehre man letztere um 10, oder was dasselbe ist, denke sich jener Ziffer links eine Eins vorgesetzt, und subtrahire dann davon die Ziffer des Subtrahends, mache aber zugleich bey der nächst höhern Ziffer einen Punkt, welcher anzeigt, daß sie bey der folgenden Subtraction um Eins höher, oder daß die entsprechende Ziffer im Minuend um Eins niedriger zu nehmen ist.

Übrigens ist es zweckmäßiger, die nächst folgende Ziffer des Subtrahenden sich immer um Eins höher zu denken, wie man in der Folge leicht einsehen wird.

Beyspiel 1. Man ziehe von der Zahl 8734526 die Zahl 4853294 ab.

Man hat 873526
— 485324
388202

Man spricht nähmlich: 4 und 2 sind 6, 2 und 0 sind 2, 3 und 2 sind 5, 5 und 8 sind 13, bleibt 1 und 8 sind 9 und 8 sind 17, bleibt 1 und 4 sind 5 und 3 sind 8.

Beyspiel 2. 34027568
— 15818499
Rest = 18209069.

Hier spricht man: 9 und 9 sind 18; bleibt 1 und 9 sind 10 und 6 sind 16; bleibt 1 und 4 sind 5 und 0 sind 5 u. s. w.

Hat der Minuend mehr Ziffern als der Subtrahend, so denke

man sich die fehlenden Stellen des Subtrahenden mit Nullen ausgefüllt, und verfahre dann wie oben. Z. B.

174027986	Eben so	1000000
— 948798		— 7284
173079188		992716.

§. 30.

a) Bezeichnen wir allgemein den Minuend durch M, den Subtrahend durch S, und den Rest durch R, wo M, S und R was immer für Zahlen bezeichnen; so haben wir die Gleichung:

I. $M - S = R$ und der Erklärung der Subtraction gemäß

II. $M = S + R$.

Wenn wir nun $M - S$ statt R setzen:

III. $M = S + (M - S)$; wo wir zur Vermeidung der Zweydeutigkeit den Unterschied $M - S$ in Klammern einschließen.

Diese Gleichung muß immer richtig seyn, was man auch statt M und S für gleichartige Größen setzen mag:

b) Setzen wir statt M in der Gleichung I. den Werth $(S + R)$ aus der Gleichung II., und klammern um der Deutlichkeit willen denselben ein; so erhalten wir:

IV. $(S + R) - S = R$.

Diese Gleichung in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, heißt: Wenn man von der Summe zweyer Zahlen die eine Zahl abzieht, so findet man die andere.

Es muß demnach dieser allgemeinen Wahrheit zur Folge die Gleichung Statt finden:

$(S + R) - R = S$, oder weil nach II. $S + R = M$,

V. $M - R = S$;

d. h. der Rest vom Minuend abgezogen, gibt den Subtrahend.

Setzt man in der letzten Gleichung statt R wieder den Werth $(M - S)$ aus der I. Gleichung; so erhält man:

VI. $M - (M - S) = S$.

§. 31.

1) Wenn man zu einer gegebenen Größe eine andere ihr gleichartige addirt, und zu der so erhaltenen Summe noch eine dritte gleichartige Größe

Digitized by Google

hinzufügt, so findet man dasselbe Resultat, als wenn man die Summe der beyden letzten Größen zur erstern addirt.

Sind nähmlich A, B und C drey gleichartige Größen; so ist

I. $(A+B)+C=A+(B+C)$, wo die Klammern wieder um der Deutlichkeit willen gesetzt sind. Z. B.

$$(7+5)+4=7+(5+4), \text{ d. i.}$$
$$12+4=7+9, \text{ oder}$$
$$16=16.$$

2) Wenn $C=D-B$, also $C+B=D$ ist, wo D eine mit A, B und C gleichartige Größe bezeichnet, und man setzt in der Gleichung I. statt C diesen Werth; so erhält man:

$$(A+B)+(D-B)=(A+D);$$

welche Gleichung folgende Wahrheit ausdrückt:

Eine aus zwey Theilen bestehende Größe A+D wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den einen Theil A um eine beliebige Größe B vermehrt, und den andern Theil D um eben diesen Theil vermindert. Z. B.

$$(9+3)+(6-3)=9+6, \text{ oder}$$
$$12+3=9+6, \text{ d. i.}$$
$$15=15.$$

3) Aus der Gleichung in Nro. 2 folgt nach §. 30 (b)

I. $(A+D)-(A+B)=(D-B)$

oder $(D+A)-(B+A)=(D-B)$

II. $(A+D)-(D-B)=(A+B)$.

Die Gleichung I. lehrt, daß eine Differenz (D—B) dem innern Werthe nach nicht geändert werde, wenn man sowohl den Minuend D als auch den Subtrahend B um dieselbe beliebige Größe A vermehrt.

Die Gleichung II. aber lehrt uns, daß die Summe zweyer Größen ihrem Werthe nach ungeändert bleibe, wenn man zu der einen Summande eine beliebige Größe D addirt, dagegen von eben dieser Größe die zweyte Summande subtrahirt, und diese beyde Resultate von einander abzieht.

Digitized by Google

Beyspiele. $(12+5)-(12+3)=(5-3)$, d. i.
$17-15=2$
und $(12+5)-(5-3)=(12+3)$, d. i.
$17-2=15$.

4) Setzt man in der Gleichung II. in Nro. 3) $A=C-D$, oder $A+D=C$, und $B=D-E$, oder $E=D-B$, wo C und E gleichartig mit den Größen A, B und D seyn müssen; so erhält man:

$$C-E=(C-D)+(D-E);$$

d. h. der Unterschied zweyer Zahlen ist gleich der Summe zweyer andern Zahlen, wovon die eine gefunden wird, wenn man den gegebenen Minuend um eine beliebige Größe D vermindert, und die andere, wenn man den gegebenen Subtrahend E von derselben beliebigen Größe D abzieht.

Beyspiel. $13-5=(13-7)+(7-5)$, d. i.
$8=6+2$.

5) Aus der letzten Gleichung folgt:

I. $(C-E)-(D-E)=(C-D)$, oder
$(C-D)=(C-E)-(D-E)$.

II. $(C-E)-(C-D)=(D-E)$.

Die Gleichung I. enthält die Wahrheit: Der Unterschied C—D zweyer Zahlen C und D wird nicht geändert, wenn man sowohl den Minuend C als auch den Subtrahend D um dieselbe beliebige Zahl E vermindert.

Die Gleichung II. läßt sich mit Worten so ausdrücken: Eine Differenz D—E läßt sich in eine andere Differenz verwandeln, deren Minuend der Unterschied zwischen einer beliebigen Zahl C und dem Subtrahend E der ersten Differenz ist, deren Subtrahend aber der Unterschied ist zwischen derselben Zahl C und dem Minuend D der ersten Differenz. Z. B.

$(20-8)-(10-8)=20-10$, d. i.
$12-2=10$;
und $(20-8)-(20-10)=10-8$, d. i.
$12-10=2$.

6) Da Gleiches zu Gleichem addirt, wieder Gleiches gibt; so muß, weil $B-C=B-C$, d. h. weil jede Größe sich selbst gleich

Digitized by Google

ist, auch $A+B-C=A+B-C$ seyn, welches sich auch so schreiben läßt:

I. $(A+B)-C=A+(B-C)$;

d. h. wenn man bey einer Differenz (B—C) den Minuend B um eine beliebige Größe A vermehrt, so wird auch der Rest (B—C) um dieselbe Größe A vermehrt. Z. B.

$$(12+9)-6=12+(9-6), \text{ d. i.}$$
$$21-6=12+3, \text{ oder}$$
$$15=15.$$

Setzen wir in der letzten Gleichung $A+B=D$, mithin $A=D-B$, und $B-C=E$ also $B=C+E$, oder auch $C=B-E$; so erhält man die Gleichung:

II. $D-(B-E)=(D-B)+E$;

welche uns diese Wahrheit lehrt: Wenn man bey einer Differenz $D-B$ den Subtrahend B um eine beliebige Größe E vermindert; so wird der Rest (D—B) um eben diese Größe E vermehrt. Z. B.

$$30-(18-6)=(30-18)+6, \text{ d. i.}$$
$$30-12=12+6, \text{ oder}$$
$$18=18$$

Setzt man ferner in der Gleichung $C-D=(C-E)-(D-E)$ (Nro. 5. I.) nun $D-E=F$, also $D=E+F$; so erhält man:

III. $C-(E+F)=(C-E)-F$.

Diese Gleichung in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, heißt: Wenn man bey einer Differenz (C—E) den Subtrahend E um eine beliebige Größe F vermehrt; so wird der Rest C—E um eben diese Größe F vermindert, oder auch: wenn von einer Größe C die Summe zweyer andern Größen E+F abgezogen werden soll; so kann man zuerst die eine Summande, und dann von dem gefundenen Reste die andere abziehen. Z. B.

$$25-(7+5)=(25-7)-5, \text{ d. i.}$$
$$25-12=18-5, \text{ oder}$$
$$13=13.$$

7) Setzt man in der Gleichung I. Nro. 5. statt C nun $A+E$, nähmlich $C=A+E$ oder $C-E=A$, so erhält man die Gleichung:

$A-(D-E)=(A+E)-D$;

Digitized by Google

welche mit Worten ausgedrückt, so lautet: Es ist einerley, ob man von einer Größe A eine Differenz (D—E) abzieht, oder ob man von der um den Subtrahend E vermehrten Zahl A den Minuend D subtrahirt; oder die Gleichung läßt sich auch so ausdrücken: Von einer Größe A wird eine Differenz D—E abgezogen, wenn man den Subtrahend E zu A addirt, und den Minuend D von der erhaltenen Summe subtrahirt. Z. B.

$$48-(25-8) = (48+8)-25, \text{ d. i.}$$
$$48-17 = 56-25, \text{ oder}$$
$$31 = 31.$$

8) Da $A+B=B+A$ ist, und Gleiches vom Gleichen abgezogen, wieder Gleiches gibt, so ist auch $A+B-C=B+A-C$, welche Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$A+(B-C) = B+(A-C);$$

welche Gleichung wörtlich so heißt: Wenn von der Summe zweyer Größen A+B eine dritte subtrahirt werden soll, so wird das Resultat gefunden, wenn man zu der einen Summande die Differenz zwischen der andern Summande und dem gegebenen Subtrahenden addirt. Z. B.

$$19+(14-8) = 14+(19-8), \text{ d. i.}$$
$$19+6 = 14+11, \text{ oder}$$
$$25 = 25.$$

9) Setzt man in der Gleichung $(C-E)-(C-D)=(D-E)$ (Nro. 5. II.) statt E nun C—A, nähmlich $E=C-A$, also $A+E=C$ und $C-E=A$; so erhält man:

$$A-(C-D) = D-(C-A);$$

welche Gleichung mit Worten so heißt: Es ist einerley, ob man von der Größe A den Unterschied (C—D) abzieht, oder ob man von dem Subtrahend dieser letzten Differenz den Unterschied zwischen dem Minuend C eben dieser Differenz und der gegebenen Zahl A subtrahirt. Z. B.

$$17-(19-14) = 14-(19-17), \text{ d. i.}$$
$$17-5 = 14-2.$$

Digitized by Google

10) Es ist nach Nro. 6. III. $C-(E+F) = (C-E)-F$ und wenn man E mit F verwechselt, $C-(F+E) = (C-F)-E$. Da nun $C-(E+F) = C-(F+E)$; so ist, weil zwey Größen die einer dritten Größe gleich sind, auch unter sich gleich seyn müssen:

$$(C-E)-F = (C-F)-E;$$

d. h. Wenn man bey einer Differenz C—F den Minuend C um eine beliebige Größe E vermindert, wird auch der Rest. C—F um eben dieselbe Größe E vermindert; oder auch: Wenn von einer Größe C zwey andere Größen E und F subtrahirt werden sollen, so ist es einerley, ob man vom Minuend C zuerst E, und dann vom erhaltenen Reste die Größe F subtrahirt, oder ob man zuerst F und dann E abzieht. Z. B.

$$(50-18)-14 = (50-14)-18, \text{ d. i.}$$
$$32- \quad 14 = 36- \quad 18.$$

11) Es ist nach Nro. 4. $(C-E) = (C-D) + (D-E)$. Setzt man in dieser Gleichung statt C nun $A+C$, und nimmt an, daß $D=A+B$, und $E=B+F$ sey, so erhält man die Gleichung

$$(A+C)-(B+F)=[(A+C)-(A+B)]+[(A+B)-(B+F)].$$

Nun ist aber $(A+C) - (A+B) = C-B$
und eben so $(A+B) - (B+F) = A-F$ } nach Nro. 3. I.,

folglich erhält man, wenn diese Werthe in der letzten Gleichung gesetzt (substituirt) werden,

$$(A+C) - (B+F) = [C-B] + [A-F]$$

oder umgekehrt:

$$(A-F) + (C-B) = (A+C) - (B+F);$$

d. h. zwey Differenzen werden addirt, wenn man von der Summe beyder Minuende die Summe der beyden Subtrahende abzieht. Z. B.

$$(23-15) + (18-7) = (23+18) - (15+7), \text{ d. i.}$$
$$8 \quad + \quad 11 \quad = \quad 41 \quad - \quad 22, \text{ oder}$$
$$19 \quad = \quad 19.$$

12) Setzt man in der Gleichung

$[C-E] - [D-E] = [C-D]$ Nro. 5. I. nun $C=A+B$,
$E=B+F$ und $D=F+G$,

so erhält man:

Digitized by Google

$$[(A+B)-(B+F)]-[(F+G)-(B+F)]=[(A+B)-(F+G)]$$

oder nach Nro. 3. I.

$$[A-F]-[G-B]=(A+B)-(F+G);$$

d. h. der Unterschied zweyer Differenzen wird gefunden, wenn man von dem um den Subtrahenden der zweyten Differenz vermehrten Minuenden der ersten Differenz die Summe des Subtrahends der ersten Differenz und des Minuends der zweyten Differenz subtrahirt. Z. B.

$$(13-4)-(12-8)=(13+8)-(4+12),\ \text{d. i.}$$
$$9-4=21-16,\ \text{nähmlich}$$
$$5=5.$$

Anmerkung. Die beyden letzten Paragraphen habe ich mit einer unbedeutenden Abänderung aus dem vortrefflichen Systematischen Lehrbuche der Arithmetik des ausgezeichneten Mathematikers, Herrn Heinrich August Rothe (Leipzig 1804), entlehnt, weil die daselbst aufgestellten Gleichungen die ersten Elemente der Buchstabenrechnung enthalten, und den Anfänger auf eine so einfache Weise mit der Methode, allgemeine Lehrsätze und Wahrheiten kurz durch Buchstaben und Gleichungen auszudrücken, und aus diesen wieder neue Wahrheiten abzuleiten, bekannt machen.

§. 32.

1) Ein Ausdruck, welcher aus mehreren Zahlen, oder aus mehreren gleichartigen Größen zusammengesetzt ist, welche durch die Zeichen + und − untereinander verbunden sind, wie z. B. $8+5-2+13-6+17-12$, oder $a+b-c+d-e-f+g$ heißt ein zusammengesetzter Ausdruck, oder eine zusammengesetzte, oder eine mehrgliederige Größe (complexe Größe — Polynom). Die einzelnen Zahlen oder Größen, aus welchen der gegebene Ausdruck besteht, heißen Glieder oder Theile derselben. Der vorhin gegebene Ausdruck sagt: man soll 5 zu 8 addiren, von der Summe 2 abziehen, zum Reste wieder 13 addiren, von der so erhaltenen Summe 6 abziehen, den Rest um 17 vermehren, und endlich von der so erhaltenen Summe wieder 12 abziehen. Es ist also dieser Erklärung zu Folge: $8+5-2+13-6+17-12=23$.

Bey diesen wiederhohlten Additionen und Subtractionen kann sich der Fall ereignen, daß man von einer gefundenen Zahl eine größere abziehen soll. Wie man sich in einem solchen Falle zu benehmen hat,

Digitized by Google

und welche Bedeutung die so gefundenen Resultate haben, werden wir später kennen lernen.

2) Diejenigen Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks, welche das Zeichen + vor sich haben, heißen additive (zu addirende) Theile (Glieder) oder Größen, und diejenigen Theile eines zusammengesetzten Ausdruckes, welche das Zeichen — vor sich haben, heißen subtractive (abzuziehende) Theile (Glieder), oder subtractive Größen. Hat eine Größe kein Zeichen vor sich, wie im obigen Beyspiele die Zahl 8, so wird sie immer im additiven Sinne genommen.

§. 33.

Addirt man zu einem zusammengesetzten Ausdrucke die Summe der subtractiven Glieder; so findet man die Summe der additiven Theile zum Resultate, So z. B. ist:

$$(a+b-c+d-e-f+g)+(c+e+f)=a+b+d+g$$

denn es ist: $c+(a+b-c)=a+b$ (§. 31. Nro. 2).

Und Gleiches zu Gleichem addirt, gibt wieder Gleiches, also

$$c+(a+b-c+d)=a+b+d$$

und nach §. 31. Nro. 3. II. ist:

$$c+(a+b-c+d)=(c+e)+(a+b-c+d-e)$$

mithin ist auch

$$(c+e)+(a+b-c+d-e)=a+b+d$$

und aus demselben Grunde

$$(c+e+f)+(a+b-c+d-e-f)=a+b+d.$$

Wird endlich auf beyden Seiten g addirt, so ist

$$(c+e+f)+(a+b-c+d-e-f)+g=a+b+d+g$$

oder nach §. 31. Nro. 1.:

$$(c+e+f)+(a+b-c+d-e-f+g)=a+b+d+g$$

oder auch:

$$(a+b-c+d-e-f+g)+(c+e+f)=a+b+d+g$$

was zu erweisen war.

Beyspiel. $(17+5-8+9-12)+(8+12)=(17+5+9)$.

Zusatz 1.

Aus der Gleichung

$(a+b-c+d-e-f+g) + (c+e+f) = (a+b+d+g)$

folgt nach §. 30.:

$(a+b-c+d-e-f+g) = (a+b+d+g) - (c+e+f)$.

d. h. der Werth eines zusammengesetzten Ausdrucks wird gefunden, wenn man von der Summe der additiven Theile die Summe der subtractiven Theile abzieht. Der gefundene Werth heißt der reducirte Ausdruck. Es ist also $(17+5-8+9-12) = (17+5+9) - (8+12)$

$= 31 - 20 = 11$.

Zusatz 2.

Zusammengesetzte Ausdrücke haben also für uns bis jetzt noch nur dann einen deutlichen Sinn, wenn die Summe der additiven Theile gleich oder größer ist als die Summe der subtractiven Größen, nähmlich wenn $(a+b+d+g) \overset{=}{>} (c+e+f)$ ist.

Zusatz 3.

Sollen mehrere zusammengesetzte Ausdrücke addirt werden, so schreibt man dieselben mit ihren Zeichen neben einander. Z. B.

$(13-5+8) + (9-7+3-4) = 13-5+8+9-7+3-4$.

§. 34.

Zwey gegebene zusammengesetzte Ausdrücke von einander abzuziehen.

Man addire zu dem gegebenen Minuend den gegebenen Subtrahend mit veränderten Zeichen, d. h. man verwandle die additiven Theile des Subtrahends in subtractive, und die subtractiven Glieder desselben in additive, und addire den so geänderten Ausdruck zum gegebenen Minuend nach §. 33. Zus. 3. Z. B.

$$(a-b+c-d) - (e+f-g+h-i)$$
$$= (a-b+c-d) + (-e-f+g-h+i)$$
$$= (a-b+c-d) + (i-h+g-f-e)$$

denn es ist nach §. 31. Nro. 7.:

$$(a-b+c-d) - (e+f-g+h-i)$$
$$= (a-b+c-d+i) - (e+f-g+h)$$

ferner nach §. 31. Nro. 6. III.:

$$(a-b+c-d+i) - (e+f-g+h)$$
$$= (a-b+c-d+i-h) - (e+f-g).$$

Digitized by Google

Eben so nach §. 31. Nro. 7.:

$$(a-b+c-d+i-h) - (e+f-g)$$
$$= (a-b+c-d+i-h+g) - (e+f)$$

und nach §. 31. Nro. 6. III. ist

$$(a-b+c-d+i-h+g) - (e+f)$$
$$= (a-b+c-d+i-h+g-f) - e$$
$$= (a-b+c-d+i+h+g-f-e)$$

nähmlich es ist $(a-b+c-d) - (e+f-g+h-i)$

$$= a-b+c-d+i-h+g-f-e$$
$$= (a-b+c-d) + (i-h+g-f-e)$$
$$= (a-b+c-d) + (-e-f+g-h+i)$$
$$= a-b+c-d-e-f+g-h+i$$

was zu erweisen war.

Beyspiel. $(20+12-15) - (43-17+28-19)$

$$= 20+12-15-43+17-28+19.$$

§. 35.

Nicht selten ist der Werth einer Größe von der Differenz zweyer andern gleichartigen Größen abhängig, und die Bestimmung desselben wird häufig durch andere Umstände bedingt, als gerade bey einer Rechnung absichtlich zu Grunde gelegt wurde, wie wir in der Folge öfters Gelegenheit haben werden, zu bemerken.

Eine Größe, die von der Differenz zweyer gleichartigen Größen abhängig ist, kann auf verschiedene Art bestimmt werden, je nachdem die eine oder die andere größer ist, oder je nachdem die eine oder die andere als Minuend oder Subtrahend angenommen wird. Wenn z. B. jemand A Gulden Vermögen hat, und B Gulden Schulden, so hat er $(A-B)$ Gulden Vermögen, wenn $A>B$, und $(B-A)$ Gulden Schulden, wenn $B>A$ ist. Eben so, wenn ein Kaufmann eine gewisse Waare um A Thaler gekauft, und um B Thaler verkauft hat, so bezeichnet $(B-A)$ seinen Gewinn, wenn $B>A$, und $(A-B)$ den erlittenen Verlust, wenn $A>B$ ist.

Wir sehen also aus diesen Beyspielen, daß die Benennung des gefundenen Unterschiedes sich ändert, je nachdem die eine oder die andere der gegebenen gleichartigen Größen (denn beyde beziehen sich auf eine bestimmte Münzeinheit) größer oder kleiner angenommen wird, wo wir dann jedes Mahl die größere Zahl als den Minuend angenommen haben. Allein bey allgemeinen Untersuchungen unterscheidet man

Digitized by Google

der Kürze wegen beyde Fälle nicht, sondern man legt der Rechnung den einen oder den andern Fall zu Grunde, und ereignet es sich dann bey der Anwendung auf spezielle Fälle oder bey den näheren Bestimmungen einer Aufgabe, daß man auf eine Differenz stößt, deren Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so läßt sich die Bedeutung derselben ohne Schwierigkeit aus den angegebenen Bedingungen erklären. So sieht man aus den vorhin angegebenen Beyspielen sogleich ein, daß (A—B) Gulden Vermögen, und (B—A) Gulden Schulden, und eben so, daß (B—A) Thaler Gewinn, und (A—B) Thaler Verlust gleichbedeutend sey.

Es muß demnach eine Differenz, deren Minuend kleiner ist als der Subtrahend, immer durch die umgekehrte Differenz erklärt werden.

§. 36.

Der Werth einer Differenz, wo der Minuend größer als der Subtrahend ist, heißt eine positive (bejahende) Größe; aber der Werth einer Differenz, deren Subtrahend größer als ihr Minuend ist, heißt eine negative (verneinende) Größe; und Größen, die entweder positiv oder negativ sind, heißen (reelle) wirkliche oder mögliche Größen. So z. B. ist (7—3) eine positive, aber (3—7) eine negative Zahl.

Zusatz 1.

Da aber der Rest mit dem Minuend und Subtrahend immer gleichartig seyn muß, diese aber was immer für Größen seyn können, so ist klar, daß es so vielerley Arten positiver und negativer Größen geben müsse, so vielerley Arten von Größen überhaupt möglich sind.

Zusatz 2.

Da eine Größe für sich allein betrachtet, weder positiv noch negativ ist, indem diese Eigenschaften nur den Größen zukommen, in wie fern sie als Resultate der Subtraction betrachtet werden; so ist klar, daß es bey einer positiven Größe nur auf den Überschuß des Minuends über den Subtrahend, und bey einer negativen Größe nur auf den Überschuß des Subtrahends über den Minuend ankomme. — Also sind zwey positive Zahlen einander gleich, wenn der Überschuß des Minuends über den Subtrahend bey der einen gleich ist dem Überschusse des Minuends über den Subtrahend bey der andern. So

Digitized by Google

z. B. ist 12 Gulden — 8 Gulden = 10 Gulden — 6 Gulden, weil beyde Differenzen = 4 sind. Eben so ist 8 Gulden — 12 Gulden = 6 Gulden — 10 Gulden; denn nach §. 35 sind (8 Gulden — 12 Gulden) Vermögen gleichbedeutend mit (12 Gulden — 8 Gulden) Schulden, und eben so sind (6 Gulden — 10 Gulden) Vermögen identisch mit (10 Gulden — 6 Gulden) Schulden. Nun sind aber (12 Gulden — 8 Gulden) Schulden eben so viel als (10 Gulden — 6 Gulden) Schulden, nähmlich 4 Gulden Schulden, folglich muß auch (8 Gulden — 12 Gulden) Vermögen = (6 Gulden — 10 Gulden) Vermögen seyn. Hieraus leuchtet nun ein, daß die im §. 31 in Bezug auf die Differenzen aufgestellten Sätze auch dann noch gültig seyen, wenn die dort vorkommenden Minuende kleiner als die zugehörigen Subtrahende sind.

Zusatz 3.

Man pflegt die negativen Größen dadurch anzudeuten, daß man dem Überschusse des Subtrahends über den Minuend das Zeichen — vorsetzt, der positiven Größe aber, d. i. dem Überschusse des Minuends über den Subtrahend setzt man gar kein Zeichen vor, kann aber das Zeichen + ihr vorgesetzt denken, oder auch wirklich vorsetzen. Also ist $(7-3) = 4 = +4$ und $(3-7) = -(7-3) = -4$.

Hier sind also + und — nicht Operations-Zeichen, wie früher, sondern Qualitäts-Zeichen, d. h. hier drücken diese Zeichen besondere Eigenschaften der Größen aus, und in der Anwendung muß man genau unterscheiden, ob diese Zeichen in dem einen oder in dem andern Sinne zu nehmen sind.

Zusatz 4.

Solche Beziehungen, wie Vermögen und Schulden; Gewinn und Verlust; Steigen und Fallen; Vermehrung und Verminderung; Entfernung gegen die Rechte und Entfernung gegen die Linke; Entfernung nach oben und Entfernung nach unten, u. s. w. heißen entgegengesetzte Beziehungen, und die sie bezeichnenden Größen nennt man entgegengesetzte Größen. Eine negative Größe mit der einen der Beziehungen verbunden, drückt immer so viel von der andern ihr entgegengesetzten aus, als das umgekehrte Positive bezeichnet. So z. B. bezeichnen — 3 Gulden Schulden so viel als 3 Gulden Vermögen, und umgekehrt — 3 Gulden Vermögen so viel als 3 Gulden Schulden.

Digitized by Google

Die entgegengesetzten Größen bezeichnet der Mathematiker ebenfalls durch die Zeichen + und —, wodurch diese Zeichen eine dritte Bedeutung erhalten, ein Umstand, der den Anfänger oft in Verlegenheit setzt, weil er noch zu wenig Gewandtheit besitzt, um in vorkommenden Fällen sogleich beurtheilen zu können, in welchem Sinne diese Zeichen zu nehmen sind.

*) Herr Rothe sagt in dem oben angeführten Werke pag. 281: Nicht alle Mahl, wo negative Größen vorkommen, finden entgegengesetzte Beziehungen Statt, wie z. B. in den Ausdrücken $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ und $\frac{1}{a^{-m}}=a^m$ was meines Dünkens nicht ganz richtig ist; weil denn doch auch hier eine Art von Gegensatz Statt findet. Denn diese beyden Ausdrücke sagen ja, daß ein Factor mit einem negativen Exponenten eigentlich ein Divisor, und ein Divisor mit einem negativen Exponenten eigentlich ein Factor sey. Nun sind sich aber die Multiplication und Division einander entgegengesetzt, also ꝛc. ꝛc.

Bey der Anlage einer Rechnung steht es in unserer Willkür, welche von zwey entgegengesetzten Größen wir mit + und welche wir mit — bezeichnen wollen.

Steht das Zeichen — vor einem zusammengesetzten Ausdrucke, so folgt daraus noch nicht, daß der Werth desselben negativ sey, weil dieß nur dann der Fall ist, wenn der in der Klammer stehende Ausdruck selbst positiv ist. Z. B.

$$-(13-4+5-8)=-(6)=-6 \text{ und}$$
$$-(20-12+5-18)=-(-5)=+5;$$

denn der Ausdruck $-(-5)$ sagt, man soll das entgegengesetzte von -5, d. i. man soll $+5$ setzen.

Wir sehen also, daß das Entgegengesetzte von dem Entgegengesetzten einer Größe diese Größe selbst sey. Es mag demnach A eine positive oder negative Zahl bezeichnen, so läßt sich dieser Satz so ausdrücken: $-(-A)=A$.

Zusatz 5.

Weil z. B. $-5=0-5$; so sagt man: **eine negative Größe ist weniger als Nichts**; welcher Satz sich bey entgegengesetzten Beziehungen rechtfertigen läßt. Wer z. B. 5 Gulden Schulden, oder — 5 fl. Vermögen hat, hat weniger Vermögen als der, welcher weder Vermögen noch Schulden, d. i. welcher Nichts hat. Denn wenn sich beyde 5 fl. verdienen, so hat ersterer, wenn er seine

Digitized by Google

5 fl. zahlt, d. i. seine Schulden tilgt, erst Nichts, während der andere wirklich 5 fl. Vermögen besitzt. Daß aber das Wort Nichts hier nicht absolut, sondern bezugsweise zu nehmen sey, versteht sich von selbst.

Ferner ist eine höhere negative Zahl kleiner als eine niedrigere, z. B. $-12<-7$. Denn wenn man 12 fl. Schulden hat, besitzt man weniger als ein anderer, der nur 7 fl. Schulden hat, weil, wenn jeder z. B. 15 fl. sich erwerben würde, der erstere nach Tilgung seiner Schulden nur 3 fl. Vermögen, der andere aber 8 fl. Vermögen hätte.

Zusatz 6.

Aus den Gleichungen:

$6-1=5$ oder auch	$6-1=5$
$5-1=4$	$6-2=4$
$4-1=3$	$6-3=3$
$3-1=2$	$6-4=2$
$2-1=1$	$6-5=1$
$1-1=0$	$6-6=0$
$0-1=-1$	$6-7=-1$
$0-2=-2$	$6-8=-2$
$0-3=-3$	$6-9=-3$
$0-4=-4$	$6-10=-4$
$0-6=-5$	$6-11=-5$

sieht man, daß negative Zahlen herauskommen, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... rückwärts also verlängert: .....$-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,$.....
Das von jedem Paar Zahlen in dieser Reihe diejenige, welche weiter links steht, kleiner ist, als diejenige, welche weiter rechts steht, so sieht man, daß $-12<-7$, $-5<0$, $-4<2$ u. s. w. sey.

§. 37.

Mehrere positive und negative Größen zu addiren.

1) Soll zu der positiven Größe A die positive B addirt werden, so muß natürlich die Summe gleichartig mit beyden Summanden und positiv seyn, nähmlich:

$$(+A)+(+B)=+(+A+B)=A+B.$$

2) Soll zu einer negativen Zahl $(-A)$ eine negative Zahl $(-C)$ addirt werden, so ist klar, daß das Resultat ebenfalls der Summe beyder Zahlen gleich, aber negativ seyn müsse, weil das Ganze und die Theile immer gleichartig sind.

Digitized by Google

Es ist also:

$$(-A)+(-B)=-(A+B)=-A-B$$

denn $-(A+B)=o-(A+B)=(o-A)-B$

$=(-A)-B=-A-B,$

wenn §. 31, Nro. 6, III, C=o, E=A und F=B gesetzt wird.

3) Weil nach §. 30, b) IV. a) $A=(A+C)-C$ und $D=(D+B)-B$ also

b) $(-B)=D-(D+B)$, so ist auch, weil Gleiches zum Gleichen addirt, wieder Gleiches gibt:

$A+(-B)=(A+C)-C+D-(D+B)$

$=(A+C+D)-(D+B+C)$ (§. 33. Zus. 1.)

$=(A+C+D)-(B+C+D)$ und dieser Ausdruck nach §. 31. Nro. 3. I.

$=A-B.$

nähmlich $A+(-B)=A-B$ oder

$(+A)+(-B)=A-B=+(A-B).$

Eben so zeigt man auch, daß

$(-A)+(+B)=-A+B=B-A=-(A-B)$ sey.

Fassen wir beyde Fälle zusammen, die in Nro. 1 und 2 betrachtet wurden, so erhalten wir

I. $(\pm A)+(\pm B)=\pm A\pm B=\pm(A+B),$

und die hier betrachteten Fälle zusammen genommen, geben die Gleichung

II. $(\pm A)+(\mp B)=\pm A\mp B=\pm(A-B).$

Auf eben diese Art läßt sich nun auch zeigen, daß

$A+B+(-C)+(-D)+(-F)=(A+B)-(C+D+F)=$

$=A+B-C-D-F$ (§. 31. Nro. 6. III.).

Es verwandelt sich demnach die Addition entgegengesetzter Größen in eine Subtraction.

Zusatz 1.

Aus der vorhin erwiesenen Gleichung $A+(-B)=A-B$ folgt umgekehrt $A-B=A+(-B)$, d. h. eine Größe B abziehen heißt die entgegengesetzte $(-B)$ addiren, und umgekehrt: Eine Größe $(-B)$ addiren heißt die ihr entgegengesetzte $(+B)$ abziehen.

Dieser Satz läßt sich auch auf folgende Art erweisen. Es ist nach §. 31. Nro. 12.

$(A-F)-(G-B)=(A+B)-(F+G)$ und nach §. 31. Nro. 11 ist $(A+B)-(F+G)=(A-F)+(B-G)$.

Digitized by Google

Folglich ist auch:

$$(A-F)-(G-B)=(A-F)+(B-G)=(A-F)+(-G+B).$$

Zusatz 2.

Also werden mehrere Größen, die einfach oder zusammengesetzt seyn mögen, addirt, wenn man sie mit ihren Zeichen neben einander schreibt. Z. B.

$$a+(-b)+d+e+(-f)=a-b+d+e-f;$$

$$13+(-5)+(-4)+9+(-8)+(-2)=$$
$$=13-5-4+9-8-2.$$

$$(a+b-c+d-e)+(f-g-h+i+k)=$$
$$a+b-c+d-e+f-g-h+i+k.$$

$$(23-8+7)+(15-4-5)+(18+4-12-6+5)=$$
$$=23-8+7+15-4-5+18+4-12-6+5.$$

Die Bedeutung dieser Ausdrücke ist für sich klar. (§. 32).

§. 38.

Positive und negative Größen zu subtrahiren.

Soll von einer Größe A, die positiv oder negativ seyn mag, eine positive oder negative Größe B abgezogen werden, so wird der Rest gefunden, wenn man das Entgegengesetzte des Subtrahends zum ungeänderten Minuend addirt. Nähmlich es ist

$$A-(+B)=A+(-B)=A-B$$

und

$$A-(-B)=A+(+B)=A+B,$$

oder beyde Fälle zusammengenommen

$$A-(\pm B)=A+(\mp B)=A\mp B.$$

Denn da wir im §. 31. Nro. 3. I. und Nro. 5. I. erwiesen haben, daß die Differenz zweyer Größen nicht geändert werde, wenn man den Minuend und den Subtrahend um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert, so ist:

$$A-(+B)=(A-B)-(+B-B)=(A-B)-(0)=$$
$$=A-B=A+(-B)\ (\text{§. 37. Zus. 1}),$$

und

$$A-(-B)=(+A)-(-B)=(+A+B)-(-B+B)=$$
$$=(A+B)-(0)=A+B=A+(+B).$$

Zusatz 1.

Es ist demnach:

$$(\pm A)-(+B)=\pm A-B$$

Digitized by Google

und $(\pm A)-(-B)=\pm A+B$ oder
allgemein $(\pm A)-(\pm B)=\pm A\mp B$.

Zusatz 2.

Soll vor einer Größe A eine mehrgliedrige Größe, z. B.

$$(a+b-c+d-e-f)$$

abgezogen werden, welches so angedeutet wird:

$$A-(a+b-c+d-e-f);$$

so müssen natürlich alle Theile des gegebenen zusammengesetzten Ausdruckes abgezogen werden, und demnach hat man nur alle Zeichen des zusammengesetzten Subtrahends in die entgegengesetzten zu verwandeln, und dann zum gegebenen Minuend A zu addiren. Es ist demnach

$$A-(a+b-c+d-e-f)=A-a-b+c-d+e+f$$
$$=A+(-a-b+c-d+e+f).$$

Diese Regel erhellt auch schon aus §. 31. Nro. 6. II. wo

$$D-(B-E)=(D-B+E)=D-B+E$$
$$=D+(-B+E) \text{ ist.}$$

Eben so ist
$$(a+b-c)-(d-e-f+g)=$$
$$=a+b-c+(-d+e+f-g)$$
$$=a+b-c-d+e+f-g,$$

und

$$(29-13+7)-(15-7-5+6)=29-13+7-$$
$$-15+7-1+5-6.$$

§. 39.

Soll dieselbe Größe a, die positiv oder negativ seyn mag, mehrmahls zu sich selbst addirt werden, oder öfters als Summande angesetzt werden, so pflegt man dieß kurz dadurch auszudrücken, daß man zwischen die Größe a und ihrem Vorzeichen eine Zahl setzt, die so viele Einheiten enthält, wie oft die Größe als Summande zu setzen ist. Soll z. B. a vier Mahl als Summande genommen werden, so schreibt man kurz: 4a, und zwar ist $4a=+4a=a+a+a+a$. Eben so ist $-3a=-a-a-a$, wo $a=1.a$, und $-a=-1.a$ u. s. w. Diese Zahlen nennt man Coefficienten, und man liest vier a, weniger drey a u. s. f. oder auch das Vierfache von a, oder viermal a, und das Dreyfache von $-a$, oder dreymal $-a$ u. s. w. Oft kann auch der Coefficient einer solchen Buchstabengröße selbst eine allgemeine Größe seyn, z. B. bey m.a kann man die allgemeine Größe m als Coefficienten von a oder umgekehrt a als den Coefficienten von m betrachten.

Digitized by Google

2) In einer und derselben Rechnung ist jede Buchstabengröße sich selbst gleichartig. So z. B. sind a, $-3a$, $12a$, u. s. f., wo a was immer für eine bestimmte Zahl bezeichnen mag, gleichartige Größen in einer und derselben Rechnung; denn in einer andern Rechnung kann a wieder einen andern Werth bezeichnen; der von dem vorigen ganz verschieden ist. Also ist $a+a=2a$, $2a+a=3a$, $3a+2a=5a$, $-a-a=-2a$, $-3a-4a=-7a$, $8b-5b=3b$, $6c-8c=-2c$ u. s. w.

3) Hat man einen zusammengesetzten Ausdruck, welcher mehrere gleichartige Buchstabengrößen enthält, so läßt sich derselbe zusammenziehen (reduciren) oder kürzer ausdrücken. z. B.

$$8a-5b+6c-3a+2d+4b+8c-6d=8a-3a-5b+$$
$$+4b+6c+8c+2d-6d=5a-b+2c-4d.$$

Man beobachte nähmlich folgende zwey Regeln:

I. Haben die gleichartigen Größen einerley Zeichen, so werden die Coefficienten addirt, dieselbe Größe nur ein Mahl geschrieben, und dasselbe Zeichen wird beybehalten. Z. B.

$$12a+5a=17a; \quad -8a-6a=-14a.$$

II. Haben die gleichartigen Größen verschiedene Zeichen, so wird der kleinere Coefficient vom größern abgezogen, dieselbe Größe nur ein Mal gesetzt, und das Zeichen des größern Coefficienten beybehalten. Z. B.

$$18b-12b=6b, \quad 5x-7x=-2x.$$

Diese beyden Regeln heißen Reductionsregeln.

§. 40.

Hat man mehrere zusammengesetzte allgemeine Ausdrücke zu addiren; so schreibe man dieselben so unter einander, daß die gleichartigen Buchstabengrößen genau unter einander zu stehen kommen, und reducire dieselben nach den (§. 39. 3.) angegebenen Regeln. Z. B. Man soll folgende Ausdrücke in eine Summe bringen: $3a-7b+$ $+4c-3d-e+2f$, $2a+3b-3c+8d-5f+3g$, $-a+$ $+b+6c-3e-g+4h$, und $2b-3d+4e-2g+3h$. Nach §. 37. Zus. 2. wäre die Addition dieser Ausdrücke algebraisch verrichtet; sobald sie mit ihren Zeichen neben einander gesetzt werden; allein weil diese Ausdrücke mehrere gleichartige Größen enthalten, so verfahre man nach der so eben angegebenen Methode, wo dann die Rechnung also stehen wird:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
3a & -7b & +4c & -3d & -e & +2f & \\
2a & +3b & -3c & +8d & & -5f & +3g \\
-a & +b & +6c & & -3e & & -g+4h \\
 & 2b & & -3d & +4e & & -2g+3h \\
\hline
\text{Summe} = 4a & -b & +7c & +2d & & -3f & +7h.
\end{array}
$$

Kommen unter den gegebenen Additionsposten Größen vor, welche aus mehreren Buchstaben bestehen. wie z. B. ab, abc, wxyz u. s. w., so sind solche Größen nur dann gleichartig, wenn sie alle Buchstaben gemein haben. So z. B. sind 3ab und —8ab, 6abc und 15abc u. s. w. gleichartige Buchstabengrößen, aber 4ab und 4ac; —5abx und —5aby u. s. f. ungleichartige Buchstabengrößen.

§. 41.

Soll von einem gegebenen zusammengesetzten Ausdrucke ein anderer zusammengesetzter Ausdruck abgezogen werden, so darf man nach §. 38. Zus. 2. nur den Subtrahend mit veränderten Zeichen zum gegebenen Minuend addiren. Hat aber der Subtrahend mehrere Glieder, die mit denen des Minuends gleichartig sind, so schreibe man denselben nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit unter den Minuend, verwandle die Zeichen aller Glieder desselben in die entgegengesetzte, und reduzire dann die gleichartigen (homogenen) Glieder nach den (§. 39. 3.) angegebenen Regeln. Z. B. Man soll von der Größe (7a— —5b+ 8c + 4d — 12) den zusammengesetzten Ausdruck (3a— —4b+ 3c+ 2d+5e—8 abziehen. Man setze also:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
7a & -5b & +8c & +4d & & -12 & \\
3a & -4b & +3c & -2d & +5e & -8 & \\
- & + & - & + & - & + & \\
\hline
\text{Rest} = 4a & -b & +5c & +6d & -5e & -4 &
\end{array}
$$

Drittes Kapitel.

Von der Multiplication und Division unbenannter Zahlen.

A. Von der Multiplication.

§. 42.

Multipliziren heißt eine Größe finden, welche die Summe von so vielen einer gegebenen Größe gleichen Summanden ist, als eine andere gegebene Zahl anzeigt. Die gegebene Größe (die Summande) heißt der Multiplicand, die gegebene unbenannte Zahl der Multiplicator, und die zu suchende Größe das Product oder das Vielfache. Aus dieser Erklärung sieht man, daß der Multiplicand und das Product immer gleichartige Größen, der Multiplicator aber jedes Mahl eine unbenannte Zahl seyn müsse.

Es beziehen sich demnach der Multiplicand und das Product jedes Mahl auf dieselbe Einheit, die Größe des Productes aber, d. i. die Zahl, welche das Product ausdrückt, ist von der Art der Einheit unabhängig. Wird z. B. die Zahl 6 auf irgend eine Einheit bezogen, und die dadurch entstehende Größe als Multiplicand mit dem unbenannten Multiplicator 3 multiplizirt, so wird das durch die Zahl 18 ausgedrückte Product auf eben jene Einheit bezogen.

Zusatz 1.

Also ist die Multiplication eine abgekürzte Addition. Z. B.

$$3.6 = 6+6+6$$
$$= 12+6 = 18.$$

Zusatz 2.

So wie also der Multiplicator aus der Einheit entsteht, eben so muß auch das Product aus dem Multiplicand entstehen.

Digitized by Google

§. 43.

1) Um anzudeuten, daß eine gewisse Größe M durch eine gewisse unbenannte Zahl m zu multiplizíren sey, setzt man zwischen den Multiplicator und den Multiplicand einen Punct, oder ein liegendes Kreuz, man schreibt nähmlich: m.M oder m×M, wodurch das Product bloß angedeutet wird. Nennt man das Product P, so ist m.M=P, und man nennt P das mfache von M, oder das Mfache von m.

2) Sind zwey verschiedene Buchstabengrößen mit einander zu multiplizíren, so schreibt man dieselben ohne Zeichen neben einander. Es ist also m.M=m×M=mM; eben so a×b×c=abc. Nicht so bey bestimmten Zahlen, wo das Zeichen immer gesetzt werden muß. Z. B. 3.4=3×4 nicht 34.

3) Wenn sowohl der Multiplicand als auch der Multiplicator unbenannte Zahlen sind; so kann man, ohne das Product zu ändern, beyde Größen mit einander verwechseln, z. B. m.M = Mm, und 2.3=3.2 d. i. 3+3=2+2+2 (§. 42). Aus diesem Grunde heißt man den Multiplicand sowohl als den Multiplicator kurz Factor, und demnach ist ein Product gegeben, sobald beyde Factoren gegeben sind.

4) Ist der eine Factor eine mehrgliedrige Größe, so wird dieser eingeklammert, und der andere Factor daneben gesetzt. Wäre z. B. die zusammengesetzte Größe a + b + c durch irgend eine Zahl d zu multiplizíren, so schreibt man d.(a + b + c), oder noch kürzer d(a+b+c).— Sind aber beyde Factoren zusammengesetzte Größen, so müssen beyde eingeklammert werden. Wäre z. B. (a+b+c) zu multiplizíren durch m+n, so würde man so schreiben: (a+b+c) ×(m+n), oder (a+b+c) (m+n).

§. 44.

Wenn ein Factor eines Productes die Summe mehrerer Theile ist, so ist das Product gleich der Summe aller Producte, welche entstehen, wenn jede Summande des einen Factors mit dem andern multiplizirt wird.

Denn es ist z. B. (2+3)A=5.A=A+A+A+A+A (§. 39).

Es ist aber 2A+3A=(A+A)+(A+A+A)=A+A+A+A+A=5A; folglich ist auch (2+3)A=2A+3.A.

Eben so zeigt man die Wahrheit des aufgestellten Satzes, wenn

Digitized by Google

die Summanden des zweygliedrigen Factors was immer für Zahlen sind. Es ist demnach allgemein:

$$(m+n)\,A = mA + nA.$$

Was hier für zwey Theile erwiesen worden ist, läßt sich eben so für mehrere Theile erweisen. Es ist daher ganz allgemein:

$$(a+b+c+d+\ldots..)\,A = aA + bA + cA + dA + \ldots.$$

Ferner ist

$$2(A+B) = (A+B)+(A+B) = A+B+A+B = 2A+2B.$$

eben so

$$3(A+B) = (A+B)+(A+B)+(A+B)$$
$$= A+B+A+B+A+B = 3A+3B,$$

folglich allgemein:

$$m(A+B) = mA+mB.$$

Was hier für eine zweygliedrige Größe erwiesen worden ist, läßt sich eben so für jede mehrgliedrige Größe erweisen.

Sobald also der eine Factor die Summe mehrerer Theile, der andere Factor aber eine eingliedrige Zahl (Monom) ist, wird das Product gefunden, wenn man jeden einzelnen Theil der zusammengesetzten Größe mit dem andern Factor multiplizirt, und die Summe der so erhaltenen Producte macht.

Zusatz 1.

Das Product eines Factors in einen Theil des andern Faktors nennt man Theilproduct (Partialproduct).

Zusatz 2.

Setzt man in der Gleichung $(m+n)\,A = mA + nA$, wo m und n was immer für ganze Zahlen bezeichnen mögen, $n = p - m$, also $n + m = p$, so erhält man:

$$pA = mA + (p-m)\,A,$$

folglich;

$$pA - mA = (p-m)\,A, \text{ oder}$$
$$(p-m)\,A = pA - mA.$$

Diese Gleichung lehrt uns, daß eine Differenz $(p-m)$ durch irgend eine Größe A multiplizirt werde, wenn man vom Producte aus dem Multiplicand in den Minuend des andern Factors das Product aus dem Multiplicand in den Subtrahend des Multiplicators subtrahirt; oder:

Wenn ein Factor eines Productes die Differenz zweyer Größen ist, so ist das Product gleich der Differenz der Producte, welche ent-

Digitized by Google

stehen, wenn sowohl der Minuend als der Subtrahend des einen Factors mit dem andern Factor multiplizirt werden.

Auf dieselbe Wahrheit werden wir geleitet, wenn man in der obigen Gleichung $m(A+B)=mA+mB$ nur $B=C-A$ also $A+B=C$ setzt; denn dann ist

$$m.C=m.A+m(C-A), \text{ also}$$
$$mC-mA=m(C-A), \text{ oder}$$
$$m(C-A)=mC-mA.$$

Zusatz 3.

Es ist daher auch $(m+m+m)A=mA+mA+mA$, oder was dasselbe ist $(3m)A=3(mA)$ nähmlich 3 m Mahl $A=3$ Mahl mA. Eben so ist $(m+m+m+m)A=mA+mA+mA+mA$ oder $(4m)A=4(mA)$, und allgemein $(nm)A=n(mA)$, d. h. es ist einerley, ob man irgend eine Größe A zuerst mit einer unbenannten Zahl m, und das Product mit einer zweyten Zahl n multiplizirt, oder ob man dieselbe Größe A mit dem Producte der beyden unbenannten Zahlen multiplizirt.

Zusatz 4.

Eben so ist auch:

$$m(A+A)=mA+mA$$

oder $m(2A)=2(mA)$ ferner

$$m(A+A+A)=mA+mA+mA, \text{ oder}$$
$$m(3A)=3(mA). \text{ Mithin allgemein}$$
$$m(nA)=n(mA);$$

d. h. es ist einerley, ob man eine Größe A erst mit der unbenannten Zahl n und dann mit der unbenannten Zahl m multiplizirt, oder ob man zuerst mit m und dann mit n multiplizirt.

Soll demnach eine Größe A mit mehreren unbenannten Zahlen m, n, p, q..... multiplizirt werden, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Factoren genommen werden.

Zusatz 5.

Weil nach (Zus. 2) $(p-m)A=pA-mA$, so ist auch, wenn $A=B-C$ gesetzt wird,

Digitized by Google

$$(p-m)(B-C)=p(B-C)-m(B-C)$$
$$=(pB-pC)-(mB-mC)$$
$$=(pB+mC)-(pC+mB)$$

(nach §. 31. 12), nähmlich es ist

$$(p-m)(B-C)=(pB+mC)-(pC+mB);$$

d. h. das Product zweyer Differenzen ist gleich einer Differenz, deren Minuend die Summe zweyer Producte ist, die erhalten werden, wenn man die beyden Minuende und die beyden Subtrahende mit einander multiplizirt, und deren Subtrahend die Summe zweyer andern Producte ist, welche gefunden werden, wenn man den Minuend eines jeden Factors mit dem Subtrahenden des andern multiplizirt.

Zusatz 6.

Nach §. 31. 11. ist

$$(pB+mC)-(pC+mB)=(pB-mB)+(mC-pC),$$

folglich ist auch

$$(p-m)(B-C)=(pB-mB)+(mC-pC)=$$
$$=(pB-mB)-(-mC+pC),$$

nach §. 37. Zus. 1.

$$=(pB-mB)-(pC-mC)$$
$$=(p-m)B-(p-m)C,$$

nähmlich:

I. $(p-m)(B-C)=(p-m)B-(p-m)C$

und setzt man hier $p-m=n+q$; so erhält man

II. $(n+q)(B-C)=(n+q)B-(n+q)C.$

Diese beyden Gleichungen lehren demnach dasselbe wie die Gleichung im Zusatz 2.

Zusatz 7.

Es ist $(a+b-c+d-e-f)m$

$=[(a+b+d)-(c+e+f)]m$ (nach §. 33. Zus. 1.)

$=(a+b+d)m-(c+e+f)m$ (Zus. 2.)

$=(am+bm+dm)-(cm+em+fm)$

$=am+bm+dm-cm-em-fm$ (§. 38. Zus. 2.)

$=am+bm-cm+dm-em-fm,$

nähmlich $(a+b-c+d-e-f)m=$

$= am + bm - cm + dm - em - fm;$

d. h. ein zusammengesetzter Ausdruck wird mit einem einfachen multiplizirt, wenn man die Producte aus dem einfachen Factor in alle Theile des zusammengesetzten Factors neben einander setzt, und jedes einzelne Theilproduct additiv oder subtractiv nimmt, je nachdem der multiplizirte Theil des zusammengesetzten Factors additiv oder subtractiv ist.

Zusatz 8.

Es ist $(A - B + C - D + F) \times (a - b - c + d) =$
$= [(A + C + F) - (B + D)]\ [(a + d) - (b + c)]$ (§. 33. Zusatz 1.)

Setzen wir der Kürze wegen $A + C + F = M$, $B + D = N$, $a + d = m$, $b + c = n$, so erhalten wir $(M - N)(m - n) =$
$= (M - N)m - (M - N)n$ (nach Zus. 6. I.)
$= (Mm - Nm) - (Mn - Nn)$,
und wenn wir nun statt M und N wieder ihre Werthe setzen (substituiren), so ist

$[(A + C + F) - (B + D)]\ [(a + d) - (b + c)] =$
$= [(A + C + F)m - (B + D)m] - [(A + C + F)n - (B + D)n]$
$= [(Am + Cm + Fm - (Bm + Dm)] - [An + Cn + Fn - (Bn + Dn)]$
$= Am + Cm + Fm - Bm - Dm - [An + Cn + Fn - Bn - Dn]$
$= Am + Cm + Fm - Bm - Dm - An - Cn - Fn + Bn + Dn$

und nun statt m und n auch ihre Werthe gesetzt, erhalten wir:

$[(A + C + F) - (B + D)]\ [(a + d) - (b + c)] =$
$= A(a + d) + C(a + d) + F(a + d) - B(a + d) - D(a + d) -$
$- A(b + c) - C(b + c) - F(b + c) + B(b + c) + D(b + c)$
$= Aa + Ad + Ca + Cd + Fa + Fd - (aB + dB) - (aD + dD)$
$- (bA + cA) - (bC + cC) - (bF + cF) + bB + cB + bD + cD$
$= aA + dA + aC + dC + aF + dF - aB - dB - aD - dD$
$- bA - cA - bC - cC - bF - cF + bB + cB + bD + cD,$

oder weil es auf die Ordnung, in welcher die Theile neben einander gesetzt werden, nicht ankommt:

$(A - B + C - D + F)(a - b - c + d) =$

Digitized by Google

$$= \left\{ \begin{array}{l} aA - aB + aC - aD + aF \\ -bA + bB - bC + bD - bF \\ -cA + cB - cC + cD - cF \\ +dA - dB + dC - dD + dF \end{array} \right\}$$

Aus diesem Resultate sieht man sogleich, daß alle Theile des Multiplicands mit jedem einzelnen Theile des Multiplicators multiplizirt werden, und daß diejenigen Theilproducte, die aus zwey additiven oder aus zwey subtractiven Gliedern entstehen, additiv genommen, diejenigen Theilproducte aber, bey denen der eine Factor additiv und der andere subtractiv ist, immer subtractiv gesetzt werden müssen.

Beyspiel. $(8-5+7-6).(9-3) = (8-5+7-6).9$
$-(8-5+7-6)3,$
$= 8.9-5.9+7.9-6.9-8.3+5.3-7.3+6.3.$

§. 45.

1) Wenn eine und dieselbe Größe mehrmahlen als Factor gesetzt werden soll, so schreibt man sie nur ein Mahl, und setzt ihr oben rechts eine Zahl bey, die anzeigt, wie oft diese Größe als Factor zu setzen sey. Z. B. $a.a = a^2$, $a.a.a = a^3$, $b.b.b.b = b^4$, $b.b.b.b.b = b^5$, $ab.ab = ab.ab = aabb$ (§. 44. Zus. 4.) $= a^2b^2$,

$ab.ab.ab = aaabbb = a^3b^3$ u. s. w.

Diese Zahlen, welche anzeigen, wie oft eine Größe als Factor zu setzen sey, nennt man Exponenten. — Hat eine Größe keinen Exponenten, so wird immer die Einheit als Exponent darunter verstanden. So z. B. ist $a = a^1$, oder vollständig $a = +1.a^1$.

2) Die Producte, welche durch die wiederhohlte Multiplication einer Größe mit sich selbst erhalten werden, nennt man Würden oder Potenzen, und benennt sie nach ihren Exponenten. So z. B. ist a^2 die zweyte Potenz von a; a^3 die dritte Potenz von a, b^4 die vierte Potenz von b, und allgemein a^n die n^{te} Potenz von a.

Eben so ist $(a-b+c)^n$ die n^{te} Potenz von $(a-b+c)$ ꝛc.

Die Zahlen, durch deren Multiplication mit sich selbst die Potenzen erhalten werden, heißen die Wurzeln. Die zweyte Potenz heißt auch vorzugsweise Quadrat, die dritte Potenz heißt Würfel oder Cubus, und die vierte Potenz heißt Biquadrat. Also ist 5^2 das Quadrat von 5, 6^3 der Würfel von 6, und 2^4 das Biquadrat von 2. a^n wird gelesen: a in der n^{ten} Potenz, oder kurz a der n^{ten}, oder auch a mit dem Exponenten n.

Digitized by Google

Man benennt solche allgemeine, aus mehreren Buchstaben zusammengesetzte Größen auch nach der Summe ihrer Exponenten. Man sagt nähmlich, ein Ausdruck ist vom ersten, zweyten, dritten..... n^{ten} Grade, oder von 1, 2, 3.... n Dimensionen, wenn die Summe aller Exponenten 1, 2, 3 .... n Einheiten beträgt. So z. B. ist der Ausdruck a^2b^3 vom fünften Grade, oder er hat fünf Dimensionen, weil $2+3=5$, und $a^m b^n x^p$ ist ein Ausdruck vom $(m+n+p)^{ten}$ Grade.

Ist der Ausdruck ein zusammengesetzter, und sind alle Glieder desselben von demselben Grade, z. B. $(a^m+b^n c^{m-n} - a^{n-4} b^3 c)$, so sagt man, der ganze Ausdruck ist von diesem Grade, also hier vom m^{ten}.

§. 46.

Zwey einziffrige Zahlen mit einander zu multipliziren.

Die Producte aus je zwey einziffrigen Zahlen sind in folgender Tafel enthalten:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Man hat hier nähmlich die einziffrigen Zahlen in natürlicher Ordnung oben in einer horizontalen Reihe angeschrieben, und dann seitwärts zur Linken auch in einer Verticalreihe, so aber, daß die Eins der Horizontalreihe zugleich Eins der Verticalreihe wurde.

Die einzelnen Verticalreihen wurden erhalten, indem man die entsprechende Zahl in der ersten Horizontalreihe nach und nach ein, zwey, drey,..... neun Mahl zu sich selbst addirte.

Soll nun aus dieser Tafel das Product von je zwey einziffrigen Zahlen genommen werden, so suche man den einen Factor in der obern Horizontalreihe, und den andern in der ersten Verticalreihe zur Linken. Hierauf suche man dasjenige Fach auf, welches mit dem gegebenen

Digitized by Google

Factor in der obern Horizontalreihe in einerley Verticalreihe, und mit dem andern gegebenen Factor in der ersten Verticalreihe in einerley Horizontalreihe liegt; dieses Fach enthält das verlangte Product, wie aus der Einrichtung der Tafel von selbst erhellt. So z. B. ist $4.5=20$, $3.4=12$, $4.3=12$, $7.8=56$ u. s. w.

Zusatz.

Ist der eine Factor 1, so ist das Product gleich dem andern Factor; d. h. jede Zahl mit der Einheit multiplizirt, ist sich selbst gleich. $8.1=8$, $a.1=a$.

Ist aber einer der Factoren Null, so ist auch das Product gleich Null; z. B. $6.0=0$.

§. 47.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu multipliziren.

Man multiplizire jede Ziffer der mehrziffrigen Zahl von der Rechten gegen die Linke mit der gegebenen einziffrigen nach §. 46. Jedes dieser Producte schreibe man, wenn es einziffrig ist, sogleich an; ist es aber zweyziffrig, so schreibe man bloß die niedrigste Ziffer davon nieder, und die höhere addire man sogleich zum nächst folgenden Theilproducte. Das Product aus der höchsten Ziffer des Multiplicands in den gegebenen einziffrigen Factor aber wird immer ganz hingeschrieben.

Z. B. $6.476831=2860986$ indem man also spricht:

6 Mahl 1 ist 6,
6 Mahl 3 ist 18,
6 » 8 » 48, und 1 ist 49,
6 » 6 » 36, und 4 ist 40,
6 » 7 » 42, und 4 ist 46,
6 » 4 » 24, und 4 ist 28.

Denn es ist:

$$6\times 476831 = 476831 + 476831 + 476831 + 476831 + 476831 + 476831,$$

und durch Addition erhält man 2860986 wie oben.

Es ist $6\times 476831 = 6(\overset{5}{4}+\overset{4}{7}+\overset{3}{6}+\overset{2}{8}+\overset{1}{3}+\overset{0}{1})$

$$= \overset{5}{24}+\overset{4}{42}+\overset{3}{36}+\overset{2}{48}+\overset{1}{18}+\overset{0}{6},$$

(§. 44 und 46).

Digitized by Google

$$= \left\{ \begin{array}{r} 2400000 \\ 420000 \\ 36000 \\ 4800 \\ 180 \\ 6 \end{array} \right\}$$

$$= 2860986 \text{ wie vorhin.}$$

Zusatz 1.

Es ist $8.10 = 80 = \overset{1}{8} = 8.10^1$

$8.100 = 800 = \overset{2}{8} = 8.10.10 = 8.10^2$

$8.1000 = 8000 = \overset{3}{8} = 8.10.10.10 = 8.10^3$

$8.10000 = 80000 = \overset{4}{8} = 8.10.10.10.10 = 8.10^3.10 = 8.10^4$

$8.10^n = \overset{n}{8}$, d. i. = 8 Einheiten der n^{ten} Ordnung; d. h. eine Zahl wird mit 10, 100, 1000 .... 10^n (d. i. mit einer Potenz von 10) multiplizirt, wenn man der gegebenen Zahl 1, 2, 3.....n Nullen anhängt.

Zusatz 2.

Da nach §. 44. Zus. 3. $A(B.C) = C(A.B)$; so sieht man, daß das Product BC mit einer Zahl A multiplizirt werde, oder daß es A Mahl größer werde, wenn man den einen Factor C oder B mit A multiplizirt, oder A Mahl größer nimmt. Weil nun eine Zahl mit 10, 100, 1000 multipliziren nichts anders heißt, als jener Zahl 1, 2, 3.... Nullen anhängen, so ist einleuchtend, daß wenn man dem einen Factor eines Productes 1, 2, 3 Nullen anhängt, man auch dem Producte eben so viele Nullen anhängen müsse. Z. B. $3.4 = 12$, so ist auch $3.40 = 120$, $3.400 = 1200$, $3.4000 = 12000$ u. s. w. und allgemein $3.\overset{n}{4} = \overset{n}{12}$.

§. 48.

Zwey mehrziffrige Zahlen mit einander zu multipliziren.

Man schreibe die beyden mehrziffrigen Zahlen nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit unter einander, und ziehe eine horizontale Linie. Dann multiplizire man nach dem vorigen Paragraphe mit jeder Ziffer des untern Factors alle Ziffern des obern, und schreibe die so erhalte-

Digitized by Google

nen Theilproducte so unter einander, daß immer die niedrigste Ziffer derselben unter die gleichnahmigen Ziffern der beyden Factoren zu stehen komme, endlich addire man alle diese Theilproducte nach §. 25. 4.; so ist die gefundene Summe das verlangte Product. Es sey z. B. 57638 zu multipliziren mit 945. Man erhält also:

$$\begin{array}{r} 57638 \\ 945 \\ \hline 288190 \\ 230552 \\ 518742 \\ \hline \text{Product} = 54467910 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} 57638 \\ 945 \\ \hline 518742 \\ 230552 \\ 288190 \\ \hline 54467910 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 57638 \\ 945 \\ \hline 230552 \\ 288190 \\ 518742 \\ \hline 54467910 \end{array}$$

Denn (nach §. 47) findet man

das erste Theilproduct $= 5 . 57638 = 288190$

» zweyte » $= \overset{1}{4} . 57638 = 230552$

» dritte » $= \overset{2}{9} . 57638 = 518742$

folglich ist $945 \times 57638 = \left\{ \begin{array}{r} 288190 \\ 230552 \\ 518742 \end{array} \right\} = 54467910.$

Von der Richtigkeit der Auflösung kann man sich also überzeugen.

Es ist: $945 \times 57638 = (\overset{2}{9} + \overset{1}{4} + 5) . 57638 =$

$= \overset{2}{9} . 57638 + \overset{1}{4} . 57638 + 5 . 57638$ (§. 44.)

$= 518742 + 230552 + 288190 = 54467910$

was zu erweisen war.

Zusatz 1.

Man sieht aus dieser Darstellung, daß es gleichgültig sey, in welcher Ordnung man mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators den ganzen Multiplicand multiplizirt.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Kommen in der Mitte des Multiplicators Nullen vor, so werden diese übersprungen, z. B. wenn man 8306495 × 304009 sucht, so findet man das Product nach folgender Rechnung:

8306495
304009
74758455
33225980
24919485
2525249238455.

Zusatz 3.

Weil 138 × 24 = 3312; so ist auch 138000 × 24 = 3312000
oder $138^{3}.24 = 3312^{3} = 3312000$
138000 × 2400 = 331200000 oder
$138^{3}.24^{2} = 3312^{(3+2)} = 3312^{5} = 331200000.$

Man sieht demnach, wenn einer oder wenn beyde Factoren sich rechts mit einer oder mehreren auf einander folgenden Nullen endigen, man die beyden Zahlen so mit einander multiplizirt, als wären die Nullen gar nicht vorhanden, und daß man dann nur dem fehlenden Producte rechts so viele Nullen anzuhängen braucht, als in beyden Factoren vorhanden sind.

Zusatz 4.

Hat der Multiplicator die Ziffer 1, so läßt man gleich den Multiplicand als erstes Theil-Product stehen, und schreibt die folgenden Theil-Producte nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit darunter.

Beyspiele: 1) 470836 × 31
1412508
14595916.

2) 837054 × 12
1674108
10044648.

3) 9064073 × 214
18128146
36256292
1939711622

oder

9064073 × 214
36256292
18128146
1939711622.

Zusatz 5.

Ist eine Ziffer (a) des Multiplicators ein Vielfaches einer andern Ziffer (b) desselben, z. B. a = m . b, so kann man auch das aus b entstandene Theil-Product mit der Zahl m (der Zahl, welche anzeigt, das Wievielfache a von b sey) multiplizíren, um das der Ziffer a entsprechende Theil-Product zu finden. Z. B.

128 × 647083
1294166
5176664
82826624.

Man läßt nähmlich hier den Multiplicand 647083 gleich als erstes Theil-Product stehen, multiplizirt ihn mit 2, rückt das Product um eine Stelle rechts heraus, und multiplicirt dann dieses Product, welches das Doppelte des Multiplicands ist, mit 4, um das Achtfache des Multiplicands zu erhalten.

Zusatz 6.

Es ist überflüssig, das letzte Theil-Product anzusetzen, da man dasselbe am gehörigen Orte gleich einaddiren kann. Z. B.

128 × 647083
1294166
82826624.

Man multiplizirt nähmlich das aus 2 entstandene Theil-Product durch 4, rückt um eine Stelle heraus, und addirt die folgenden Ziffern des zu suchenden Theil-Productes gleich zu den gleichnahmigen Ziffern der übrigen Theil-Producte.

Eben so 63104 × 83709406 . . . A
334837624 . . B
25112821 8 C
5282398356224.

Man läßt hier den Multiplicand A gleich als erstes Partial-Product für die Ziffer 1 des Multiplicators stehen, dann multiplizirt man A mit 4, und rückt dieses Theil-Product rechts um zwey Stellen hinaus, hierauf multiplizire man A mit 3, und setze die erste Ziffer des Theil-Productes C unter die Stelle der Tausende, weil der Multiplicator 3 den Local-Werth Tausend hat. Endlich addirt man die drey Theil-Producte A, B und C bis einschlüssig zur Stelle der Tausende, und

Digitized by Google

addirt das Sechsfache von A, oder das Doppelte von C (welches das Dreyfache von A ist), von der Stelle der Zehntausende angefangen, ein, indem man spricht: 2 Mahl 8 ist 16 und 1 ist 17, und 1 ist 18, und 3 ist 21, und 4 ist 25; 2 Mahl 1 ist 2 und 2 ist 4, und 2 sind 6, und 8 sind 14, und 9 sind 23; u. s. w.

Hieraus geht von selbst die Regel hervor, wie eine mehrzifferige Zahl kurz durch 11 multiplizirt werden kann. Z. B.

$$\frac{11.745638}{=8202018.}$$

§. 49.

1) Wenn man einen zusammengesetzten Ausdruck hat, und es haben alle Glieder desselben einen Factor gleich, oder gemeinschaftlich, so kann man denselben herausnehmen, und den gegebenen Ausdruck als ein Product darstellen. So z. B. ist

$ab + ac + ad = a(b+c+d)$. Eben so:

$ab - ac + ad - am = a(b-c+d-m)$

$axy - bxy + cxyz - dnxy = xy(a-b+cz-dn)$

$3.4.5 + 3.4.7 + 2.3 - 2.3.9 = 3(4.5+4.7+2-2.9)$

$4.7.11 - 5.7.11.13 - 7.11 + 6.7.11.19 =$
$= 7.11(4-5.13-1+6.19)$.

§. 50.

Einige Rechnungsvortheile bey der Multiplication.

Wenn man die Factoren einer Zahl, welche mit einer andern gegebenen Zahl multiplizirt werden soll, kennt, so ist es oft vortheilhaft, mit dieser zu multipliziren.

Beyspiele: 1. Man sucht 72.4093208. Weil $72 = 8.9$, so multiplizire man zuerst den Multiplicand mit 8, und das erhaltene Product mit 9, oder umgekehrt. Die Rechnung steht demnach also:

$$\begin{array}{r} 4093208 \\ \hline 32745664 \times 8 \\ \hline 294710976 \times 9 \end{array}$$

2. Man verlangt 135×732084. Weil $135 = 3.5.9$; so multiplizirt man 732084 zuerst mit 3, das erhaltene Resultat mit 5, und endlich dieses Product mit 9. — Übrigens können die einzelnen Fac-

Digitized by Google

toren auch in jeder andern Ordnung genommen werden. Es ist also die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{r} 732084 \\ \hline 2196252 \\ \hline 10981260 \\ \hline 98831340 \end{array} \times \begin{array}{l} (3 \\ (5 \\ (9 \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{r} 732084 \\ \hline 6588756 \\ \hline 3294378o \\ \hline 98831340 \end{array} \begin{array}{l} (9 \\ (5 \\ (3 \end{array}$$

Am zweckmäßigsten ist es immer, mit den größern Factoren des Multiplicators zuerst zu multipliziren.

II. Da $9 = 10 - 1 = 10^1 - 1$

$99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$

$999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1$

$9999 = 10000 - 1 = 10^4 - 1$

d. h. da jede mit lauter Neunern geschriebene Zahl die Einheit der so vielsten Ordnung ist, als die Anzahl der Ziffern anzeigt, weniger 1; so ist leicht einzusehen, daß man kurz eine gegebene Zahl mit einer solchen aus lauter Neunern bestehende Zahl multiplizirt, wenn man derselben rechts so viele Nullen anhängt, mit wie vielen Neunern der Multiplicator geschrieben ist, und von der so erhaltenen Zahl den umgeänderten Multiplicand abzieht. Es sey z. B. 99×47368 zu suchen, so erhält man

$$\begin{array}{r} 4736800 \\ 47368 \\ \hline 4689432 \end{array}$$

denn es ist $99 \times 47368 = (100 - 1)\ 47368 = 100 \times 47368 - 47368$
$= 4736800 - 47368.$

In der Folge werden wir bey solchen Multiplicationen so verfahren: Wir denken uns dem Multiplicand die erforderliche Anzahl von Nullen angehängt, oder hängen sie wirklich an, und subtrahiren von der so erhaltenen Zahl den ungeänderten Multiplicand gleich, ohne ihn selbst anzuschreiben. Z. B.

$$\begin{array}{r} 999 \times 635427... \\ \hline \text{Prod.} = 634791573. \end{array}$$

Digitized by Google

III. Die Zahl, welche zu einer gegebenen Zahl addirt werden muß, um die nächst höhere decadische (zehntheilige) Einheit zu erhalten, nennt man die arithmetische oder auch decadische Ergänzung (Complément). So z. B. ist

2 die arithmetische Ergänzung von 98, weil $98+2=100$,

3 die arithmetische Ergänzung von 997, weil $997+3=1000$ u. s. w.

Soll nun eine gegebene Zahl durch eine andere, deren arithmetische Ergänzung eine einzifferige Zahl ist, multiplizirt werden, so hänge man dem Multiplicand rechts so viele Nullen an, mit wie vielen Ziffern der Multiplicator geschrieben ist, und ziehe von der so erhaltenen Zahl das Product aus dem Multiplicand in die arithmetische Ergänzung des Multiplicators ab. Z. B.

$$\begin{aligned} 996 \times 743087 &= (1000-4)\ 743087 \\ &= 1000 \cdot 743087 - 4 \cdot 743087 \\ &= 743087000 - 4 \cdot 743087 \end{aligned}$$

also $\dfrac{996 \times 743087\ldots}{470114652} \cdot 4$

indem man das Product $4 \cdot 743087$ gleich abzieht, ohne es anzuschreiben.

§. 51.

Wenn allgemeine Ausdrücke mit einander zu multipliziren sind, so hat man folgende Regeln zu beobachten:

I. Haben beyde Factoren einerley Zeichen, so wird das Product positiv; haben aber die beyden Factoren verschiedene Zeichen, so wird das Product negativ; nähmlich es ist (§. 44. Zus. 8.)

$$\left.\begin{array}{l}(+a).(+b) = +ab \\ (-a).(-b) = +ab\end{array}\right\} \text{ oder } (\pm a).(+b) = +ab = ab$$

$$\left.\begin{array}{l}(+a).(-b) = -ab \\ (-a).(+b) = -ab\end{array}\right\} \text{ oder } (\pm a).(\mp b) = -ab.$$

II. Die Coeffizienten werden mit einander multiplizirt, und die verschiedenen Buchstabengrößen werden ohne Zeichen neben einander gesetzt, z. B. $mA \times nB = (mn)\,AB = mnAB$ (§. 44. Zus. 3).

Eben so ist $4a \times 3b = 4.3ab = 12ab$ und

$$-7ab \times 6cd = -42abcd.$$

III. Kommt dieselbe Buchstabengröße mehrmahls als Factor vor,

Digitized by Google

so schreibt man sie nur ein Mahl, und gibt ihr die Summe der Exponenten der Factoren zum Exponenten. So z. B. ist

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Denn es ist $a . a = a^1 . a^1 = a^2 = a^{1+1}$ (§. 45)

$$a^2 . a = a^2 . a^1 = aaa = a^3 = a^{2+1}$$

$$a^3 . a^2 = aaa . aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$$

und allgemein: $a^m . a^n = a^{m+n}$.

IV. Ist der eine Factor ein zusammengesetzter Ausdruck (Polynom), der andere aber ein einfacher, oder ein eingliederiger (Monom); so müssen alle Theile des zusammengesetzten Ausdrucks mit dem einfachen multiplizirt werden, und dann ist die Summe dieser Theil-Producte das verlangte Haupt-Product (§. 44. Zus. 7). Sind beyde Factoren zusammengesetzte Ausdrücke, so werden alle Theile des einen Factors mit allen Theilen des andern Factors multiplizirt, und die erhaltenen Theil-Producte addirt (§. 44. Zus. 8). Diese Regeln wollen wir durch folgende Beyspiele erläutern:

1. $-a \times -b = +ab$

   $-a \times -b \times -c = +abc \times -c = -abc$

   $-a \times -b \times -c \times -d = -abc \times -d = +abcd$

   $-a \times -b \times -c \times -d \times -e = +abcd \times -e = -abcde.$

Aus diesen Beyspielen sehen wir, daß ein Product positiv oder negativ werde, je nachdem die negativen Factoren in gerader oder ungerader Anzahl vorkommen.

2. $12ab \times 8cd = 96abcd$
3. $25a^2 \times -7a = -175a^{2+1} = -175a^3$
4. $-43a^3b \times 10ab^4 = -430a^{3+1}b^{1+4} = -430a^4b^5$
5. $-82a^4b^2c^3 \times -13ab^4c^2d = 1066a^{4+1}b^{2+4}c^{3+2}d$
   $= 1066a^5b^6c^5d.$
6. $24a^mb^n \times 12a^mb^p = 288a^{m+m}b^{n+p} = 288a^{2m}b^{n+p}$
7. $15a^{3m}b^{p-n}c^{n-3} \times -8a^mb^{n-p}c^{12-n}$
   $= -120a^{3m+m}b^{p-n+n-p}c^{n-3+12-n}$
   $= -120a^{4m}b^{p-p}c^9$
8. $(4a^3b^2 - 5a^2b + 7b^3) \times -5a^2b^2$
   $= -20a^{3+2}b^{2+2} + 25a^{2+2}b^{1+2} - 35a^2b^{3+2}$
   $= -20a^5b^4 + 25a^4b^3 - 35a^2b^5.$
9. Man multiplizire $(a+2b-3c)$ mit $(2a-3b+c)$.

Digitized by Google

Es ist

$$(a+2b-3c)(2a-3b+c) = (a+2b-3c)2a-(a+2b-3c)3b + (a+2b-3c)c$$
$$= 2a^2+4ab-6ac-3ab-6b^2+9bc+ac+2bc-3c^2$$
$$= 2a^2+(4ab-3ab)+(-6ac+ac)-6b^2+(9bc+2bc)-3c^2$$
$$= 2a^2+ab+(-5ac)-6b^2+11bc-3c^2$$
$$= 2a^2+ab-5ac-6b^2+11bc-3c^2.$$

In der Folge werden wir bey solchen Multiplicationen die Rechnung also stellen:

$$\begin{array}{r} a+2b-3c \\ 2a-3b+c \\ \hline 2a^2+4ab-6ac \\ -3ab \qquad -6b^2+9bc \\ +ac \qquad +2bc-3c^2 \\ \hline \text{Prod.} = 2a^2+ab-5ac-6b^2+11bc-3c^2. \end{array}$$

Wir schreiben nähmlich die beyden Factoren wie bey bestimmten Zahlen unter einander, ziehen eine horizontale Linie, und schreiben die einzelnen Theil-Producte so unter einander, daß die etwa vorkommenden gleichartigen (homogenen) Glieder genau unter einander zu stehen kommen. Endlich reduciren wir die Summe aller Theile nach den (§. 39. 3.) aufgestellten Regeln.

10) Man multiplizire $(3-2x+5x^2-7x^3)$ mit $(2+3x-4x^2)$

$$\begin{array}{r} 3-2x+5x^2-7x^3 \\ 2+3x-4x^2 \\ \hline 6-4x+10x^2-14x^3 \\ 9x-6x^2+15x^3-21x^4 \\ -12x^2+8x^3-20x^4+28x^5 \\ \hline \text{Prod.} = 6+5x-8x^2+9x^3-41x^4+28x^5. \end{array}$$

11) Man multiplizire $(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)$ mit $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$$\begin{array}{r} a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ \hline a^7-4a^6b+6a^5b^2-4a^4b^3+a^3b^4 \\ -3a^6b+12a^5b^2-18a^4b^3+12a^3b^4-3a^2b^5 \\ 3a^5b^2-12a^4b^3+18a^3b^4-12a^2b^5+3ab^6 \\ -a^4b^3+4a^3b^4-6a^2b^5+4ab^6-b^7 \\ \hline \text{Prod.} = a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7. \end{array}$$

Digitized by Google

12) Man multiplizire:

$$(a^5 + a^4x + a^3x^2 + a^2x^3 + ax^4 + x^5) \text{ mit } (a^3 - a^2x + ax^2 - x^3)$$

$$a^5 + a^4x + a^3x^2 + a^2x^3 + ax^4 + x^5$$

$$a^3 - a^2x + a^2x^2 - x^3$$

$$a^8 + a^7x + a^6x^2 + a^5x^3 + a^4x^4 + a^3x^5$$

$$- a^7x - a^6x^2 - a^5x^3 - a^4x^4 - a^3x^5 - a^2x^6$$

$$a^6x^2 + a^5x^3 + a^4x^4 + a^3x^5 + a^2x^6 + ax^7$$

$$- a^5x^3 - a^4x^4 - a^3x^5 - a^2x^6 - ax^7 - x^8$$

$$a^8 \quad + a^6x^2 \quad - a^2x^6 \quad - x^8$$

Es ist nähmlich das verlangte Product $= a^8 + a^6x^2 - a^2x^6 - x^8$.

Dieses Product ließe sich auch so darstellen:

$$(a^8 + a^6x^2) - (a^2x^6 + x^8) = (a^6 . a^2 + a^6x^2) - (a^2x^6 + x^6x^2)$$
$$= a^6(a^2 + x^2) - x^6(a^2 + x^2) = (a^6 - x^6)(a^2 + x^2)$$

Anmerkung. Wenn man zwey mehrgliederige Ausdrücke mit einander zu multipliziren hat, so ist es sehr zweckmäßig, die einzelnen Glieder derselben so an einander zu reihen, daß in jedem der beyden Factoren das Glied, welches irgend einen in allen oder in den meisten Gliedern vorkommenden Buchstaben mit dem größten Exponenten enthält, am weitesten zur Linken zu stehen komme; auf dieses Glied läßt man jenen Theil folgen, in welchem eben jener Buchstabe mit dem nächst kleinern Exponenten vorkommt u. s. w. und endlich folgt das Glied (oder die Glieder), welches jenen Buchstaben gar nicht enthält. Sind die einzelnen Glieder eines zusammengesetzten Ausdruckes auf diese Weise an einander gereiht, so sagt man, der Ausdruck sey nach den fallenden Potenzen jenes Buchstaben geordnet; kehrt man aber die Ordnung der Glieder um, so sagt man dann, der Ausdruck sey nach den steigenden Potenzen jenes Buchstaben geordnet. So z. B. sind die beyden Factoren im Beyspiel 11) nach den fallenden Potenzen des Buchstaben a, oder nach den steigenden Potenzen des Buchstaben b geordnet. Eben so sind die Factoren in den Beyspielen 10) und 12) nach den steigenden Potenzen von x, oder im letzten Beyspiele nach den fallenden Potenzen von a geordnet.

Durch das Ordnen der Factoren erreicht man den Vortheil, daß man auch das Haupt-Product gleich geordnet erhält, und daß man die Reduction viel leichter machen kann, weil, wenn die Theil-Producte immer um ein Glied gegen die Rechte eingerückt werden, die gleichartigen Glieder sogleich unter einander zu stehen kommen.

Digitized by Google

§. 52.

Es ist $a^n \cdot a^n = a^{n+n} = a^{1\,n}$ oder $(a^n)^1 = a^{1\,n}$

$a^n \cdot a^n \cdot a^n = a^{n+n+n} = a^{3\,n}$ » $(a^n)^3 = a^{3\,n}$

$a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n = a^{n+n+n+n} = a^{4\,n}$ » $(a^n)^4 = a^{4\,n}$

und allgemein $(a^n)^m = a^{n\,m}$,

d. h. wenn man eine Zahl zu einer Potenz, und diese wieder zu einer andern Potenz erhebt, so ist das eben so viel, als wenn man die erste Zahl zu einer Potenz erhoben hätte, deren Exponent dem Producte der beyden vorigen gleich ist; oder wie man sich noch auszudrücken pflegt: Eine Größe wird auf irgend eine Potenz erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Potenz-Exponenten multiplizirt.

So z. B. ist $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$; denn

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$; denn $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$ oder

$(2^3)^2 = (2.2.2)^2 = 2.2.2 \times 2.2.2 = 2^6$.

Zusatz.

Es ist $10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10000$

. . . . .

und allgemein 10^n gleich der Einheit mit n rechts folgenden Nullen; demnach ist $(10^n)^m = 10^{m\,n}$ = der Einheit mit mn Nullen, d. i. der Einheit mit m Mahl so vielen Nullen, als die Wurzel 10^n hat.

§. 53.

Ein Product von zwey oder mehreren Factoren wird auf irgend eine Potenz erhoben, wenn man jeden Factor auf die angezeigte Potenz erhebt.

So z. B. ist $(ab)^2 = (ab)\,(ab) = ab \cdot ab = aabb = a^2 b^2$

$(ab)^3 = (ab)^2\,(ab)^1 = a^2 b^2 \cdot ab = a^3 \cdot b^3$

$(ab)^4 = (ab)^3\,(ab) = a^3 b^3 \cdot ab = a^4 b^4$

. . . . . .

und allgemein $(ab)^n = a^n b^n$.

Digitized by Google

Also ist $(a^m b^n)^p = (a^m)^p (b^n)^p = a^{mp} b^{np}$ (§. 53).

Ferner ist $(A^m B^n C^p D^q \ldots)^m = [A^m (B^n C^p D^q \ldots)]^n =$
$= A^{mn} (B^n C^p D^q \ldots)^n = A^{mn} [B^n (C^p D^q \ldots)]^n =$
$= A^{mn} B^{nn} (C^p D^q \ldots)^n = A^{mn} B^{nn} C^{pn} D^{qn} \ldots$

Zusatz 1.

Es ist daher auch $(a.a)^m = a^m . a^m = (a^m)^2$ d. i. $(a^2)^m = (a^m)^2$ eben so

$$(a.a.a)^m = a^m . a^m . a^m = (a^m)^3$$

d. i. $(a^3)^m = (a^m)^3$ und demnach allgemein: $(a^n)^m = (a^m)^n$, d. h. es ist gleichgültig, ob man eine Zahl a zuerst auf die n^{te} Potenz erhebt, und dieses Resultat auf die m^{te}, oder ob man die Zahl a erst auf die m^{te} und dann auf die n^{te} Potenz erhebt. Z. B.

$$(2^3)^2 = (2.2.2)^2 = (8)^2 = 8.8 = 64$$

und $$(2^2)^3 = (2.2)^3 = (4)^3 = 4.4.4 = 16.4 = 64.$$

Man hätte die Gültigkeit dieser Regel auch so erweisen können: Es ist $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, und $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, nun ist aber $n.m = m.n$, mithin auch $a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$, d. i. $(a^n)^m = (a^m)^n$.

Zusatz 2.

Es ist $(A.10^n)^m = A^m . 10^{mn}$, d. h. eine Zahl $A.10^n$, welche sich mit einer oder mehreren Nullen rechts endigt, wird potenzirt, wenn man die Zahl A ohne Nullen auf die gegebene Potenz m erhebt, und dem gefundenen Resultate m Mahl so viele Nullen anhängt, als die gegebene Wurzel $(A.10^n)$ Nullen hat. Z. B.

$$(80)^2 = (8.10)^2 = 8^2 . 10^2 = 64 . 100 = 6400 = 64^2$$

oder $$(80)^2 = (\overset{1}{8})^2 = \overset{2}{6}\overset{12}{4} = 64.$$

Eben so $(500)^3 = (5.100)^3 = (5.10^2)^3 = 5^3 . 10^6$

$$= 125 . 1000000 = 125000000 = \overset{6}{125},$$

oder $$(500)^3 = (\overset{2}{5})^3 = \overset{2}{5}\overset{6}{3} = 125$$

und $$(5000)^4 = (5.10^3)^4 = 5^4 . 10^{12} = 625 . 10^{12} = \overset{1\,.\,.}{625},$$

oder $$(5000)^4 = (\overset{3}{5})^4 = \overset{3}{5}\overset{12}{4} = 625.$$

Zusatz 3.

Es ist also $\overset{n}{3} = 3 . 10^n$ und allgemein $\overset{n}{a} = a . 10^n$, d. h. eine Zahl, über deren niedrigste bedeutende Ziffer man den Zeiger (Ord-

Digitized by Google

nungs-Exponenten) n schreibt, wird durch 10^n multiplizirt. Es läßt sich demnach die Zahl 64578 so darstellen:

$$64578 = (\overset{4}{6} + \overset{3}{4} + \overset{2}{5} + \overset{1}{7} + 8) = 6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + \\ + 7 \cdot 10 + 8,$$

und allgemein, wenn die Buchstaben a, b, c, ... r, s, t lauter einziffrige Zahlen bedeuten, so ist

$$\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b} + \overset{n-3}{c} + \overset{n-4}{d} + ... + \overset{2}{r} + \overset{1}{s} + t = \\ = a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + c \cdot 10^{n-3} + d \cdot 10^{n-4} + ... + \\ + r \cdot 10^2 + s \cdot 10 + t$$

die allgemeine Form einer Zahl, die mit n Ziffern geschrieben ist, oder das Sinnbild aller ganzen Zahlen.

Zusatz 4.

Da $1^m = 1$, d. h. da die Einheit auf was immer für eine Potenz erhoben, wieder die Einheit ist, und jede Zahl mit 1 multiplizirt, sich selbst zum Producte gibt, so kann man sich auch jede Zahl mit einer beliebigen Potenz der Einheit multiplizirt vorstellen. Z. B.

$$a = 1^m a = 1 . a.$$

§. 54.

Eine gegebene Größe quadriren, oder zum Quadrat (zur zweyten Potenz) erheben, heißt sie zwey Mahl als Factor setzen, oder sie ein Mahl mit sich selbst multipliziren. Nähmlich: $(A)^2 = AA$.

Zusatz 1.

Also wird das Quadrat einer jeden Zahl gefunden, wenn man sie mit sich selbst multiplizirt. Z. B.

$$12^2 = 12 . 12 = 144, \quad 25^2 = 25 . 25 = 625.$$

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind aus dem Einmahleins bekannt.

Zusatz 2.

Weil $10^2 = 100$, und $(10^m)^2 = 10^{2m}$ und $(A . 10^m)^2 = A^2 . 10^{2m}$, so wird eine gegebene Zahl $(A . 10^m)$, die sich mit m Nullen rechts endigt, aufs Quadrat erhoben, wenn man sie ohne die Nullen quadrirt, und dem gefundenen Producte zwey Mahl so viele Nullen anhängt, als die Wurzel $(A . 10^m)$ hatte. Dieß pflegt man kurz so auszudrücken: jede Nulle in der Wurzel gibt im Quadrate zwey Nullen.

Digitized by Google

Zusatz 3.

Es ist $(A)^2 = +A \times +A = +A^2$ und $(-A)^2 = -A \times -A = +A^2$, folglich allgemein $(\pm A)^2 = +A^2$, d. h. das Quadrat einer jeden Zahl, sie mag positiv oder negativ seyn, ist positiv.

*) Können wir gleichwohl durch die gewöhnliche Multiplication das Quadrat einer jeden Zahl, so viel Ziffern sie auch immer haben mag, finden; so ist es doch nothwendig, eine besondere Regel abzuleiten, um in der Folge die umgekehrte Aufgabe: »Aus einer gegebenen Quadratzahl die Wurzel, d. i. diejenige Zahl, durch deren Multiplication mit sich selbst die gegebene Zahl entstanden ist,« leichter lösen zu können. Zu diesen besonderen Regeln sollen uns die folgenden Paragraphen leiten.

§. 55.

Das Quadrat einer zwey- oder mehrgliedrigen Größe zu finden.

I. Eine jede zweytheilige Größe läßt sich durch $A+B$ und ihr Quadrat durch $(A+B)^2$ ausdrücken; hieraus erhalten wir die Gleichung:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B),$$

und wenn wir die angezeigte Multiplication wirklich verrichten, und gleich reduciren

$$1) \quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Setzen wir in dieser Gleichung B negativ, so erhalten wir

$$(A+(-B))^2 = A^2 + 2A(-B) + (-B)^2,$$

oder

$$2) \quad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Nehmen wir die Gleichungen 1 und 2 zusammen, so erhalten wir die allgemeine Formel *).

$$3) \quad (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2.$$

Diese Gleichung enthält folgende Wahrheit: »Das Quadrat einer zweytheiligen Größe besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theils; 2) aus dem doppelten Producte beyder Theile, und 3) aus dem Quadrate des zweyten Theils;« oder auch: Wenn eine zweygliedrige Größe (Binom) quadrirt wird, so gibt das erste Glied sein eigenes Quadrat, das zweyte Glied aber gibt zwey Stücke, nähmlich: 1) das doppelte Product aus ihm in das erste Glied, und 2) sein eigenes Quadrat.

*) Unter Formel versteht man einen allgemeinen Ausdruck, welcher irgend eine mathematische Wahrheit bildlich darstellt.

Digitized by Google

Z. B. Weil $37 = 30 + 7$, also $30 = A$, $7 = B$ in Vergleich mit der allgemeinen Formel:

so ist: $37^2 = (30+7)^2 = 30^2 + 2.30.7 + 7^2$
$= 900 + 420 + 49 = 1369.$

Schreiben wir diese Summanden wie gewöhnlich unter einander; so steht die Rechnung wie folgt:

α)		β)	
	$30^2 = 900$		$3^2 = 9$
	$2.30.7 = 420$		$2.3.7 = 42$
	$7^2 = 49$		$7^2 = 49$
	$37^2 = 1369$		$37^2 = 1369.$

Aus diesem Beyspiele sehen wir, daß es nicht nothwendig ist, die Nullen mit anzuschreiben, weil der Localwerth der einzelnen Ziffern dadurch berücksichtiget wird, daß man die der Ordnung nach gefundenen Bestandtheile so unter einander setzt, daß man immer um eine Stelle rechts hinausrückt.

II. Ferner ist $(A+B+C)^2 = [(A+B)+C]^2 =$
$= (A+B)^2 + 2(A+B).C + C^2$
nach der eben gegebenen Regel, mithin ist auch, wenn man die angezeigten Rechnungen durchführt:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + 2AB + B^2 + 2AC + 2BC + C^2.$$

Diese Gleichung lehrt, daß das Quadrat einer dreytheiligen Größe (Trinom's) aus dem Quadrate eines jeden Theiles, und aus den doppelten Producten je zweyer Theile bestehe, welche Regel sich auch so ausdrücken läßt: das erste Glied gibt sein eigenes Quadrat, und jedes folgende Glied gibt zwey Stücke, nähmlich: 1) das doppelte Product aus ihm in den vorhergehenden Theil, oder in die Summe der vorhergehenden Theile, wenn man schon bis zum dritten oder einem noch spätern Gliede gekommen ist, und 2) sein eigenes Quadrat; denn die obige Gleichung läßt sich auch auf folgende Art darstellen:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + 2AB + B^2 + 2(A+B)C + C^2$$
$$= A^2 + [2AB + B^2] + [2(A+B)C + C^2].$$

III. Dieselbe Regel ist auch noch gültig, wenn der gegebene Ausdruck mehr als drey Glieder hat; denn so ist z. B.

$$(A+B+C+D)^2 = [(A+B+C)+D]^2 =$$
$$= (A+B+C)^2 + 2(A+B+C)D + D^2$$
$$= A^2 + [2AB + B^2] + [2(A+B)C + C^2]$$
$$+ [2(A+B+C)D + D^2]$$

Digitized by Google

$$= A^2 + 2AB + B^2 + 2AC + 2BC + C^2 + 2AD + 2BD + 2CD + D^2$$
$$= A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD.$$

Beyspiele.

1. $(2a - 3m)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3m) + (-3m)^2$
$= 4a^2 - 12am + 9m^2$ (§. 53.)

2. $(a^3b + m^2n^3)^2 = (a^3b)^2 + 2(a^3b)(m^2n^3) + (m^2n^3)^2$
$= a^6b^2 + 2a^3bm^2n^3 + m^4n^6$

3. $(3a^2 - 2x^3 + y^4)^2 = (3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 2x^3 + (-2x^3)^2$
$+ 2(3a^2 - 2x^3)y^4 + (y^4)^2$
$= 9a^4 - 12a^2x^3 + 4x^6 + 6a^2y^4 - 4x^3y^4 + y^8.$

4. $(x^m - y^n - z^p)^2 = x^{2m} - 2x^m y^n + y^{2n} - 2x^m z^p$
$+ 2y^n z^p + z^{2p}.$

5. $(a^{m-n} - b^2 + a^n b^{m-n})^2 = a^{2(m-n)} - 2a^{m-n}b^2 + b^4$
$+ 2a^{(m-n)}a^n b^{m-n} - 2b^2 a^n b^{m-n} + (a^n b^{m-n})^2$
$= a^{2(m-n)} - 2a^{m-n}b^2 + b^4 + 2a^m b^{m-n} - 2a^n b^m + a^{2n}b^{2(m-n)}.$

6. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)^2 =$
$= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5$
$+ 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8.$

7. $(1 - 2x - 3x^2 + x^3)^2 = 1 - 4x - 2x^2 + 14x^3 + 5x^4 -$
$- 6x^5 + x^6.$

8. $[(1 + x - 3x^2)(1 - x)]^2 = (1 + x - 3x^2)^2 (1 - x)^2 =$
$= (1 + 2x - 5x^2 - 6x^3 + 9x^4)(1 - 2x + x^2)$
$= 1 - 8x^2 + 6x^3 + 16x^4 - 24x^5 + 9x^6.$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man zuerst das Product $(1 + x - 3x^2)(1 - x)$ entwickelt, und dieses dann quadrirt. Nähmlich es ist

$$[(1 + x - 3x^2)(1 - x)]^2 = [1 - 4x^2 + 3x^3]^2$$
$$= 1 - 8x^2 + 6x^3 + 16x^4 - 24x^5 + 9x^6.$$

Die hier gefundene Regel für das Quadriren einer mehrtheiligen Größe läßt sich auch auf das Quadriren bestimmter Zahlen anwenden, wie wir in der folgenden Aufgabe sehen werden.

§. 56.

Das Quadrat einer gegebenen ganzen mehrziffrigen Zahl zu finden.

Wenn die gegebene Zahl nach (§. 48) mit sich selbst multiplizirt wird, so ist das Product das verlangte Quadrat. Allein aus dem

Digitized by Google

(§. 54*) angegebenen Grunde, werden wir die gegebene Zahl auf die Form eines zusammengesetzten Ausdruckes (§. 53. Zus. 3.) bringen, und die im vorhergehenden Paragraphen abgeleitete Regel anwenden, um eine allgemeine Vorschrift für das Quadriren der mehrziffrigen Zahlen zu finden.

Es sey z. B. die Zahl 674 aufs Quadrat zu erheben.

Es ist $674^2 = (600 + 70 + 4)^2$

$= 600^2 + 2.600.70 + 70^2 + 2(600+70)4 + 4^2$

$= 600^2 + 2.600.70 + 70^2 + 2.670.4 + 4^2$

$= 360000 + 84000 + 4900 + 5360 + 16$

nähmlich:

$$\left.\begin{array}{r} 360000 = 600^2 \\ 84000 = 2.600.70 \\ 4900 = 70^2 \\ 5360 = 2.670.4 \\ 16 = 4^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 36\ldots = 6^2 \\ 84\ldots = 2.6.7 \\ 49\ldots = 7^2 \\ 536\ldots = 2.67.4 \\ 16 = 4^2 \end{array}\right\} = 674^2.$$

Summe $= 454276$ $\qquad 454276 = 674^2.$

Es wird also auch hier der Localwerth der einzelnen Ziffern berücksichtiget, wenn man die einzelnen Bestandtheile des Quadrates sucht, als wären die Ziffern der Wurzel (674) lauter Ziffern der Einer (primitive Einheiten) und die so gefundenen Resultate so unter einander schreibt, daß man immer eine Stelle rechts hinausrückt, wie §. 55. I.

Die vorige Rechnung läßt sich mit Berücksichtigung des §. 48. Zus. 3. und des §. 53. Zus. 2. auch so darstellen.

Es ist $674^2 = (\overset{2}{6} + \overset{1}{7} + 4)^2$

$= \overset{2}{6}^2 + 2.\overset{2}{6}.\overset{1}{7} + \overset{1}{7}^2 + 2(\overset{2}{6} + \overset{1}{7})4 + 4^2$

$= \overset{4}{36} + \overset{3}{84} + \overset{2}{49} + 2.6.\overset{1}{7}.4 + 16$

$= \overset{4}{36} + \overset{3}{84} + \overset{2}{49} + \overset{1}{536} + 16$

mithin $\quad 674^2 = \left\{\begin{array}{r} \overset{4}{36} \\ \overset{3}{84} \\ \overset{2}{49} \\ \overset{1}{536} \\ 16 \end{array}\right\} = 454276.$

und so erhellt die vorhin gemachte Bemerkung von selbst.

Digitized by Google

Eben so findet man

$$3164^2 = (\overset{3}{3}+\overset{1}{1}+\overset{0}{6}+4)^2$$
$$= \overset{3}{3}^2+2.\overset{3}{3}.\overset{2}{1}+\overset{1}{1}^2+2(\overset{3}{3}+\overset{2}{1})\overset{1}{6}+\overset{1}{6}^2+2(\overset{3}{3}+\overset{2}{1}+\overset{1}{6})4+4^2$$
$$= \overset{6}{9}+\overset{5}{6}+\overset{4}{1}+2.\overset{2}{3}\overset{1}{1}.6+\overset{2}{36}+2.\overset{1}{3}16.4+16$$
$$= \overset{6}{9}+\overset{5}{6}+\overset{4}{1}+\overset{3}{372}+\overset{2}{36}+\overset{1}{2528}+16,$$

demnach $3164^2 =$

$$\begin{cases} 9\ldots\ldots = 3^2 \\ 6\ldots\ldots = 2.3.1 \\ 1\ldots\ldots = 1^2 \\ 372\ldots = 2.31.6 \\ 36\ldots\ldots = 6^2 \\ 2528.\ldots = 2.316.4 \\ 16 = 4^2 \end{cases}$$

$$3164^2 = 10010896.$$

Aus der Art, wie wir die Entstehung des Quadrats einer gegebenen Zahl darstellten, erhellt die allgemeine Gültigkeit des folgenden Satzes:

Die (constitutiven) Theile des Quadrats jeder vielziffrigen ganzen Zahl sind 1) das Quadrat jeder Ziffer, und 2) das doppelte Product jeder folgenden Ziffer in ihre vorhergehenden Ziffern, diese zusammen als Zahl für sich betrachtet, welcher folgende praktische Regel für die Bildung des Quadrates von was immer für einer gegebenen ganzen Zahl enthält:

Die höchste Ziffer der Wurzel erhebe man aufs Quadrat, mache dann das doppelte Product aus der zweyten Wurzelziffer in die erste, und erhebe dann auch die zweyte Wurzelziffer (oder Wurzelnote) aufs Quadrat. Nun betrachte man die beyden höchsten Wurzelziffern (als Zahl für sich betrachtet) als den ersten Theil, mache das doppelte Product aus der dritten Wurzelziffer in den ersten Theil (also in die beyden vorhergehenden Ziffern), und bilde endlich das Quadrat der dritten Ziffer selbst. Nun nehme man die drey höchsten Ziffern (als Zahl für sich betrachtet) für den ersten Theil A, und die vierte Ziffer für den zweyten Theil B, bilde wieder die beyden Bestandtheile 2AB und B^2, und fahre auf diese Art fort, bis alle Wurzelziffern berücksichtigt worden sind. Die so gebildeten

Digitized by Google

Bestandtheile schreibe man genau in der Ordnung, wie sie gefunden worden sind, so unter einander, daß man immer um eine Ziffer weiter gegen die Rechte hinausrückt, wodurch der Localwerth der einzelnen Ziffern berücksichtigt wird, und addire dann, so ist die gefundene Summe das verlangte Quadrat.

Wenn einer der gefundenen Bestandtheile nur einziffrig ist, so schreibe man diesen gleich dem nächst vorhergehenden zur Seite rechts, wie dieß im nachfolgenden Beyspiele bey den eingeklammerten Ziffern geschehen ist. Kommen in der Wurzel Nullen vor, so werden für jede einzelne zwey gesetzt, und gleich hinauf gerückt, um die Rechnung bequemer zu stellen.

Beyspiel.

Es ist $470215^2 = 16$
56
4900
$1880\,(4)$
$94\;04\,(1)$
$47\;02\;10$
25

$= 221102146225.$

Zusatz.

a) Weil jede auf die erste folgende (die 2te, 3te, 4te .... von der Linken gegen die Rechte) Wurzelziffer im Quadrate nebst dem doppelten Producte aus ihr in ihre vorhergehenden Ziffern auch ihr eigenes Quadrat, also zwey neue Zifferstellen im Quadrate gibt; so folgt, daß wenn man ein gegebenes Quadrat als ganze mehrziffrige Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen eintheilt, und zu jeder Classe zwey Ziffern nimmt, gerade so viele Classen erhalten werden müssen, wie viel Ziffern die Wurzelzahl enthält, durch deren Multiplication mit sich selbst das gegebene Quadrat entsprungen ist. Daß die Eintheilung von der Rechten gegen die Linke gemacht werden müsse, ist klar, weil die letzte Classe links auch nur aus einer Ziffer bestehen kann, indem die Quadrate der einziffrigen Zahlen 1, 2, 3 selbst einziffrig sind, nähmlich 1, 4, 9. So z. B.

Digitized by Google

$17345^2 =$	1					
	1	4				
		4	9			
		1	0	2		
				9		
			1	38	4	
					16	
				17	34	0
						25
$17345^2 =$	3	0	0	84	90	25

Hier hat die Wurzel fünf Ziffern, und wir haben auch fünf Classen, oder umgekehrt, weil die gegebene Quadratzahl fünf Classen hat, so hat die entsprechende Wurzel fünf Ziffern.

b) Betrachten wir die Verbindung der einzelnen Bestandtheile dieses Quadrates mit Aufmerksamkeit, so sehen wir sogleich, daß die erste Classe links das Quadrat der ersten Ziffer (A) nicht immer rein enthalten müsse, sondern daß auch noch der Bestandtheil 2 A B auf dieselbe einen Einfluß haben könne, daß aber das doppelte Product 2 A B niemahls auf die niedrigste Stelle der entsprechenden Classe einen Einfluß haben könne, eine Bemerkung, von der wir in der Folge eine nützliche Anwendung machen werden. So z. B. hat das doppelte Product aus der dritten Wurzelnote 3 in die ihr vorhergehenden Ziffern, nähmlich $2 . 17 . 3 = 102$ bey der Summation der Bestandtheile keinen Einfluß auf die erste Ziffer 4 in der Classe 84, sondern nur auf die höchste Ziffer (8) dieser Classe und auf die Ziffern der nächst höhern Classe (00).

§. 57.

Einige besondere Eigenschaften der Quadratzahlen.

1. Die Gleichung $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ läßt sich auch so darstellen:

$$(A+B)^2 = A^2 + (2A+B)B$$
$$= A^2 + [A+B+A]B$$

nähmlich $(A+B)^2 = A^2 + [(A+B)+A]B.$

Diese Gleichung heißt mit Worten ausgedrückt also: Das Quadrat einer zweytheiligen Größe wird gefunden, wenn man zum Quadrate des ersten Theils das Product addirt, welches entsteht, wenn man die um den

Digitized by Google

ersten Theil vermehrte zweytheilige Größe mit dem zweyten Theile multiplizirt. So z. B. ist

$$37^2 = (30+7)^2 = 30^2 + (37+30)7 = 900 + 67.7$$
$$= 900 + 469 = 1369.$$

oder auch:

$$37^2 = (35+2)^2 = 35^2 + (37+35)2 = 1225 + 72.2$$
$$= 1225 + 144 = 1369.$$

Diese Regel gibt uns ein Mittel an die Hand, aus dem bekannten Quadrate einer Zahl das Quadrat einer andern gegebenen Zahl zu finden. Weiß man z. B. daß $12^2 = 144$, so erhält man hieraus

$$13^2 = (12+1)^2 = 12^2 + (13+12)1 = 144 + 25 = 169,$$
$$14^2 = (12+2)^2 = 12^2 + (14+12)2 = 144 + 52 = 196,$$
$$15^2 = (12+3)^2 = 12^2 + (15+12)3 = 144 + 81 = 225$$

u. s. w.

Aus der Gleichung $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ folgt:

$$(A-B)^2 = A^2 - (2A-B)B$$
$$= A^2 - (A-B+A)B$$
$$= A^2 - [(A-B)+A]B.$$

Wir können demnach aus dem gegebenen Quadrate einer Zahl das Quadrat einer andern gegebenen kleinern Zahl finden, wenn wir vom gegebenen Quadrate das obengenannte Product abziehen. Ist z. B. $15^2 = 225$ bekannt, so finden wir

$$12^2 = (15-3)^2 = 15^2 - (12+15)3 = 225 - 27.3$$
$$= 225 - 81 = 144.$$

2. Es ist $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + (2n+1)$
$$= n^2 + [(n+1)+n],$$

d. h. aus dem Quadrate einer Zahl n wird das Quadrat der um Eins größern Zahl $(n+1)$ gefunden, wenn man zum bekannten Quadrate die Summe der beyden gegebenen Wurzeln addirt. So z. B. ist

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = (1+1)^2 = 1^2 + (2+1) = 1+3 = 4$$
$$3^2 = (2+1)^2 = 2^2 + (3+2) = 4+5 = 9$$
$$4^2 = (3+1)^2 = 3^2 + (4+3) = 9+7 = 16$$
$$5^2 = (4+1)^2 = 4^2 + (5+4) = 16+9 = 25$$

u. s. w.

Diese Gleichungen lassen sich auch auf folgende Art darstellen:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1^2 + 3 = 1^2 + (2.2-1) = 1+3$$

Digitized by Google

$$3^2 = 2^2 + 5 = 2^2 + (2.3-1) = 1+3+5$$
$$4^2 = 3^2 + 7 = 3^2 + (2.4-1) = 1+3+5+7$$
$$5^2 = 4^2 + 9 = 4^2 + (2.5-1) = 1+3+5+7+9$$
. . . . . .

allgemein $n^2 = (n-1)^2 + (2n-1) = 1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)$.

3. Es ist $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$, also wenn man auf beyden Seiten m^2 abzieht, $(m+n)^2 - m^2 = 2mn + n^2$, und wenn man $(m+n) = p$, also $n = p-m$ setzt,

$$p^2 - m^2 = 2m(p-m) + (p-m)^2, \text{ oder}$$
$$p^2 - m^2 = (p-m)(2m+p-m) =$$
$$= (p-m)(m+p),$$

oder $p^2 - m^2 = (p+m)(p-m)$,

d. i. die Differenz zweyer Quadrate wird erhalten, wenn man die Summe der Wurzeln mit der Differenz derselben multiplizirt, oder umgekehrt: das Product aus der Summe zweyer Zahlen in ihre Differenz gibt den Unterschied ihrer Quadrate zum Resultate. Z. B.

$$(7+3)(7-3) = 7^2 - 3^2,$$

oder $10.4 = 49 - 9$.

4. Es ist $(a+m)+(a-m) = 2a$

und $(a+m)-(a-m) = 2m$.

Eben so $(a+n)+(a-n) = 2a$

und $(a+n)-(a-n) = 2n$.

Ferner ist $(a+m)(a-m) = a^2 - m^2$

und $(a+n)(a-n) = a^2 - n^2$.

Nehmen wir nun an, daß $n > m$, also auch $2n > 2m$ und $n^2 > m^2$ sey, so ist offenbar $a^2 - m^2 > a^2 - n^2$

d. i. $(a+m)(a-m) > (a+n)(a-n)$,

woraus wir erkennen, daß ein Product aus zwey Factoren, deren Summe eine beständige (constante) Größe $2a$ ist, um so größer werde, je kleiner die Differenz der beyden Factoren ist; mithin wird das Product aus zwey Factoren, deren Summe gleich einer gegebenen Zahl ist, am größten, wenn der Unterschied derselben am kleinsten ist. Am kleinsten ist aber dieser Unterschied, wenn er $= o$ ist, d. i., wenn beyde Factoren einander gleich gesetzt werden. So z. B. ist

$$1 . 11 = 11$$
$$2 . 10 = 20$$
$$3 . 9 = 27$$

Digitized by Google

$4 . 8 = 32$
$5 . 7 = 35$
$6 . 6 = 36$

Hier ist die Summe der beyden Factoren immer $= 12$, und wir sehen, daß die Producte um so größer werden, je weniger die Factoren von einander verschieden sind, und zwar ist das Product 36 aus den beyden gleichen Factoren das größte unter den angeführten.

5. Umgekehrt können wir so schließen: Wenn das Product aus zwey Factoren dem Producte aus zwey andern Factoren gleich ist, so ist die Summe jener zwey Factoren die kleinere, deren Differenz die kleinere ist.

Z. B. ist $6 . 12 = 4 . 18 = 72$
und weil $12 - 6 < 18 - 4$, d. i. $6 < 14$,
so ist auch $12 + 6 < 18 + 4$, d. i. $18 < 22$.

6) Da $(\pm A)^2 = +A^2$, d. i. da alle möglichen Quadratzahlen positiv sind; so ist auch $(a - b)^2$ positiv, d. i. $(a - b)^2 > 0$, oder

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

und weil Gleiches zu Ungleichem addirt, wieder Ungleiches gibt, so ist auch $(a^2 - 2ab + b^2) + 2ab > 2ab$, d. i. $a^2 + b^2 > 2ab$, d. h. die Summe der Quadrate zweyer Zahlen ist immer größer, als ihr doppeltes Product.

§. 58.

Eine gegebene Zahl kubiren oder auf den Kubus (die dritte Potenz) erheben, heißt sie drey Mahl als Factor setzen, oder zwey Mahl mit sich selbst multipliziren.

Zusatz 1.

Also wird der Würfel einer Zahl gefunden, wenn man ihr Quadrat nochmahls mit der Wurzel multiplizirt. Z. B. $5^3 = 5^2 . 5 = 25 . 5 = 125$.

Die Würfel der einziffrigen Zahlen sind im folgenden Täfelchen enthalten:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Man sieht demnach, daß der Würfel einer einziffrigen Zahl einziffrig, zweyziffrig und höchstens dreyziffrig sey.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Es ist $10^3 = 1000$ und $(A.10^m)^3 = A^3.10^{3m}$; also gibt eine Null im Würfel drey Nullen, und wenn eine Zahl $(A.10^m)$, die sich rechts mit m auf einander folgenden Nullen endigt, auf den Würfel zu erheben ist, so kubire man bloß die Zahl A, d. i. die gegebene Zahl ohne die Nullen, und hänge dem gefundenen Resultate drey Mahl so viele Nullen an, als die gegebene Wurzel bey sich führt. Z. B. $600^3 = (6.100)^3 = 6^3.100^3 = 216.1000000 = 216000000$,

oder auch $(600^3) = (6)^{3.2} = 6^{3.2} = 216^3 = 216^6 = 216000000$.

Zusatz 3.

$(\pm A)^3 = (\pm A)^2(\pm A) = +A^2(\pm A)$ (§. 54. Zus. 3.) $= \pm A^3$, d. h. der Würfel hat immer das Zeichen der Wurzel.

§. 59.

Eine gegebene mehrtheilige Größe auf den Würfel zu erheben.

I. Es ist $(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) =$
$= (A+B)(A+B)(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B)$
und durch wirkliche Multiplication
$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

Also besteht der Kubus einer zweytheiligen Größe aus vier Gliedern, nähmlich: 1) Aus dem Kubus des ersten Theils, 2) aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils multiplizirt mit dem zweyten Theile, 3) aus dem dreyfachen Producte aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten Theiles, und endlich 4) aus dem Kubus des zweyten Theiles selbst. Man könnte diesen Satz auch auf folgende Art ausdrücken: Wenn eine zweytheilige Größe auf den Kubus erhoben wird, so gibt das erste Glied nur ein Stück, nähmlich seinen eigenen Kubus; das zweyte Glied aber gibt drey Stücke, nähmlich: 1) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Gliedes in das zweyte, 2) das dreyfache Product aus dem ersten Gliede in das Quadrat des zweyten Gliedes, und endlich 3) seinen eigenen Kubus.

So z. B. ist $(42)^3 = (40+2)^3 = 40^3+3.40^2.2+$
$+3.40.2^2+2^3$,
$= 64000+9600+480+8$,

Digitized by Google

oder $(42)^3 = (\overset{1}{4}+2)^3 = \overset{1}{4}^3 + 3.\overset{1}{4}^2.2 + 3.\overset{1}{4}.2^2 + 2^3$

$$= \overset{3}{64} + \overset{2}{96} + \overset{1}{48} + 8;$$

nähmlich:

$$42^3 = \left\{\begin{array}{rl} 64000 = & \overset{3}{64} \\ 9600 = & \overset{2}{96} \\ 480 = & \overset{1}{48} \\ 8 = & 8 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{rl} 4^3 = & 64\ldots \\ 3.4^2.2 = & 96.. \\ 3.4.2^2 = & 48. \\ 2^3 = & 8 \end{array}\right.$$

$$42^3 = 74088 = 74088 \qquad\qquad 74088.$$

Wir sehen an diesem Beyspiele, daß man auch beym Kubiren den Localwerth der einzelnen Ziffern gehörig berücksichtige, wenn man die einzelnen Ziffern der Wurzel als Zahlen für sich betrachtet, die oben angegebenen Bestandtheile in der angeführten Ordnung entwickelt, und die gefundenen Resultate so unter einander setzt, daß man immer um eine Ziffer weiter rechts hinausrückt.

Ist der zweyte Theil des gegebenen Binoms negativ, so erhält man $(A-B)^3 = (A-B)^2(A-B)$

$$= (A^2 - 2AB + B^2)(A-B),$$

oder wenn man die angezeigte Multiplication wirklich verrichtet und gleich reducirt

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der vorigen dadurch, daß in ihr jene Glieder negativ sind, welche ungerade Potenzen vom zweyten Theile enthalten.

II. Es ist $(A+B+C)^3 = [(A+B)+C]^3 =$

$$= (A+B)^3 + 3.(A+B)^2C + 3(A+B).C^2 + C^3,$$

$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + 3(A^2 + 2AB + B^2)C$$
$$+ 3(A+B)C^2 + C^3$$

$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + 3A^2C + 6ABC + 3B^2C$$
$$+ 3AC^2 + 3BC^2 + C^3.$$

Ist demnach eine dreytheilige Größe auf den Kubus zu erheben, so suche man den Würfel der Summe der beyden ersten Theile nach der in I. gegebenen Vorschrift; dann betrachte man die Summe der beyden ersten Glieder als den ersten, und das dritte Glied als den zweyten Theil, bilde die drey Bestandtheile, welche der zweyte Theil im Kubus gibt, und addire die Summe derselben zum Kubus der Summe

Digitized by Google

der beyden ersten Glieder. Leichter übersieht der Anfänger die Rechnung nach folgender Methode: Man setze $A+B=S$, so erhält man

$$(A+B+C)^3=(S+C)^3=S^3+3S^2C+3SC^2+C^3,$$

aus welcher Gleichung die angegebene Regel von selbst erhellt:

III. Soll die viertheilige Größe $(A+B+C+D)$ auf den Würfel erhoben werden; so setze man die Summe der drey ersten Glieder, nähmlich: $A+B+C=S$; so ist

$$(A+B+C+D)^3=(S+D)^3=S^3+3S^2D+3SD^2+D^3 \text{ nach I.}$$
$$=(A+B+C)^3+(3S^2D+3SD^2+D^3)$$
$$=S^3+3S^2C+3SC^2+C^3+(3S^2D+3SD^2+D^3)\text{ (nach II.)}$$
$$=(A+B)^3+(3S^2C+3SC^2+C^3)+(3S^2D+3SD^2+D^3)$$
$$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(3S^2C+3SC^2+C^3)+3S^2D+$$
$$+3SD^2+D^3);$$

nähmlich:

$$(A+B+C+D)^3=$$
$$=A^3+(3A^2B+3AB^2+B^3)+(3S^2C+3SC^2+C^3)+$$
$$+(3S^2D+3SD^2+D^3).$$

Eben so findet man, wenn man

$$A+B+C+D=S$$

$$A+B+C=S$$

und $A+B=S$ setzt

$$(A+B+C+D+E)^3=\left\{\begin{array}{l} A^3 \\ +3A^2B+3AB^2+B^3 \\ +3S^2C+3SC^2+C^3 \\ +3S^2D+3SD^2+D^3 \\ +3S^2E+3SE^2+E^3 \end{array}\right\}$$

Aus dieser Darstellung der Rechnung fällt nun folgende allgemeine Wahrheit von selbst in die Augen: Wenn eine mehrtheilige Größe auf den Kubus erhoben wird; so gibt das

Digitized by Google

erste Glied seinen eigenen Kubus, jedes folgende Glied aber gibt drey Stücke, nähmlich: 1) das dreyfache Product aus dem Quadrate von der Summe der vorausgehenden Glieder in das fragliche Glied, 2) das dreyfache Product aus der Summe aller vorhergehenden Glieder in sein Quadrat, und endlich 3) seinen eigenen Würfel.

Erläuterung dieser Regel durch Beyspiele.

1) $(2a^4+3b^2)^3 = (2a^4)^3+3(2a^4)^2(3b^2)+3(2a^4)(3b^2)^2+(3b^2)^3$
$= 8a^{12}+3.4.a^8 3b^2+3.2.a^4.9b^4+27b^6$
$= 8a^{12}+36a^8b^2+54a^4b^4+27b^6.$

2) $(a^3-b^2+a^2b^3)^3 =$
$= (a^3)^3+3(a^3)^2(-b^2)+3(a^3)(-b^2)^2+(-b^2)^3+$
$+3(a^3-b^2)^2.(a^2b^3)+3(a^3-b^2)(a^2b^3)^2+(a^2b^3)^3$
$= a^9-3a^6b^2+3a^3b^4-b^6+3(a^6-2a^3b^2+b^4)a^2b^3$
$+3(a^3-b^2)a^4b^6+a^6b^9$
$= a^9-3a^6b^2+3a^3b^4-b^6+3a^8b^3-6a^5b^5+3a^2b^7+$
$3a^7b^6-3a^4b^8+a^6b^9.$

3) $(1-x+3x^2-4x^3)^3 = 1^3-3.1^2x+3.1.x^2-x^3+$
$+3(1-x)^2.(3x^2)+3(1-x)(3x^2)^2+(3x^2)^3$
$+3(1-x+3x^2)^2(-4x^3)+3(1-x+3x^2)(-4x^3)^2+(-4x^3)^3$
$= 1-3x+3x^2-x^3+(1-2x+x^2).9x^2+(3-3x).9x^4$
$+27x^6+(1-2x+7x^2-6x^3+9x^4)(-12x^3)$
$+(3-3x+9x^2).16x^6-64x^9;$

oder, wenn man die angezeigten Rechnungen durchführt, und gleich nach den steigenden Potenzen von x ordnet:

$1-3x+3x^2-x^3$
$+9x^2-18x^3+9x^4$
$+27x^4-27x^5+27x^6$
$-12x^3+24x^4-84x^5+72x^6-108x^7$
$+48x^6-48x^7+144x^8-64x^9$

$(1-x+3x^2-4x^3)^3 = 1-3x+12x^2-31x^3+60x^4-111x^5$
$+147x^6-156x^7+144x^8-64x^9.$

4) $[(1+x-x^2)(1-x)]^3 = (1+x-x^2)^3(1-x)^3 =$
$= [1+3x+3x^2+x^3+3(1+x)^2.(-x^2)+3(1+x)(-x^2)^2$
$+(-x^2)^3](1-3x+3x^2-x^3)$

Digitized by Google

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1+3x+3x^2+x^3 \\ \quad -3x^2-6x^3-3x^4 \\ \qquad\qquad +3x^4+3x^5-x^6 \end{array} \right\} \times (1-3x+3x^2-x^3)$$

$$= (1+3x-5x^3+3x^5-x^6)\ (1-3x+3x^2-x^3)$$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} 1+3x & -5x^3 & +3x^5 & -x^6 \\ -3x-9x^2 & +15x^4 & -9x^6 & +3x^7 \\ +3x^2+9x^3 & -15x^5 & +9x^7 & -3x^8 \\ -x^3-3x^4 & +5x^6 & -3x^8 & +x^9 \end{array} \right\}$$

$$= 1-6x^2+3x^3+12x^4-12x^5-5x^6+12x^7-6x^8+x^9.$$

Oder kürzer:

$$[(1+x-x^2)\ (1-x)]^3 = (1-2x^2+x^3)^3 =$$

$$= 1^3-3.1^2(2x^2)+3.1(-2x^2)^2+(-2x^2)^3+3(1-2x^2)^2 \times$$
$$\times x^3+3(1-2x^2)\ (x^3)^2+(x^3)^3$$
$$= 1-6x^2+3.4x^4-8x^6+3x^3(1-4x^2+4x^4)+$$
$$+(3-6x^2)x^6+x^9$$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} 1-6x^2+ & 12x^4 & -8x^6 & \\ +3x^3 & -12x^5 & +12x^7 & \\ & +3x^5 & -6x^8 & +x^9 \end{array} \right\}$$

$$= 1-6x^2+3x^3+12x^4-12x^5-5x^6+12x^7-6x^8+x^9.$$

Wir wollen nun die oben für die Bildung des Würfels einer mehrgliedrigen Größe abgeleitete allgemeine Regel anwenden auf folgende Aufgaben:

§. 60.

Eine gegebene mehrziffrige Zahl auf den Kubus zu erheben.

Es sey z. B. die Zahl 4726 auf den Würfel zu erheben.

Es ist $(4726)^3 = (4000+700+20+6)^3$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 4000^3+[3.4000^2.700+3.4000.700^2+700^3] \\ \quad +[3(4000+700)^2.20+3(4000+700).20^2+20^3] \\ \quad +[3(4000+700+20)^2.6+3(4000+70+20)6^2+6^3] \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 4000^3+(3.4000^2.700+3.4000.700^2+700^3) \\ \quad +(3.4700^2.20+3.4700.20^2+20^3) \\ \quad +(3.4720^2.6+3.4720.6x+6^3) \end{array} \right\}$$

Nun aber ist:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rcl}
4000^3 & = & 64000000000 \\
3 \cdot 4000^2 \cdot 700 & = & 33600000000 \\
3 \cdot 4000 \cdot 700^2 & = & 5880000000 \\
700^3 & = & 343000000 \\
3 \cdot 4700^2 \cdot 20 & = & 1325400000 \\
3 \cdot 4700 \cdot 20^2 & = & 5640000 \\
20^3 & = & 8000 \\
3 \cdot 4720^2 \cdot 6 & = & 401011200 \\
3 \cdot 4720 \cdot 6^2 & = & 509760 \\
6^3 & = & 216 \\
\hline
4726^3 & = & 105555569176
\end{array}
$$

Oder auch:

$$4726^3 = \overset{3}{(}4+7+2+6\overset{3}{)} =$$

$$= 4^3+3.4^2.7+3.4.7^2+7^3+3(47)^2.2+3.47.2^2+2^3+$$

$$+3.472^2.6+3.472.6^2+6^3$$

$$= 64+3.16.7+3.4.49+343+3.2209.2+3.47.4+$$

$$+8+3.22278.6+3.472.36+216$$

aber

$$
\begin{array}{rcl}
64 & = & 64 \\
3 \cdot 16 \cdot 7 & = & 336 \\
3 \cdot 4 \cdot 49 & = & 588 \\
343 & = & 343 \\
3 \cdot 2209 \cdot 2 & = & 13254 \\
3 \cdot 47 \cdot 4 & = & 564 \\
8 & = & 8 \\
3 \cdot 22278 \cdot 6 & = & 401011 \\
3 \cdot 472 \cdot 36 & = & 50976 \\
216 & = & 216 \\
\hline
4726^3 & = & 105555569176 \text{ wie oben.}
\end{array}
$$

Aus der Behandlung dieses Beyspieles sehen wir, daß die mehrzifferigen Zahlen wie zusammengesetzte allgemeine Ausdrücke auf den

Digitized by Google

Würfel erhoben werden, und daß man auch hier, wie beym Quadriren, immer die jener Ziffer, deren Bestandtheile im Würfel gesucht werden, vorausgehenden Stellen zusammen als Zahl für sich betrachten kann, wo dann die der Ordnung nach gefundenen (constitutiven) Theile des Kubus so unter einander gesetzt werden müssen, daß man immer um eine Stelle weiter gegen die Rechte hinausrückt, um den Local-Werth aller einzelnen Ziffern gehörig zu berücksichtigen. Man verfahre demnach beym Kubiren der mehrzifferigen Zahlen nach folgender allgemeiner Regel:

Die erste (höchste) Ziffer einer jeden gegebenen Zahl gibt im Würfel nur ein Stück, nähmlich ihren eigenen Kubus; jede folgende Ziffer aber gibt drey Stücke, nähmlich 1) das dreyfache Product aus ihr in das Quadrat aller vorhergehenden Ziffern, diese als Zahl für sich betrachtet; 2) das dreyfache Product aus den vorhergehenden Ziffern, ebenfalls als Zahl für sich betrachtet, in ihr eigenes Quadrat, und endlich 3) ihren eigenen Würfel.

Zusatz 1.

Hat die Zahl, welche auf den Kubus erhoben werden soll, eine oder mehrere Nullen in der Mitte, so hängt man gleich dem Kubus der vorhergehenden bedeutenden Ziffern für jede einzelne Nulle drey Nullen an (§. 57. Zus. 2.), und wenn einer der gefundenen Bestandtheile nur einzifferig ist, so kann man diese Ziffer dem nächst vorhergehenden Bestandtheile gleich rechts beyfügen, um Raum zu ersparen, wie dieß in folgenden Beyspielen mit den eingeklammerten Ziffern geschehen ist. Z. B.

$$702104^3 = 343000 \ldots\ldots\ldots\ldots = 7^{\overset{5}{3}}$$
$$29400 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3.7^{\overset{5}{2}}.2^{\overset{3}{}}$$
$$840(8) \ldots\ldots\ldots\ldots = 3.7^{\overset{5}{}}.2^{\overset{3}{2}} + 2^{\overset{3}{3}}$$
$$14784\ 1\ 2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3.702^{\overset{3}{2}}.1^{\overset{}{}}$$
$$2\ 1\ 06(1)000 \ldots\ldots = 3.702^{\overset{3}{}}.1^{\overset{2}{2}} + 1^{\overset{3}{3}}$$
$$591\ 5\ 33\ 2\ 9200 \ldots\ldots = 3.7021^{\overset{2}{2}}.4^{\overset{}{}}$$
$$3\ 3\ 7008(64) \ldots\ldots = 3.7021^{\overset{2}{}}.4^{\overset{}{2}} + 4^{\overset{}{3}}$$

$702104^3 = 34610218\ 5\ 62\ 7\ 6208\ 64.$

Digitized by Google

Zusatz 2.

Da jede Ziffer außer der höchsten Stelle im Würfel drey Stücke gibt, deren niedrigste Ziffern ihrem Local-Werthe nach unmittelbar auf einander folgen, die erste (höchste) Ziffer aber nur ihren eigenen Kubus, und dieser ein-, zwey- oder höchstens dreyzifferig seyn kann (§. 57. Zus. 1.); so ist klar, daß jede Kubikzahl höchstens drey Mahl so viele Ziffern haben könne als die entsprechende Wurzel (diejenige Zahl, welche drey Mahl als Factor gesetzt, die gegebene Kubikzahl gibt) und höchstens um zwey Ziffern weniger als jene dreyfache Anzahl der Ziffern in der Wurzel. Hat nähmlich eine gegebene Zahl n Ziffern, so kann ihr Würfel höchstens 3n Ziffern haben, muß aber wenigstens aus (3n — 2) Ziffern bestehen.

Zusatz 3.

Hieraus folgt, daß wenn man eine gegebene Kubikzahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen von drey zu drey Ziffern eintheilt, die letzte Classe links ausgenommen, welche auch ein- oder zweyzifferig seyn kann, genau eben so viele Classen erhalten werden, wie viele Ziffern die entsprechende Wurzel hat. Z. B. Wenn man 4628 auf den Kubus erhebt, so erhält man:

	$4^3 = 64$ |			
3.	$4^2.6 = 28$ | 8			
3.	$4 .6^2 = .4$ | 32			
	$6^3 = ..$ | 216			
3.	$46^2.2 = .1$ | 269	6		
3.	$46 .2^2 = ..$ | ..5	52		
	$2^3 = ..$ | . .	..8		
3.	$462^2.8 = ..$ | 512	265	6	
3.	$462 .8^2 = ..$ | ...	887	04	
	$8^3 = ..$ | ...	...	512	
	$4628^3 = 99$ | 124	281	152	

Hier hat die Wurzel (4628) vier Ziffern, und wir haben auch vier Classen, von welchen die erste Classe links nur zwey Stellen enthält, weil $4^3 = 64$ nur eine zweyzifferige Zahl ist. Der gefundene Kubus hat $11 = (3.4 - 1)$ Ziffern, also um eine weniger, als die dreyfache Anzahl der Ziffern in der Wurzel anzeigt.

Wir bemerken ferner, daß das dreyfache Product jeder Wurzelnote in das Quadrat aller vorausgehenden Ziffern, als Zahl für sich

Digitized by Google

betrachtet, nur auf die höchste Ziffer der betreffenden Classe im Würfel einen Einfluß haben könne, nie aber auf die beyden ersten Ziffern rechts dieser Classe. Eben so hat das dreyfache Product aus dem Quadrate einer Wurzelziffer in die von den vorhergehenden Ziffern gebildete Zahl auf die niedrigste Ziffer der entsprechenden Classe im Kubus keinen Einfluß, sondern nur auf die beyden höchsten Ziffern.

§. 61.

Einige besondere Eigenschaften der Kubikzahlen.

I. Die Gleichung $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ läßt sich auch auf folgende Art so darstellen:

$$1)\quad (A+B)^3 = A^3 + 3AB(A+B) + B^3$$
$$= A^3 + B^3 + 3AB(A+B);$$

d. h. der Würfel einer zweytheiligen Größe wird auch gefunden, wenn man zur Summe der Würfel der einzelnen Theile die mit dem dreyfachen Producte der beyden Theile multiplizirte Summe der beyden Glieder addirt. Z. B. $(25)^3 = (20+5)^3$

$$= 20^3 + 5^3 + 3.20.5\,(20+5)$$
$$= 8000 + 125 + 300.25$$
$$= 8125 + 7500$$
$$= 15625.$$

Setzt man in der letzten allgemeinen Gleichung $B = 1$; so erhält man

$$(A+1)^3 = A^3 + 1 + 3A(A+1).$$

Oder wenn man $A = a-1$, also $A+1 = a$ setzt:

$$a^3 = (a-1)^3 + 1 + 3(a-1)a, \text{ oder}$$
$$2)\quad a^3 = (a-1)^3 + 1 + 3a(a-1);$$

d. h. der Kubus einer gegebenen Zahl a wird gefunden, wenn man zu dem um 1 vermehrten Kubus der nächst kleinern Zahl das dreyfache Product aus der gegebenen Zahl in die nächst kleinere addirt. Z. B.

$$26^3 = (25^3+1) + 3.26.25 = 15626 + 1950 = 17576.$$

II. Setzt man in der obigen Gleichung $(A+1)^3 = A^3 + 3A(A+1) + 1$ nun $A+1 = a+b$, also $A = a+b-1$, so erhält man

$$(a+b)^3 = (a+b-1)^3 + 3(a+b-1)(a+b) + 1, \text{ also auch}$$

Digitized by Google

$(a+b-1)^3 = (a+b-2)^3 + 3(a+b-2)(a+b-1)+1$;
wenn in der letzten Gleichung $b-1$ ſtatt b geſetzt wird;
$(a+b-2)^3 = (a+b-3)^3 + 3(a+b-3)(a+b-2)+1$,
auf dieſelbe Art
$(a+b-3)^3 = (a+b-4)^3 + 3(a+b-4)(a+b-3)+1$
. . . . . .,
und allgemein, wenn $b-x$ ſtatt b geſetzt wird:
$(a+b-x)^3 = [a+b-(x+1)]^3+3[a+b-(x+1)][a+b-x]+1$.

Es iſt demnach auch, wenn ſtatt $(a+b-1)^3$, dann ſtatt $(a+b-2)^3$ u. ſ. w. dieſe Werthe nach und nach geſetzt werden:

$$(a+b)^3 = (a+b-2)^3 + 3(a+b-2)(a+b-1)+ \\ + 3(a+b-1)(a+b)+2$$
$$= (a+b-3)^3 + 3(a+b-3)(a+b-2)+3(a+b-2)(a+b-1) \\ +3(a+b-1)(a+b)+3$$
$$= (a+b-4)^3 + 3(a+b-4)(a+b-3)+3(a+b-3)(a+b-2) \\ +3(a+b-2)(a+b-1)+3(a+b-1)(a+b)+4$$
. . . . . allgemein
$$= (a+b-x)^3 + 3(a+b-x)[a+b-(x-1)] \\ +3[a+b-(x-1)][a+b-(x-2)] \\ +3[a+b-(x-2)][a+b-(x-3)]+\ldots+ \\ +3(a+b-2)(a+b-1)+3(a+b-1)(a+b)+x.$$

Setzen wir in der letzten Gleichung $b=x$; ſo wird
$(a+b)^3 = a^3 + 3a(a+1) + 3(a+1)(a+2) + 3(a+2)(a+3) + .$
$\ldots + 3(a+b-2)(a+b-1)+3(a+b-1)(a+b)+b$,
und $a=0$ geſetzt; geht dieſe Gleichung über in
$b^3 = 3.1.2 + 3.2.3 + 3.3.4 + 3.4.5 + \ldots\ldots$
$+3(b-2)(b-1) + 3(b-1)b+b$, oder
1) $b^3 = 3[1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots+(b-2)(b-1)+(b-1)b]+b$.

Das Geſetz, nach welchem die auf einander folgenden Glieder dieſer Reihe gebildet werden, fällt von ſelbſt in die Augen. — So z. B. iſt für $b=6$ offenbar
$6^3 = 3[1.2+2.3+3.4+4.5+5.6]+6$
$= 3(2+6+12+20+30)+6 = 3.70+6$
$= 216$.

Aus obiger Gleichung folgt, wenn wir auf beyden Seiten b abziehen,

Digitized by Google

2) $b^3 - b = b(b^2 - 1) =$

$= 3[1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (b-2)(b-1) + (b-1)b]$

oder $b^3 - b = b(b^2 - 1) = b(b+1)(b-1)$

$= 3(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + \ldots + (b-1)b).$

Wir sehen demnach, daß der Rest zwischen einer jeden Kubikzahl und der entsprechenden Wurzel immer den Factor 3 enthalten müsse, oder mit andern Worten: daß jene Differenz immer ein Vielfaches von 3 sey.

B. Von der Division unbenannter Zahlen.

§. 62.

Dividiren (theilen) heißt eine Größe finden, die mit einer gegebenen unbenannten Zahl multiplizirt, eine gegebene Größe hervorbringt. — Die gegebene unbenannte Zahl heißt der Divisor (Theiler), die gegebene Größe der Dividend (die zu theilende Größe), und die zu suchende Größe der Quotient.

Die Rechnung, mittelst welcher der Quotient gefunden wird, heißt Division.

Zusatz 1.

Es müssen demnach der Dividend und Quotient gleichartige Größen, der Divisor aber alle Mahl eine unbenannte Zahl seyn.

Also gibt die Zahl 36 als Dividend auf irgend eine Einheit bezogen, durch 9 als Divisor getheilt, einen Quotienten, der durch die Zahl 4 auf dieselbe Einheit bezogen ausgedrückt wird.

Zusatz 2.

Bezeichnen wir den Dividend durch D, den Divisor durch d, und den Quotienten durch Q; so muß der Erklärung der Division gemäß $D = d.Q$ seyn.

§. 63.

Um einen Quotienten anzudeuten, oder um anzudeuten, daß die Größe D durch die Zahl d zu dividiren sey, setzt man zwischen den Dividend und den Divisor zwey über einander stehende Puncte, so, daß der Dividend links, und der Divisor rechts zu stehen kommt; oder man schreibt den Divisor unter den Dividend, und sondert beyde durch eine

Digitized by Google

kleine horizontale Linie von einander ab. Man schreibt nähmlich D:d, oder $\frac{D}{d}$. Diese letzte Form des Quotienten nennt man auch Bruchform. Um also anzudeuten, daß die Zahl 36 durch 9 dividirt, den Quotienten 4 gibt, schreibt man 36:9=4 oder $\frac{36}{9}=4$.

Zusatz 1.

Es ist 36:9=4 weil 36=4.9. Hieraus folgt 36—9.4=0 oder

$$36-9.4=36-(9+9+9+9)$$
$$=36-9-9-9-9$$
$$=27-9-9-9=18-9-9=9-9=0.$$

Wir sehen demnach, daß so wie die Multiplication eine abgekürzte Addition ist, die Division eine abgekürzte Subtraction sey. Daher erklärt man die Division gewöhnlich auf folgende Art: Dividiren heißt untersuchen, wie oft die gegebene unbenannte Zahl (der Divisor) in der gegebenen Größe (dem Dividend) enthalten sey, d. h. wie oft sich jene Zahl von dieser Größe abziehen lasse. Daß aber diese Erklärung mangelhaft sey, ist klar; denn der Divisor als unbenannte Zahl soll nicht nach und nach von der gegebenen Größe subtrahirt werden, sondern eine gewisse gesuchte mit dem Dividend gleichartige Größe, und zwar nach dem Gesetze des Divisors, d. h. so oft, wie oft der Divisor anzeigt, oder wie oft dieser die Einheit enthält.

Man kann demnach die Division besser so erklären: Dividiren heißt eine Größe finden, die zu sich selbst so oft addirt, als eine gegebene unbenannte Zahl (der Divisor) anzeigt, eine gegebene Größe (den Dividend) gibt.

Diese Definition ist mit der (§. 61.) angegebenen ihrer Natur nach einerley. — Man sieht daher leicht ein, daß der Quotient aus dem Dividend gerade so entstehe, wie die Einheit aus dem Divisor.

Zusatz 2.

Sind gleichwohl Dividend und Divisor in ganzen Zahlen gegeben, so ist es doch häufig der Fall, daß der Quotient nicht durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, oder daß dieser zwischen zwey unmittelbar auf einander folgende ganze Zahlen (d. i. solche Zahl, die nur um 1 von einander verschieden sind) fällt. Z. B. der Quotient 17:5 fällt zwischen die beyden ganzen Zahlen 3 und 4, d. h. er ist größer als 3, aber kleiner als 4, weil 5.3=15, und 5.4=20 ist.

Digitized by Google

Es ist demnach dieser Quotient größer als 3, aber um eine Größe, die keine ganze Einheit mehr beträgt, und deren Werth wir in der Lehre von den Brüchen bestimmen lernen werden. Wir werden deßhalb bis dorthin immer die kleinere dieser ganzen Zahlen als Quotienten angeben, und dabey den Rest bemerken, der gefunden wird, wenn man vom gegebenen Dividend das Product aus dem Divisor in den gefundenen nächst kleinern Quotienten abzieht. Es ist demnach in unserm Beyspiele der Rest $2=17-3.5$, und wir schreiben kurz $17:5=3+\frac{2}{5}$ oder noch kürzer $17:5=3\frac{2}{5}$, d. h. der Quotient ist 3 und 2 ist noch zu dividiren durch 5.

In einem solchen Falle sagt man: der Divisor sey bloß ein aliquanter Theil des Dividends, d. i. ein solcher, durch dessen wiederhohlte Addition der Dividend nicht erhalten werden kann. Also ist 5 ein aliquanter Theil vom Dividend 17.

Kann aber der Quotient vollkommen durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden, so heißt die Division ein Messen, der Divisor heißt das Maß des Dividends, und sowohl der Divisor als der Quotient heißen aliquote Theile des Dividends, indem durch wiederhohlte Addition sowohl des Divisors als auch des Quotienten der Dividend erhalten wird. Denn da z. B. $12:3=4$, so ist sowohl 3 als auch 4 ein aliquoter Theil vom Dividend 12, weil $3.4=3+3+3+3=12$, und $4.3=4+4+4=12$. — Es ist demnach hier der Dividend 12 das Vierfache des Divisors 3, oder das Dreyfache des Quotienten 4, d. i. es ist hier der Dividend ein gemeinschaftliches Vielfache des Divisors und des Quotienten.

Zusatz 3.

Da der Dividend als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden kann, von welchen der eine (Divisor) gegeben ist, der andere (der Quotient) aber gesucht wird; so ist auch klar, daß der Dividend durch einen jener Factoren dividirt, den andern zum Quotienten gibt. Ist also $D=dq$; so ist $D:d=q$, und $D:q=d$.

Hieraus folgt nun, daß, weil $a=1.a$, $a:a=1$, und $a:1=a$, d. h. jede Größe durch sich selbst dividirt gibt die Einheit zum Quotienten, und jede Größe durch die Einheit dividirt, gibt sich selbst zum Quotienten.

Digitized by Google

§. 64.

Eine Zahl durch 10, 100, 1000, . . . oder durch 10, 10^2, 10^3 . . . dividiren, heißt die Zahl in 10, 100, 1000 . . . gleiche Theile theilen, oder von ihr den 10ten, 100ten, 1000sten . . . Theil nehmen, und dieß geschieht, wenn man von der gegebenen Zahl von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch das Absonderungs-Zeichen abschneidet, wie viele Nullen die Einheit bey sich führt. Z. B.

$48000 : 10 = 4800 \cdot 0 = 4800$, denn $48000 = 10 \cdot 4800$
$48000 : 100 = 480 \cdot 00 = 480$, » $48000 = 100 \cdot 480$
$48000 : 1000 = 48 \cdot 000 = 48$, » $48000 = 1000 \cdot 48$
$48000 : 10000 = 4 \cdot 8000 = 4 \cdot 8 = 4\frac{8000}{10000}$, » $48000 = 10000 \cdot 4 + 8000$

$3728 : 100 = 37 \cdot 28 = 37\frac{28}{100}$, denn $3728 = 100 \cdot 37 + 28$
$3728 : 1000 = 3 \cdot 728 = 3\frac{728}{1000}$, » $3728 = 1000 \cdot 3 + 728$
. . . . . .

Die links vom Absonderungszeichen stehende Zahl ist demnach der Quotient, und die rechts stehende Zahl der Rest. — Der Beweis für die Gültigkeit der aufgestellten Regel erhellt aus der Natur des decadischen Systemes und aus §. 63. Zus. 3.

§. 65.

Eine gegebene ganze ein- oder zweyzifferige Zahl A durch eine andere gegebene ganze einzifferige Zahl B zu dividiren.

1) Ist $A < B$, so ist der Quotient 0, und die Division kann in diesem Falle nur angedeutet werden. Z. B. $4 : 7 = \frac{4}{7}$.

2) Ist $A = B$, so ist der Quotient $\frac{A}{B} = 1$ (§. 63. Zus. 3.).

3) Ist $A > B$; so suche man im Einmahleins (§. 46) in der obersten Horizontal-Reihe den einzifferigen Divisor B, gehe in der Vertical-Reihe, welche die Zahl B an der Spitze führt, herab, bis man auf die Zahl A entweder selbst, oder auf die nächst kleinere Zahl A′ kommt; so ist die einzifferige Zahl in der ersten Vertical-Reihe links, welche mit A, oder der nächst kleinern Zahl A′ in einerley Horizontal-Reihe steht, der gesuchte Quotient. Wird die Zahl A in der Producten-Reihe selbst angetroffen, so ist die Division ein Messen; findet man aber bloß die nächst kleinere Zahl A′; so ist $A - A'$ der gehörige Rest.

* In der Division mit einer einzifferigen Zahl muß man sich fleißig üben,

Digitized by Google

ohne das Einmahleins, welches dem Gedächtnisse gut eingeprägt werden muß, zu Hülfe zu nehmen.

Beyspiele: 1) $72:8=9$ 2) $47:9=5\frac{2}{9}$

weil $8.9=\underline{72}$ $\underline{5.9=45}$

$''$ Rest $=2$.

Man kann die Rechnung für die Division auch so ansetzen:

Divisor. | Dividend. | Quotient.

Z. B. $27:8=3\frac{3}{8}$ kann man auch schreiben:

$$\begin{array}{r|r|l} 8 & 27 & 3\frac{3}{8} \\ & -24 & \\ \hline & 3 & \end{array}$$

Diese Form werden wir in der Folge gewöhnlich brauchen.

§. 66.

Eine vielzifferige Zahl D als Dividend durch eine einzifferige d zu dividiren.

1) Man dividire die höchste Stelle, oder wenn diese kleiner seyn sollte als der Divisor, die beyden höchsten Stellen des Dividends als ersten Theil-Dividend durch den gegebenen Divisor nach §. 65, so erhält man die höchste Ziffer des Quotienten, oder den ersten Theil-Quotienten (Partial-Quotienten).

2) Nun ziehe man das Product aus dem Divisor in den gefundenen Partial-Quotienten vom ersten Theil-Dividend ab, und setze

3) zu dem etwa gebliebenen Reste die nächste Ziffer des Dividends herab. Die so erhaltene Zahl, als zweyter Partial-Dividend, dividire man von neuem nach dem vorigen Paragraphen durch den gegebenen Divisor, setze den so gefundenen Quotienten dem ersten Theil-Quotienten rechts zur Seite, und ziehe das Product aus demselben in den gegebenen Divisor vom vorigen Theil-Dividend ab.

4) Zu dem erhaltenen Reste setze man die nächst niedrigere Ziffer des Dividends herab, und wiederhohle die in 3) gegebene Vorschrift so lange, bis alle Ziffern des Dividends herabgesetzt sind.

5) Sollte einer der Partial-Dividende durch den gegebenen Divisor nicht theilbar seyn; so setze man im Quotienten eine Null an, und füge jenem Theil-Dividend rechts gleich die nächste Ziffer des Dividends bey, um den folgenden Partial-Dividend zu erhalten.

Digitized by Google

Beyspiel. 1) Man soll die Zahl 738564 durch 6 dividiren:

```
Rechnung.   6 | 738564 | 123094
        —1.6=—6
              13
        —2.6=—12
               18
        —3.6=— 18
                ″5
        —0.6=   0
                 56
        —6.9=—  54
                  24
        —4.6=—  24
                  ″
```

Da hier am Ende kein Rest bleibt, oder wie man sich noch auszudrücken pflegt, da die Division aufgeht, so ist 123094 der vollständige Quotient.

Kürzer steht die Rechnung also:

```
6 | 738564 | 123094
  | 6
    13
    12
     18
     18
      ″56
       54
        24
        24
         ″
```

Man muß sich angewöhnen, die Producte aus dem Divisor in die Partial-Quotienten gleich in Gedanken von den zugehörigen Partial-Dividenden abzuziehen, ohne dieselben anzusetzen. Man setze nähmlich in unserm Beyspiele:

```
6 | 738564 | 123094
  | 13
    18
     ″56
       24
        ″
```

Digitized by Google

Man spricht nähmlich: 6 in 7 geht 1 Mahl, 1 Mahl 6 ist 6 und (1) ist 7; 3 herab: 6 in 13 geht 2 Mahl, 2 Mahl 6 gibt 12 und (1) ist 13; 8 herab: 6 in 18 geht 3 Mahl, 3 Mahl 6 ist 18 und (0) ist 18; 5 herab: 6 in 5 geht 0 Mahl; 6 herab: 6 in 56 ist 9 Mahl enthalten, 9 Mahl 6 ist 54 und (2) ist 56; 4 herab: 6 in 24 geht 4 Mahl, 4 Mahl 6 ist 24 und (0) ist 24. — Die eingeklammerten Ziffern sind die jedesmahligen Reste.

Auf diese Art werden wir in der Folge um der Kürze willen jedes Mahl die Division verrichten.

Beyspiel 2. Man soll die Zahl 29457637 durch 8 dividiren.

Rechnung.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 29457637 \\ & 54 \\ & 65 \\ & {}^{1}7 \\ & 16 \\ & {}^{''}37 \\ & 5. \end{array} \quad \Big| \quad 3682204$$

Es ist demnach die Zahl 3682204 der nächst kleinere Quotient als ganze Zahl und 5 ist der Rest.

Von der Richtigkeit der Rechnung beym ersten Beyspiele kann man sich auf folgende Art überzeugen. Es ist $738564 : 6 = \overset{5}{7}+\overset{4}{3}+\overset{3}{8}+\overset{2}{5}+\overset{1}{6}+4):6$, und $123094 = \overset{5}{1}+\overset{4}{2}+\overset{3}{3}+\overset{2}{0}+\overset{1}{9}+4$.

Nun haben wir vom Dividend der Ordnung nach folgende Theil-Producte angenommen:

$$\begin{aligned} 6 \,.\, \overset{5}{1} &= \overset{5}{6} = 600000 \\ 6 \,.\, \overset{4}{2} &= \overset{4}{12} = 120000 \\ 6 \,.\, \overset{3}{3} &= \overset{3}{18} = 18000 \\ 6 \,.\, \overset{2}{0} &= \overset{2}{0} = 000 \\ 6 \,.\, \overset{1}{9} &= \overset{1}{54} = 540 \\ 6 \,.\, 4 &= 24 = 24 \end{aligned}$$

Gleiches zu Gleichem addirt gibt wieder Gleiches; folglich ist

$$6 \,.\, \left[\overset{5}{1}+\overset{4}{2}+\overset{3}{3}+\overset{2}{0}+\overset{1}{9}+4\right] = 738564, \text{ d. i.}$$

$$6 \,.\, 123094 = 738564;$$

nähmlich das Product aus dem Divisor in den Quotienten ist dem Dividend gleich; folglich ist die Division richtig.

Digitized by Google

Eben so überzeugt man sich von der Richtigkeit der Rechnung beym zweyten Beyspiele.

Zusatz.

Der Rest ist demnach jedes Mahl kleiner als der Divisor.

§. 67.

Eine gegebene Zahl D durch eine andere kleinere Zahl d zu dividiren, wenn D < 10 . d ist.

1) Man schneide vom Dividend D von der Rechten gegen die Linke in Gedanken so viele Ziffern ab, als der Zeiger (Index) der höchsten Ziffer im Divisor andeutet. Ist nun die links übrig bleibende Zahl, die eine oder zwey Ziffern haben kann, und die wir durch D′ bezeichnen wollen, kleiner als das Zehnfache der höchsten Ziffer im Divisor, so theile man durch diese Ziffer des Divisors die Zahl D′ nach §. 65.

2) Mit dem gefundenen einzifferigen Quotienten q dividire man nach §. 66. den Dividend D; so ist, wenn $\frac{D}{q} \geqq d$, q der gesuchte Quotient. Ist aber $\frac{D}{q} < d$, so muß man q um 1 vermindern, und dann wieder mit (q — 1) in D hinein dividiren. Ist nun $\frac{D}{q-1} \geqq d$; so ist q — 1 der gesuchte Quotient; wäre aber auch noch $\frac{D}{q-1} < d$; so müßte man D wieder durch (q — 1) — 1 = q — 2 theilen, und auf diese Art fortfahren, bis man endlich auf einen Quotienten $\frac{D}{q-n}$ stößt, der nicht kleiner als der Divisor d ist.

3) Wäre aber D′ nicht kleiner als das Zehnfache der höchsten Ziffer im Divisor, so theile man D durch 9; so ist 9 der verlangte Quotient, wenn $\frac{D}{9} \geqq d$ ist, im entgegengesetzten Falle, wenn $\frac{D}{9} < d$ ist, muß man den Versuch mit der Ziffer 8 machen, und wie in Nro. 2 verfahren.

Zur Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen:

1. Es sey D = 765, und d = 356. Da hier der Zeiger der Ziffer 3 in der höchsten Stelle des Divisors 2 ist, d. i. weil hier die Ziffer 3 Einheiten der zweyten Ordnung bedeutet: so schneide man nach

Digitized by Google

Nro. 1 im Dividend von der Rechten gegen die Linke zwey Ziffern (7|65) in Gedanken ab, und da die Zahl $D' = 7 < 10.3 = 30$, so dividire man nach §. 65. die Zahl 7 durch 3, so findet man $q = 2$. Man dividire also $D = 765$ durch 2, nach der Vorschrift in Nro. 2, so findet man 382, welche Zahl größer als der Divisor 356 ist, welches man schon aus der zweyten Ziffer (8) hier beurtheilen kann, folglich ist 2 der gesuchte Quotient. — Man vergleicht immer den Quotienten $\frac{D}{q}$ stellenweis mit dem Divisor d gleich bey der Division, die man natürlich bloß in Gedanken zu verrichten sich angewöhnen muß, so ist jene von beyden Zahlen die größere, welche eine frühere Stelle (von der Linken gegen die Rechte) mit einer höhern Ziffer besetzt hat, und man hat nicht immer nöthig, den Quotienten $\frac{D}{q}$ ganz zu entwickeln.

2. Es sey $D = 26834$, und $d = 8136$. Die 8 im Divisor bezeichnet Einheiten der dritten Ordnung, man schneide also im Dividend drey Stellen ab (26|834) und dividire die links stehende Zahl 26 durch 8, so findet man 3 zum Quotienten. Nun ist $26834 : 3 = 89.. ..... > d = 81....$; folglich ist 3 der gesuchte Quotient.
3. Es sey $D = 261458$ und $d = 89304$. Man hat hier wieder 26 (26|1458) durch 8 zu dividiren, und der Quotient ist wieder 3. Weil aber $261458 : 3 = 87 \ldots < d = 89 \ldots$ so ist der Quotient zu groß; man nehme also $3 - 1 = 2$, so ist $261458 : 2 = = 130729 > d = 89304$, und demnach ist 2 der gesuchte Quotient.
4. Es sey $D = 234069$ und $d = 29845$. Hier hat man (23|4069) 23 durch 2 (die höchste Stelle des Divisors) zu theilen, man nehme also, weil $23 > 10.2$, für den Quotienten die Ziffer 9 (nach Nro. 3.). Da nun $234069 : 9 = 26 \ldots < d = 29 \ldots$; so versuche man die Ziffer 8. Es ist $234069 : 8 = 292 \ldots < 298 \ldots$, folglich ist auch 8 noch zu groß. Nimmt man 7, so findet man $234069 : 7 = 3 \ldots > d = 298 \ldots$; demnach ist 7 der gesuchte Quotient.

§. 68.

Eine mehrzifferige Zahl D durch eine kleinere mehrzifferige Zahl d zu dividiren.

1) Man mache den Ansatz wieder wie im §. 66; schneide von D von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als d hat, und

Digitized by Google

wenn die links vom Dividend abgeschnittene Zahl, die wir mit D′ bezeichnen und Partial-Dividend nennen wollen, kleiner ist als d; so schneide man im Dividend eine Ziffer mehr ab.

2) Man untersuche nun nach §. 67, wie viel Mahl d in D′ enthalten sey, bemerke sich den gefundenen Partial-Quotienten und ziehe das Product aus demselben in d von D′ ab.

3) Hierauf setze man zu dem gebliebenen Reste die nächst folgende Ziffer des Dividends herab, und dividire diesen so erhaltenen zweyten Partial-Dividend D″ durch d nach §. 67., setze den gefundenen Quotienten dem ersten rechts zur Seite, und ziehe das Product aus demselben in d von D″ ab.

4) Zu dem neuen Reste setze man wieder die nächst folgende Ziffer des Dividends herab, und verfahre wie in Nro. 3. Auf diese Art fahre man fort, bis alle Ziffern des Dividends nach und nach herabgesetzt sind. — Stößt man ein Mahl auf einen Partial-Dividend, welcher kleiner als d ist, so wird im Quotienten eine Null gesetzt, und zum vorigen Partial-Dividend gleich die nächste Ziffer des Dividends herabgesetzt.

Z. B. Man dividire die Zahl 96245508 durch 2598.

Rechnung.

Divisor.	Dividend.	Quotient.
2598	96245508	37046
	— 7794	
	18305	
	— 18186	
	" 11950	
	— 10392	
	15588	
	— 15588	
	"	

Wir werden auch hier wieder in der Folge die Producte aus den Partial-Quotienten in den Divisor gleich von den zugehörigen Partial-Dividenden abziehen. Nach dieser Bemerkung steht die Rechnung kürzer, also:

Digitized by Google

$$d = 2598 \quad \left| \begin{array}{l} D = \overset{4\,3\,2\,1}{96245508} \\ \quad 18305 \\ \quad \text{''}\ 11950 \\ \qquad 15588 \\ \qquad \text{''}\ \text{''}\ \text{''} \end{array} \right| \begin{array}{l} \overset{4\,3\,2\,1}{37046} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Weil hier die Division aufgegangen ist, so ist 37046 der vollständige Quotient.

Von der Richtigkeit der Rechnung kann man sich auf folgende Art überzeugen. Es ist

$$\begin{array}{lll} \overset{4}{3}.2598 = & \overset{4}{7794} = & 77940000 \\ \overset{3}{7}.2598 = & \overset{3}{18186} = & 18186000 \\ \overset{2}{0}.2598 = & \overset{2}{0} = & 000 \\ \overset{1}{4}.2598 = & \overset{1}{10392} = & 103920 \\ 6.2598 = & 15588 = & 15588 \quad \text{also durch} \end{array}$$

Addition $(\overset{4}{3} + \overset{3}{7} + \overset{2}{0} + \overset{1}{4} + 6).2598 = 96245508$ d. i.

$$37046 \,.\, 2598 = 96245508.$$

Da der Quotient, mit dem Divisor multiplizirt, den Dividend gibt, so ist die Rechnung richtig.

Anmerkung. Da der Quotient immer die Benennung des Dividends hat, so läßt sich immer im Voraus beurtheilen, welchen Localwerth die höchste Ziffer im Quotienten habe, und demnach auch, aus wie vielen Ziffern der Quotient als ganze Zahl bestehen werde. Der erste Partialdividend in unserem Beyspiele war 9624^{4}, oder 96240000, oder wir dividirten Einheiten der vierten Ordnung, folglich muß sich auch die höchste Ziffer des Quotienten, oder der erste Partialquotient auf Einheiten der vierten Ordnung beziehen, d. i. der Quotient muß fünfziffrig seyn. Von dieser Bemerkung werden wir in der Folge Gebrauch machen, und der Anfänger wird also gut thun, bey seinen Übungen immer noch vor der Division die Anzahl der Ziffern des Quotienten auszumitteln.

Beyspiel 2. Man dividire die Zahl 347836549 durch 74096.

Rechnung.

$$74096 \left| \begin{array}{l} 347836549 \\ \quad 514525 \\ \quad\ 699494 \\ \qquad 326309 \\ \qquad\ 29925. \end{array} \right| \begin{array}{l} 4694 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Da hier die Division nicht aufging, so ist 4694 der nächst klei-

Digitized by Google

nere Quotient, und 29925 ist der Rest, der noch durch 74096 zu dividiren ist.

Zusatz 1.

Endigt sich der Divisor mit einer oder mehreren Nullen, so schneide man im Dividend von der Rechten gegen die Linke eben so viele Ziffern ab, und theile die links stehende Zahl durch den Divisor ohne die Nullen. Der so gefundene Quotient ist mit dem gesuchten einerley, und der so gefundene Rest, wenn ihm die abgeschnittenen Ziffern des Dividends rechts beygefügt werden, ist ebenfalls der gesuchte. Sollte man z. B. die Zahl 476583 durch 2800 dividiren, so dividire man bloß die Zahl 4765 durch 28; man setze nähmlich:

$$\begin{array}{l|l|l} 2800 & 476583 & 170, \\ & 196 & \\ & \text{und } 5 & \end{array}$$

mithin ist 170 der Quotient, und 583 der Rest.

Zusatz 2.

Die vollkommen richtige arithmetische Probe für die Division liegt in der Erklärung des Begriffes von der Division.

Man multiplizirt nähmlich den gefundenen Quotienten mit dem Divisor, und vermehrt das Product um den gebliebenen Rest. Ist das Resultat dem Dividende gleich, so ist die Division richtig verrichtet worden.

§. 69.

Allgemeine Sätze von Producten und Quotienten.

I. Ein Product mM durch den Multiplicator m dividirt, gibt den Multiplicand M zum Quotienten, nähmlich es ist

1) $(m.M):m=M.$

Ein Quotient q durch den Divisor d multiplizirt, gibt den Dividend D zum Producte; nähmlich es ist:

2) $d.q=D$ wenn $\frac{D}{d}=q$ ist;

oder wenn man statt q den angezeigten Quotienten $D:d$ setzt;

3) $d.(D:d)=D.$

Da ferner $m.M=M.m$, so ist auch $(m.M):m=(M.m):m$, oder $(m.M):m=M$, folglich auch

4) $(M.m):m=M;$

Digitized by Google

d. h. wenn man ein Product aus zwey Factoren durch einen derselben dividirt, so findet man den andern Factor zum Quotienten.

II. Wenn $m.M=N$, also $m=\frac{N}{M}=N:M$ gesetzt wird; so erhält man durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung

$$(m.M):m=M \text{ nun}$$

$$N:\frac{N}{M}=M, \text{ oder } N:(N:M)=M;$$

d. h. wenn eine Zahl N durch eine andere M theilbar ist, d. h. wenn jene durch diese ohne Rest dividirt werden kann, und man theilt den Dividend N durch den Quotienten N:M; so erhält man den Divisor M.

III. Dividirt man ein Product aus mehreren Factoren, die lauter ganze Zahlen seyn mögen, durch das Product aus einigen derselben; so erhält man das Product der übrigen Factoren zum Quotienten. Z. B.

$$(ABCDEF):(ACF)=BDE, \text{ denn es ist}$$

$$ABCDEF:ACF=(ACF.BDE):(ACF)$$

$$=(ACF).(BDE):(ACF)=BDE,$$

nach Nro. I. 4.

IV. Dividirt man die Summe von zwey oder mehreren gleichartigen Größen durch eine unbenannte Zahl; so ist der Quotient gleich der Summe der Quotienten, die erhalten werden, wenn jede der gegebenen Größen durch den Divisor getheilt wird; d. h. wenn A und B was immer für zwey gleichartige Größen bezeichnen, und d eine unbenannte Zahl ist, so ist

$$(A+B):d=(A:d)+(B:d), \text{ oder } \frac{A+B}{d}=\frac{A}{d}+\frac{B}{d}.$$

Denn es sey $\frac{A}{d}=Q$, und $\frac{B}{d}=Q'$; so ist $dQ=A$, und $dQ'=B$ mithin durch Addition

$$dQ+dQ'=A+B \text{ oder}$$

$$d(Q+Q')=A+B, \text{ folglich nach Nro. I. 4.}$$

$$\frac{A+B}{d}=Q+Q', \text{ d. i.}$$

$$(A+B):d=\frac{A}{d}+\frac{B}{d},$$

wenn statt Q und Q' wieder ihre Werthe gesetzt werden.

Auf eben diese Art überzeugt man sich von der Wahrheit der Gleichung:

$$(A+B+C+D+\ldots):d=\frac{A}{d}+\frac{B}{d}+\frac{C}{d}+\frac{D}{d}+\ldots$$

Digitized by Google

V. Aus der Gleichung

$$(A+B):d=(A:d)+(B:d) \text{ folgt}$$
$$(A+B):d-(A:d)=(B:d), \text{ oder}$$
$$\frac{B}{d}=\frac{A+B}{d}-\frac{A}{d}.$$

Setzt man hier $A+B=C$, also $B=C-A$, so findet man,

$$\frac{C-A}{d}=\frac{C}{d}-\frac{A}{d},$$

d. h. die Differenz zweyer Größen wird durch eine unbenannte ganze Zahl dividirt, wenn man sowohl den Minuend als den Subtrahend durch d dividirt, und die beyden gefundenen Quotienten von einander abzieht.

VI. Da nach Nro. IV. $(A+B+C+D+....):d=$

$$=\frac{A}{d}+\frac{B}{d}+\frac{C}{d}+\frac{D}{d}+; \text{ so ist, wenn}$$
$$A=B=C=D=..... \text{ gesetzt wird,}$$
$$(A+A+A+A+....):d=\frac{A}{d}+\frac{A}{d}+\frac{A}{d}+\frac{A}{d}.....$$

oder wenn die Anzahl der Summanden gleich n ist,

$$(n.A):d=n.\frac{A}{d}=n(A:d),$$

d. h. es ist einerley, ob man eine Größe A zuerst mit einer unbenannten Zahl n multiplizirt, und das Product durch die unbenannte Zahl d dividirt; oder ob man jene Größe erst durch d dividirt, und den gefundenen Quotienten mit n multiplizirt.

VII. Es ist nach (§. 44. Zus. 3.) $m.(nA)=(mn).A$. Setzt man nun $A=\frac{B}{n}$, also $B=An=nA$; so ist $m.B=(mn).\frac{B}{n}$ $=\frac{B}{n}.(mn)$, und eben so $mB=(m:n).(nB)=\frac{m}{n}.nB$, d. h. ein Product bleibt dem Werthe nach ungeändert, wenn man den einen Factor mit einer unbenannten Zahl n multiplizirt, dagegen aber den andern Factor mit derselben unbenannten Zahl dividirt.

VIII. Aus der Gleichung $m.B=(m.n).\frac{B}{n}$ folgt

$$mB:m.n=\frac{B}{n} \text{ oder } B:n=B.m:m.n,$$

d. h. wenn man den Dividend B und den Divisor n mit derselben unbenannten Zahl m multiplizirt; so bleibt der Quotient dem Werthe nach unverändert.

IX. Setzt man in der letzten Gleichung $B=\frac{A}{m}$ und $n=\frac{p}{m}$;

Digitized by Google

also $mB=A$, und $mn=p$; so erhält man $\frac{A}{m} : \frac{p}{m} = A : p$, oder

$$A:p=(A:m):(p:m) \text{ oder } \frac{A}{p}=\frac{A:m}{p:m};$$

d. h. ein Quotient bleibt dem Werthe nach ungeändert, wenn man Dividend und Divisor durch dieselbe unbenannte Zahl m dividirt.

X. Es ist nach Nro. VII. $m.B=\left(\frac{m}{n}\right).Bn$. Setzt man hier $B=\frac{A}{n}$, also $nB=A$; so erhält man

$$m\left(\frac{A}{m}\right)=\frac{m}{n}.A, \text{ oder } m(A:n)=(m:n).A;$$

d. h. ein Quotient $\frac{A}{n}$ wird mit einer unbenannten ganzen Zahl m multiplizirt, wenn man den Dividend mit dem Quotienten multiplizirt, welcher gefunden wird, indem man jene unbenannte Zahl m durch den Divisor n dividirt.

XI. Weil $A:p=\frac{A}{m}:\frac{p}{m}$ (Nro. IX.); so ist auch, wenn $A=mB$, also $\frac{A}{m}=B$ gesetzt wird,

$$mB:p=B:\frac{p}{m}, \text{ oder } (mB):p=B:(p:m);$$

d. h. ein Product mB wird durch eine unbenannte ganze Zahl p dividirt, wenn man den Multiplicand B durch die ganze Zahl dividirt, welche herauskommt, wenn der Divisor p durch den Multiplicator m dividirt wird.

XII. Weil $B:n=B.m:nm$ (Nro. VIII.); so ist auch, wenn man $B=\frac{A}{m}$, also $Bm=A$ setzt,

$$\frac{A}{m}:n=A:mn, \text{ oder } (A:m):n=A:(mn)$$

$$\text{und } A:(mn)=\frac{A}{m}:n=(A:m):n;$$

d. h. ein Quotient $(A:m)$ wird durch eine unbenannte Zahl n dividirt, wenn man den Dividend A durch das Product der beyden Divisoren m und n dividirt, und umgekehrt, wenn eine Größe A durch das Product mn zu dividiren ist, so wird der Quotient gefunden, wenn man die Größe A erst durch den einen Factor m, und dann den gefundenen Quotienten auch noch durch den andern Factor n dividirt.—

Digitized by Google

Dieser Satz gilt auch noch, wenn der Divisor mehrere Factoren hat. So z. B. ist

$$A:abc=[(A:a):b]:c.$$

XIII. Weil nun $\frac{A}{mn}=\left(\frac{A}{m}\right):n$, also auch $\frac{A}{n.m}=\left(\frac{A}{n}\right):m$, und $mn=n.m$ ist, so muß auch

$$\frac{A}{mn}=\frac{A}{n.m}, \text{ d. i. } \left(\frac{A}{m}\right):n=\left(\frac{A}{n}\right):m,$$

oder $(A:m):n=(A:n):m$ seyn.

Soll demnach eine Größe A durch zwey Größen m und n, d. i. durch das Product derselben dividirt werden; so bleibt der Quotient derselbe, in welcher Ordnung die Factoren als Divisoren gebraucht werden. Es ist demnach

$$A:(abc)=((A:a):b):c=((A:b):a):c=$$
$$=((A:b):c):a=((A:c):a):b=\text{ etc.}$$

XIV. Aus der Gleichung $mB=(m:n).nB$ (Nro. VII) folgt:

$$mB:(m:n)=nB,$$

und wenn $mB=A$, folglich $B=\frac{A}{m}$ gesetzt wird,

$$A:(m:n)=n.\frac{A}{m}=n.(A:m);$$

d. h. eine Größe A wird durch einen Quotienten $\frac{m}{n}$ dividirt, wenn man die Größe A durch den Dividend m dividirt, und den Quotienten mit dem Divisor n multiplizirt.

Umgekehrt heißt die Gleichung

$$n.(A:m)=A:(m:n),$$

d. i. ein Quotient $(A:m)$ wird durch eine unbenannte ganze Zahl n multiplizirt, wenn man den Dividend A durch den Quotienten dividirt, der gefunden wird, indem man den Divisor m durch jene unbenannte Zahl n dividirt.

XV. Aus der Gleichung $(A:p)=(A:m):(p:m)$ (Nro. XI.) folgt $(A:p).(p:m)=(A:m)$, und wenn $A:p=B$, folglich $A=pB$ gesetzt wird, so ist

$$B.(p:m)=pB:m, \text{ oder } B.\frac{p}{m}=\frac{pB}{m};$$

d. h. eine Größe B wird durch einen Quotienten $p:m$ multiplizirt, wenn man die Größe B durch den Dividend p multiplizirt, und das Product durch den Divisor m dividirt.

Umgekehrt heißt diese Gleichung

Digitized by Google

$$\frac{pB}{m} = \frac{p}{m}.B, \text{ oder } pB:m = (p:m)B;$$

d. h. ein Product wird durch eine unbenannte Zahl m dividirt, wenn man den einen Factor p durch m dividirt, und mit dem gefundenen Quotienten die Größe B multiplizirt.

XVI. Es ist nach Nro. IX.

$A:p = (A:m):(p:m)$ folglich $(p:m).(A:p) = (A:m)$.

Setzt man nun hier $p = da$, $m = db$ und $A = ac$, so erhält man:

$$(da:db).(ac:da) = (ac:db),$$

oder weil nach Nro. VIII. $da:db = a:b$ und $ac:da = c:d$

$$(a:b).(c:d) = ac:db, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

d. h. zwey Quotienten werden mit einander multiplizirt, wenn man das Product der Dividende durch das Product der Divisoren dividirt.

Also ist auch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{eg}{fh} = \frac{aceg}{bdfb}.$$

XVII. Aus der Gleichung $(a:b).(c:d) = ac:bd$ folgt, $a:b = (ac:bd):(c:d)$, oder $(ac:bd):(c:d) = a:b$, oder

$$\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b},$$

und wenn $ac = m$, $bd = n$, also $a = \frac{m}{c} = m:c$, und $b = \frac{n}{d} = n:d$ gesetzt wird:

$$\frac{m}{n} : \frac{c}{d} = \frac{m:c}{n:d};$$

d. h. zwey Quotienten werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten aus den Dividenden durch den Quotienten aus den Divisoren dividirt, indem man die Theile des Dividends jedes Mahl als Dividende annimmt.

XVIII. Setzt man in der Gleichung $A:p = (A:m):(p:m)$ (Nro. IX.) nun $A = ac$, $p = bd$, und $m = ad$; so erhält man

$$ac:bd = (ac:ad):(bd:ad) = (c:d):(b:a),$$

nähmlich $(c:d):(b:a) = ac:bd$, oder

$$\frac{c}{d} : \frac{b}{a} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b};$$

d. h. zwey Quotienten werden auch durch einander dividirt, wenn man das Product aus dem Dividend des Dividends (des ersten Quotienten) in den Divisor des Divisors durch das Product aus dem Di-

Digitized by Google

visor des Dividends in den Dividend des Divisors dividirt, oder wie man sich kürzer ausdrücken kann: Wenn man den Dividend durch den umgekehrten Divisor (welchen der zweyte Quotient vorstellt) multiplizirt.

XIX. Es ist $\frac{ABCDEFG}{BDFGLM} = \frac{(BDFG).(ACE)}{(BDFG).LM} = \frac{ACE}{LM}$;

d. h. wenn ein Product aus mehreren ganzen Factoren durch ein anderes Product zu dividiren ist, und es haben Dividend und Divisor gemeinschaftliche Factoren, so kann man diese in beyden Größen gegen einander weglassen. Z. B.

$$\frac{3.5.7.12}{3.7.4} = \frac{5.12}{4} = \frac{60}{7} = 15.$$

§. 70.

Positive und negative Größen durch einander zu dividiren.

Man dividire den Dividend durch den Divisor, als wenn sie beyde positiv wären, und nehme dann den Quotienten positiv, oder negativ, je nachdem beyde Größen einerley oder verschiedene Zeichen haben; ist nähmlich d eine unbenannte positive Zahl, und D was immer für eine positive Größe, so ist, wenn $D:d=q$ gesetzt wird:

1) $D:d=q$
2) $-D:d=-q$
3) $D:-d=-q$
4) $-D:-d=q$,

denn ist $D:d=q$; so ist $dq=D$, also nach §. 44. Zus. 8, auch

$$d.(-q)=-dq=-D$$
$$(-d).(-q)=+dq=D$$
$$(-d).q=-dq=-D.$$

Da nun der Divisor, mit dem angegebenen Quotienten multiplizirt, jedes Mahl den Dividend gibt, so ist die angegebene Regel auch richtig.

Nimmt man die erste und letzte, und dann auch die zweyte und dritte Formel zusammen, so lassen sie sich auch so darstellen:

$$(\pm D):(\pm d)=+q$$
$$(\pm D):(\mp d)=-q$$

Diese beyden Formeln pflegt man kurz so auszudrücken: Einerley Zeichen geben +, und verschiedene geben — im Quotienten.

Digitized by Google

Zusatz

Also ist auch

$$-D:d=-q=-(D:d)$$
$$D:(-d)=-q=-(D:d)$$
$$(-D):(-d)=+q=+(D:d).$$

§. 71.

1) Eine Potenz a^m wird durch eine andere Potenz a^n derselben Größe a dividirt, wenn man diese nur ein Mahl setzt, und vom Exponent des Dividends den Exponenten des Divisors abzieht; nähmlich es ist $a^m:a^n=a^{m-n}$; denn es ist $a^n \cdot a^{m-n}=a^{n+m-n}=a^m$, d. i, der Divisor mit dem Quotienten multiplizirt, gibt den Dividend. —

Wenn $m>n$; so ist die Bedeutung des Quotienten für sich klar; wir müssen aber die beyden andern Fälle, wenn nähmlich m gleich oder kleiner als n ist, einzeln betrachten.

2) Ist $m=n$, so ist der angeführten Regel zu Folge $a^m:a^m=a^{m-m}=a^0$, aber es ist auch $a^m:a^m=1$ (§. 63. Zus. 3), folglich auch $a^0=1$, d. h. jede Größe mit dem Exponenten Null ist $=1$.

3) Ist $m<n$, so läßt sich eine solche Zahl x zu m addiren, damit die Summe $m+x=n$ werde; dann ist $a^m:a^n=a^m:a^{m+x}=\frac{a^m}{a^{m+x}}=\frac{1 \cdot a^m}{a^m \cdot a^x}=\frac{1}{a^x}$ (§. 69. XIX.), und nach der obigen Regel ist:

$a^m:a^n=a^{m-n}=a^{m-(m+x)}=a^{-x}$; folglich ist auch $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ d. h. jede Größe mit einem negativen Exponenten ist gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Größe mit demselben positiven Exponenten. Umgekehrt ist $\frac{1}{a^x}=a^{-x}=1 \cdot a^{-x}$.

4) So ist also auch $a^{-m}b^n=\frac{1}{a^m} \cdot b^n=\frac{b^n}{a^m}$ (§. 69. XV.). Hieraus folgt, daß ein Factor mit einem negativen Exponenten nur dem Scheine oder der Form nach ein Factor sey, denn im Grunde ist er ein Divisor.

5) Es ist $\frac{a^m}{b^{-n}}=a^m:b^{-n}=a^m:\frac{1}{b^n}=a^m:(1:b^n)=b^n \cdot \frac{a^m}{1}$ (§. 69. XIV.) $=b^n \cdot a^m$ (§. 63. Zus. 3.) $=a^m \cdot b^n$. Also ist ein Divisor mit negativen Exponenten nur der Form nach ein Divisor, im Grunde ist er ein Factor.

Digitized by Google

6) Sind Dividend und Divisor durch verschiedene Buchstabengrößen dargestellt, so wird der Quotient in der Form eines Bruches angedeutet. Ist z. B. a b c durch d e zu dividiren, so schreibt man $\frac{abc}{de}$.

Zusatz.

I. Es ist also

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)} \text{ und}$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = (1 : a^m) \cdot (1 : a^n) = \frac{1 \cdot 1}{a^m \cdot a^n}$$

(§. 69. XVI.),

$$= \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n} \text{ oder}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)}.$$

Wir sehen demnach, daß die §. 51. III. gegebene Multiplicationsregel auch dann noch gültig sey, wenn einer, oder wenn beyde Factoren negative Exponenten haben.

II. Es ist $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot \frac{a^n}{1} = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$

und $a^{-m} : a^{-n} = (1 : a^m) : (1 : a^n) = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1 \cdot a^n}{a^m \cdot 1}$ (§. 69. XVIII.) $= \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n} = a^{-m-(-n)}$.

Also ist die in Nro. 1 des Paragraphen angegebene Regel auch für negative Exponenten gültig.

III. Es ist $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m \times -n}$ und

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdots = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots}{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots} \text{ (§. 69. XVI.)}$$

$$= \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{-m \times n},$$

endlich $(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = a^{-m \times -n}$.

Folglich ist die §. 52 gegebene Regel auch für negative Exponenten gültig.

Digitized by Google

§. 72.

Allgemeine Ausdrücke durch einander zu dividiren.

I. Sind Dividend und Divisor eingliederige Größen, so beobachte man folgende Regeln:

1) Zuerst sehe man auf die Zeichen, sind diese bey beyden Größen dieselben, so wird der Quotient positiv; sind aber die Zeichen in beyden Größen verschieden, so wird der Quotient negativ. (§. 70.)

2) Den Coefficienten des Dividends dividire man durch den Coefficienten des Divisors, wenn jener durch diesen theilbar ist, nach den bekannten Regeln, im entgegengesetzten Falle deute man den Quotienten blos an, indem man die beyden Coefficienten gemeinschaftlichen Factoren hinwegläßt (§. 69. XIX.)

3) Enthalten Dividend und Divisor dieselbe Buchstabengröße, so schreibe man dieselbe nur ein Mahl, und gebe ihr die Differenz zwischen dem Exponenten des Dividends und dem Exponenten des Divisors zum Exponenten; sind aber alle Buchstaben des Divisors von jenen des Dividends verschieden, so deute man den Quotienten blos an.

Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

$36\,a^6 : 4\,a^4 = 9\,a^{6-4} = 9\,a^2$

$48\,a^8\,b^4 : -16\,a^5\,b = -3\,a^{8-5}\,b^{4-1} = -3\,a^3\,b^3$

$-54\,a^3\,b^6\,c^4 : 9\,a^3\,b^5 = -6\,a^0\,b^1\,c^4 = -6\,b\,c^4$

$-72\,a^m\,b^7\,e^{n+3}\,x^4 : -18\,a^{m-3}\,b^6\,c^2\,x\,y^2$

$= +\dfrac{4\,a^{m-(m-3)}\,b^{7-6}\,c^n\,x^{4-1}}{y^2}$

$= 4\,a^2\,b^{-1}\,c^n\,x^3\,y^{-2} = 4\,a^2\,c^n\,x^3\,.\,b^{-1}\,y^{-2}$

$= \dfrac{4\,a^2\,c^n\,x^3}{b\,y^2.}$

$120\,a^4\,c^n\,d^3\,x^5\,y^3 : 15\,a\,b^m\,c^m\,x^4\,z^2 =$

$= \dfrac{8\,a^3\,c^{n-m}\,d^3\,x\,y^3}{b^m\,z^2} = 8\,a^3\,c^{n-m}\,d^3\,x\,y^3\,b^{-m}\,z^{-2}$

$= 8\,a^3\,b^{-m}\,c^{n-m}\,d^3\,x\,y^3\,z^{-2}$

$92\,a^m\,b^r\,c^n\,x\,y^2 : -52\,a^n\,b^{3r}\,c^{-n}\,y^2 =$

$= -\dfrac{92}{52}\,.\,a^{m-n}\,b^{r-3r}\,c^{n-(-n)}\,x\,y^0 =$

$= -\dfrac{23.4}{13.4}\,a^{m-n}\,b^{-2r}\,c^{2n}\,x = -\dfrac{23}{13}\,\dfrac{a^{m-n}\,c^{2n}\,x}{b^r}$

$= -\dfrac{23\,a^{m-n}\,c^{2n}\,x}{13\,b^r}$.

Digitized by Google

Wir sehen demnach, daß alle Factoren des Dividends, die nicht zugleich Factoren des Divisors sind, auch im Quotienten als Factoren erscheinen, daß aber alle Factoren des Divisors, die nicht zugleich im Dividend vorkommen, im Quotienten als Divisoren erscheinen.

II. Wenn ein allgemeiner zusammengesetzter Ausdruck durch eine eingliederige Buchstabengröße zu theilen ist, so muß nach den in I. aufgestellten Regeln jedes Glied des Dividends durch den gegebenen Divisor dividirt werden. (§. 69. IV. und V.)

Beyspiele:

1) $(a+b-c+d-e) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n} - \frac{e}{n}$

2) $(24a^3b^5 - 18a^2b^6 + 30a^4b^4 - 42a^2b^8) : 6a^2b^3 =$
$= \frac{24a^3b^5}{6a^2b^3} - \frac{18a^2b^6}{6a^2b^3} + \frac{30a^4b^4}{6a^2b^3} - \frac{42a^2b^8}{6a^2b^3}$
$= 4ab^2 - 3b^3 + 5a^2b - 7b^5.$

3) $(48a^5b^3x^2 - 36a^3bx^4 - 40a^2x^5 + 54ax^6 - 60x^8) : -12a^3x^4$
$= \frac{-4a^2b^3}{x^2} + 3b + \frac{10x}{3a} - \frac{9x^2}{2a^2} + \frac{5x^4}{a^3}$
$= -4a^2b^3x^{-2} + 3b + \frac{10}{3}xa^{-1} - \frac{9}{2}a^{-2}x^2 + 5a^{-3}x^4.$

III. Sind sowohl der Dividend als der Divisor allgemeine zusammengesetzte Ausdrücke, so ordne man beyde nach der in der Anmerkung zum §. 51 gegebenen Vorschrift, dividire dann das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors nach Nro. I., um den ersten Theil des Quotienten zu erhalten, und ziehe das Product aus demselben in den ganzen Divisor vom gegebenen Dividende ab.

Dann dividire man abermahls das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors, so erhält man den zweyten Theil des Quotienten.

Das Product aus diesem zweyten Theile in den Divisor ziehe man vom letzten Reste ab, und dividire das erste Glied des neuen Restes durch das erste Glied des Divisors, um den dritten Theil des Quotienten zu erhalten. Auf diese Art fahre man fort, bis entweder die Division aufgeht, oder bis man endlich auf einen Rest stößt, dessen erstes Glied durch das erste Glied des Divisors nicht mehr theilbar ist. Dieser letzte Rest, getheilt durch den Divisor, ist dann dem gefundenen Quotienten in der Form eines Bruches noch anzuhängen.

Digitized by Google

Die auf diese Art gefundenen Reste müssen jedes Mahl wieder geordnet werden, um auch den Quotienten geordnet zu erhalten.

Folgende Beyspiele mögen diese Regel erläutern:

1) $(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3) : (a^2-2ax+x^2)=a-x=\frac{a^3}{a^2}-\frac{a^2x}{a^2}$

$$\begin{array}{r} a^3-2a^2x+ax^2 \\ -\quad +\quad - \\ \hline -a^2x+2ax^2-x^3 \\ -a^2x+2ax^2-x^3 \\ +\quad -\quad + \\ \hline // \quad // \quad // \end{array}$$

2) $(6+5x-8x^2+9x^3-41x^4+28x^5) : (2+3x-4x^2)=$
$=3-2x+5x^2-7x^3$

$$\begin{array}{r} 6+9x-12x^2 \\ -\quad -\quad + \\ \hline -4x+4x^2+9x^3 \\ -4x-6x^2+8x^3 \\ +\quad +\quad - \\ \hline 10x^2+x^3-41x^4 \\ 10x^2+15x^3-20x^4 \\ -\quad -\quad + \\ \hline -14x^3-21x^4+28x^5 \\ -14x^3-21x^4+28x^5 \\ +\quad +\quad - \\ \hline // \quad // \quad // \end{array}$$

Zu dem Reste $(-4x+4x^2)$, welcher nach Abzug des Productes aus dem Divisor in den ersten Theil des Quotienten erhalten wurde, haben wir nicht alle Glieder des Dividends, wie es eigentlich geschehen müßte, sondern nur das nächste Glied desselben herabgesetzt, und eben so bey allen folgenden Divisionen.

Dieses Verfahren ist demnach ähnlich jenem bey der Division mehrzifferiger bestimmter Zahlen.

Digitized by Google

3) $[3a^5+17a^4b-20a^3bc+20a^3b^2+3a^2b^2-38a^2b^2c+5ab^3+12ab^2c^2+3b^3c-bc^3]:[a^3+4a^2b-6abc+b^2]=$
$= 3a^2 + 5ab - 2bc.$

$3a^5+12a^4b-18a^3bc \qquad +3a^2b^2$
$- \quad - \quad + \qquad\qquad -$

	$5a^4b-2a^3bc+20a^3b^2$		$-38a^2b^2c+5ab^3+12ab^2c^2+.$	
	$5a^4b \qquad +20a^3b^2$		$-30a^2b^2c+5ab^3$	
$-$	$\qquad -$		$+ \quad -$	
	$" \quad -2a^3bc \quad "$		$-8a^2b^2c \quad " \quad +12ab^2c^2+3b^3c-bc^3$	
	$-2a^3bc$		$-8a^2b^2c \qquad +12ab^2c^2-2b^3c$	
	$+$		$+ \qquad - \qquad +$	

Rest $= 5b^3c - bc^3$

Also ist der Quotient $= 3a^2 + 5ab - 2bc + \frac{5b^3c - bc^3}{a^3 + 4a^2b - 6abc + b^2}$.

4) $(256 + 64x^2 - 4x^6 - x^8) : (32 + 16x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5) = 8 - 4x + 2x^2 - x^3$

$256 + 128x + 64x^2 + 32x^3 + 16x^4 + 8x^5$

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

$-128x - 32x^3 - 16x^4 - 8x^5 - 4x^6$

$-128x - 64x^2 - 32x^3 - 16x^4 - 8x^5 - 4x^6$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

Rest $= 64x^2 - x^8$

$64x^2 + 32x^3 + 16x^4 + 8x^5 + 4x^6 + 2x^7$

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

$-32x^3 - 16x^4 - 8x^5 - 4x^6 - 2x^7 - x^8$

$-32x^3 - 16x^4 - 8x^5 - 4x^6 - 2x^7 - x^8$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

$" \quad " \quad " \quad " \quad "$

Divisor $= [x^{n-4} - 4x^{n-3}y - 6x^{n-2}y^2 + 8x^{n-1}y^3 + 10x^n y^4]$

5) Divid. $= [9x^{2n-4} - 43x^{2n-3}y - 21x^{2n-2}y^2 + 91x^{2n-1}y^3 + 16x^{2n}y^4 - 12x^{2n+1}y^5 + 26x^{2n+2}y^6 - 30x^{2n+3}y^7]$

$9x^{2n-4} - 36x^{2n-3}y - 54x^{2n-2}y^2 + 72x^{2n-1}y^3 + 90x^{2n}y^4$

$- \quad + \quad + \quad - \quad -$

$'' \quad - 7x^{2n-3}y + 33x^{2n-2}y^2 + 19x^{2n-1}y^3 - 74x^{2n}y^4 - 12x^{2n+1}y^5$

$- 7x^{2n-3}y + 28x^{2n-2}y^2 + 42x^{2n-1}y^3 - 56x^{2n}y^4 - 70x^{2n+1}y^5$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$

$'' \quad 5x^{2n-2}y^2 - 23x^{2n-1}y^3 - 18x^{2n}y^4 + 58x^{2n+1}y^5 + 26x^{2n+2}y^6$

$5x^{2n-2}y^2 - 20x^{2n-1}y^3 - 30x^{2n}y^4 + 40x^{2n+1}y^5 + 50x^{2n+2}y^6$

$- \quad + \quad + \quad - \quad -$

$'' \quad - 3x^{2n-1}y^3 + 12x^{2n}y^4 + 18x^{2n+1}y^5 - 24x^{2n+2}y^6 - 30x^{2n+3}y^7$

$- 3x^{2n-1}y^3 + 12x^{2n}y^4 + 18x^{2n+1}y^5 - 24x^{2n+2}y^6 - 30x^{2n+3}y^7$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$

$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$

Quot. $= 9x^n - 7x^{n+1}y + 5x^{n+2}y^2 - 3x^{n+3}y^3$.

Digitized by Google

6) $(1-x) : (1+x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \ldots$

$1+x$

$- \quad -$

$-2x$

$-2x - 2x^2$

$+ \quad +$

$\quad 2x^2$

$\quad 2x^2 + 2x^3$

$\quad - \quad -$

$\quad -2x^3$

$\quad -2x^3 - 2x^4$

$\quad + \quad +$

$\quad 2x^4$ &c.

* Man sieht an diesem Beyspiele, daß die Division ohne Ende fortgesetzt werden kann, und daß sie demnach nie aufgehen könne. Wo man also auch immer die Rechnung abbricht, muß immer noch ein Rest beygefügt werden. Übrigens ist das Gesetz, nach welchem die Glieder des Quotienten gebildet werden, sehr einfach, denn man sieht, daß der Coefficient eines jeden auf das erste folgenden Gliedes $= 2$, daß der Exponent von x in jedem Gliede um 1 kleiner sey, als der Index des Gliedes, und daß die Glieder abwechselnd positiv und negativ seyen, daß nähmlich das 1ste, 3te, 5te, 7te, ... Glied positiv, und das 2te, 4te, 6te, 8te, ... Glied negativ sey. Es ist demnach $\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + 2x^6 - \ldots$ $\ldots \pm 2x^{n-3} \mp 2x^{n-2} \pm 2x^{n-1} \mp \frac{2x^n}{1+x}$. Hier drückt das Zeichen $=$ wirklich die Gleichheit der Größe (Quantität) nach aus; schreibt man aber $\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \ldots \pm 2x^{n-3} \mp 2x^{n-2} \pm 2x^{n-1} \mp \ldots$ so drückt das Zeichen $=$ nur die Gleichheit der Form nach aus, nähmlich das Zeichen $=$ sagt dann nur: wenn der angezeigte Quotient entwickelt wird, so hat die Entwickelung die angegebene Form.

7) Eben so ist

$a : (1-x) = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots$

$a - ax$

$- \quad +$

$\quad ax$

$\quad ax - ax^2$

$\quad - \quad +$

$\quad ax^2$ &c.

Digitized by Google

nähmlich

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots + ax^{n-2} + ax^{n-1} + \frac{ax^n}{1-x}$$

oder

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots \text{ ohne Ende}$$

$$= a(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \text{ ohne Ende}).$$

Setzt man hier, weil x jede beliebige Zahl vorstellen kann, $x = 1$; so erhält man

$$\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0} = a + a + a + a + \ldots = a(1 + 1 + 1 + \ldots \text{ ohne Ende}).$$

* Wir erhalten hier die Größe a, welche jeden Werth haben kann, unendlich oft zu sich selbst addirt, d. i. öfter, als durch jede noch so große angebbare Zahl angedeutet werden kann, und demnach muß auch die Summe größer seyn, als jede mögliche noch so große Zahl, die durch Ziffern noch ausgedrückt werden kann. Solche unendlich große Zahlen bezeichnet der Mathematiker durch das Zeichen ∞, und demnach erhalten wir die Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$, d. h. jede Größe durch o, d. i. durch den kleinsten Divisor dividirt, gibt einen unendlich großen (also den größten) Quotienten.

Aus jener Gleichung folgt: $a = o \cdot \infty$, also $\frac{a}{\infty} = o$, d. h. jede Größe durch eine unendlich große Zahl dividirt, gibt o zum Quotienten, oder mit andern Worten: Wenn der Divisor den größten Werth erhält, so erhält der Quotient den kleinsten, d. i. er wird unendlich klein, also kleiner als jede noch so kleine Zahl, die durch Ziffern noch ausgedrückt werden kann.

Die Zahlen, die durch Ziffern richtig bezeichnet werden können, nennt man im Gegensatze der unendlich großen und unendlich kleinen, endliche Zahlen.

§. 73.

1) Die Wurzel eines gegebenen Grades aus einer gegebenen Zahl heißt diejenige Zahl, welche zur so vielten Potenz erhoben, als der gegebene Grad anzeigt, die gegebene Zahl hervorbringt. So z. B. ist 2 die Wurzel des sechsten Grades, oder die sechste Wurzel aus 64, weil $2^6 = 64$ ist.

Die Wurzel des zweyten, dritten und vierten Grades nennt man auch die Quadratwurzel, Kubikwurzel und Biquadratwurzel. So ist z. B. 5 die Quadratwurzel aus 25, 7 die Kubikwurzel aus 343, und 4 die Biquadratwurzel aus 256, weil $5^2 = 25$, $7^3 = 343$, und $4^4 = 256$ ist.

Digitized by Google

2) Die Wurzel eines gegebenen Grades aus einer gegebenen Zahl wird dadurch angedeutet, daß man der gegebenen Zahl das Zeichen $\sqrt{}$ vorsetzt, und in die Öffnung den gegebenen Grad schreibt. So z. B. ist

$$\sqrt[3]{343} = 7, \text{ weil } 343 = 7^3$$
$$\sqrt[4]{1296} = 6, \text{ weil } 1296 = 6^4$$
$$\sqrt[5]{3125} = 5, \text{ weil } 3125 = 5^5$$
$$\sqrt[6]{4096} = 4, \text{ weil } 4096 = 4^6$$
$$\sqrt[7]{128} = 2, \text{ weil } 128 = 2^7.$$

Soll aus einer Zahl die zweyte Wurzel oder die Quadratwurzel gezogen werden, so müßte man in das Zeichen $\sqrt{}$ die Zahl 2 schreiben, allein man pflegt in diesem Falle gar nichts in das Zeichen zu schreiben, und es bedeutet demnach $\sqrt{81}$ so viel als $\sqrt[2]{81}$.

Soll aus einem zusammengesetzten Ausdrucke die Wurzel irgend eines Grades gezogen werden, so klammert man denselben entweder ein, und setzt das Zeichen $\sqrt[n]{}$ vor; oder man verlängert das Zeichen $\sqrt{}$ oben rechts so weit, als der zusammengesetzte Ausdruck geht. Die sechste Wurzel aus $2a + 3b - c$ wird demnach durch $\sqrt[6]{(2a + 3b - c)}$ oder durch $\sqrt[6]{2a + 3b - c}$ bezeichnet.

Das Zeichen $\sqrt{}$ nennt man das Wurzelzeichen (Radical-Zeichen), und die ihm eingeschriebene Zahl, welche den Grad der Wurzel ausdrückt, den Wurzel-Exponenten. Die mit einem Wurzelzeichen behaftete Größe wird Wurzelgröße (Radical-Größe) genannt, und Wurzelgrößen mit demselben Wurzel-Exponenten heißen gleichnahmige Wurzelgrößen.

Zusatz 1.

a) Wir sehen demnach, daß das Wurzelausziehen eine dem Potenziren — Erheben zu einer gegebenen Potenz — gerad entgegengesetzte Rechnungs-Operation sey. Denn Potenziren heißt, eine gegebene Größe so oft als Factor setzen, als der Potenz-Exponent anzeigt, und Wurzelausziehen heißt: eine gegebene Größe (die als Potenz betrachtet wird) in so viele gleiche Factoren zerlegen, als der Wurzel-Exponent andeutet, und einen dieser Factoren angeben. Es ist demnach $\sqrt[m]{a^m} = a$, weil $(a)^m = a^m =$ der gegebenen Größe ist.

Digitized by Google

b) Ist also $(a)^m = a^m = A$; so ist auch $\sqrt[m]{A} = a$, und umgekehrt: wenn $\sqrt[m]{A} = a$ ist, so muß auch $(\sqrt[m]{A})^m = A = a^m$ seyn.

Zusatz 2.

Da $1^m = 1$; so ist umgekehrt $\sqrt[m]{1^m} = \sqrt[m]{1} = 1$.

§. 74.

1. a) Da die Quadrate aller positiven und negativen Größen positiv sind, d. i. da $(\pm A)^2 = A^2$ (§. 54. Zus. 3.), so ist auch $(\pm A)^{2n} = [(\pm A)^2]^n$ (§. 52.) $= (+A^2)^n = (A^2)^n = +A^{2n}$, d. h. jede Potenz, deren Exponent den Factor 2 enthält, oder deren Exponent durch 2 theilbar ist (*), ist positiv, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn.

b) Soll demnach aus einer positiven Zahl eine gerade Wurzel gezogen werden, so muß man dieser das doppelte Zeichen ($\pm$) vorsetzen, weil die Wurzel positiv oder negativ seyn kann, und demnach hat jede gerade Wurzel im Allgemeinen zwey gleiche aber entgegengesetzte Werthe. Welcher von beyden in der Ausübung genommen werden muß, läßt sich meistens aus der Natur der Aufgabe beurtheilen, wie wir in der Folge sehen werden. Es ist demnach $\sqrt{16} = \pm 4$, $\sqrt[4]{625} = \pm 5$, $\sqrt[6]{64} = \pm 2$, u. s. w.; d. h. es ist $\sqrt{16}$ entweder $= +4$, oder $= -4$; eben so $\sqrt[4]{625}$ entweder $= +5$, oder $= -5$; u. s. w.

c) Die Quadratwurzel und überhaupt jede gerade Wurzel aus einer negativen Größe kann demnach weder positiv noch negativ seyn; sie ist daher gar nicht denkbar, und wird deßhalb **eine imaginäre oder unmögliche Größe** genannt. Das Gegentheil der unmöglichen Größe ist die **wirkliche oder mögliche** (reelle) Größe. Das Symbol (Zeichen) der unmöglichen Größen ist $\sqrt{-a}$.

Enthält das Resultat einer Aufgabe eine solche imaginäre Größe, so ist dieß ein sicheres Zeichen, daß die in der Aufgabe gestellte Frage

(*) Solche Zahlen, die durch 2 theilbar sind, d. h. die durch 2 getheilt keinen Rest lassen, heißen **gerade Zahlen**, jede andere Zahl heißt **ungerade**. Also sind 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 .... (2n) gerade Zahlen, und 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 ..... (2n + 1) ungerade Zahlen.

Digitized by Google

widersinnig ist, oder daß sich die Bedingungen der Aufgabe widersprechen, oder sich nicht zusammen denken lassen.

2. a) Hieraus folgt: $(\pm A)^{2n+1} = (\pm A)^{2n} \cdot (\pm A)^1 = +A^{2n} \times \pm A = \pm A^{2n+1}$; d. h. alle ungeraden Potenzen haben das Zeichen ihrer Wurzel, sie sind nähmlich positiv oder negativ, je nachdem ihre Wurzeln positiv oder negativ sind.

b) Soll demnach umgekehrt aus einer gegebenen positiven oder negativen Zahl die Wurzel eines ungeraden Grades gesucht werden, so hat diese das Zeichen ihrer Potenz. So z. B. ist $\sqrt[5]{+32} = +2$, weil $(+2)^5 = +32$, und $\sqrt[3]{-64} = -4$, weil $(-4)^3 = -64$.

§. 75.

Ganze positive Zahlen, wie z. B. 1, 4, 9, 16, 25, ... welche die Eigenschaft haben, daß sie sich genau in zwey vollkommen gleiche Factoren zerlegen lassen, oder welche durch das Quadriren anderer ganzen positiven Zahlen entstehen, heißen vollkommene Quadratzahlen. Eben so heißen ganze positive Zahlen, wie z. B. 1, 8, 27, 64, 125 ...., welche die Eigenschaft haben, daß es andere ganze positive Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 .... gibt, die zur dritten Potenz erhoben, die erstern hervorbringen; vollkommene Kubikzahlen, und so wird man überhaupt einsehen, was man unter vollkommenen Biquadratzahlen, vollkommenen fünften, sechsten u. s. w. und allgemein vollkommenen m^{ten} Potenzen zu verstehen habe.

Ganze positive Zahlen, die keine vollkommene Quadratzahlen sind, wie z. B. 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11 .... heißen unvollkommene Quadratzahlen; ganze positive Zahlen, welche keine vollkommenen Kubikzahlen sind, wie z. B. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 .... heißen unvollkommene Kubikzahlen u. s. w., und so heißen allgemein jene ganzen positiven Zahlen, welche keine vollkommene m^{ten} Potenzen sind, unvollkommene m^{ten} Potenzen.

Soll eine Zahl A auf die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ...., a, $(a+1)$, $(a+2)$ ..... bezogen werden, und es liegt die Zahl A zwischen a^m und $(a+1)^m$, d. h. und es ist $A > a^m$, aber $A < (a+1)^m$; so sagt man: es ist a^m die nächst kleinere m^{te} Potenz in Bezug auf die Zahl A.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Aus vollkommenen Quadratzahlen läßt sich die Quadratwurzel vollkommen genau angeben, so ist z. B. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$. ....

Eben so läßt sich aus vollkommenen Kubikzahlen die Kubikwurzel vollkommen genau bestimmen, so ist z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{125} = 5$ u. s. w.

Allgemein läßt sich aus vollkommenen Potenzen des m^{ten} Grades die m^{te} Wurzel, oder die Wurzel des Grades m vollkommen genau angeben.

Zusatz 2.

Aus unvollkommenen Potenzen des m^{ten} Grades läßt sich, wie wir in der Folge sehen werden, die Wurzel des Grades m nicht genau, sondern nur näherungsweise angeben. — Man nennt die Wurzeln des Grades m aus unvollkommenen m^{ten} Potenzen irrationale, oder incommensurable — unangebbare oder unausmeßbare — Zahlen, im Gegensatze der rationalen oder commensurablen — angebbaren oder meßbaren — Zahlen, welche die Wurzeln aus vollkommenen Potenzen sind, und also vollkommen genau bestimmt werden können. Der Begriff der Irrationalität wird weiter unten noch näher bestimmt werden.

§. 76.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Quadratwurzel als ganze Zahl zu ziehen.

Hier sind zwey Hauptfälle zu unterscheiden, denn entweder ist die gegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl oder nicht.

I. Ist die gegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl, so ist diese a) entweder einzifferig oder zweyzifferig, oder b) sie ist mehrzifferig.

a) Im ersten Falle ist die Wurzel aus dem Einmahleins bekannt. So z. B. ist $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{81} = 9$ u. s. w.

b) Ist die gegebene Quadratzahl mehrzifferig, so beobachte man folgende Vorschriften:

Digitized by Google

1) Man theile die gegebene Zahl nach §. 56. Zuf. in Classen, so weiß man vor der Hand, daß man in der Wurzel eben so viele Ziffern erhalten werde, als Classen sind.

2) Nun suche man eine Zahl, welche aufs Quadrat erhoben, der ersten Classe links entweder ganz gleich wird, oder doch zunächst kommt (§. 75.); so ist jene Zahl die höchste Wurzelziffer.

3) Nun ziehe man das Quadrat der höchsten Wurzelziffer von der ersten Classe zur Linken ab, und setze zu dem etwaigen Reste die zweyte Classe herab.

4) Von der so erhaltenen Zahl schneide man rechts die erste Ziffer ab, und dividire die links stehen gebliebene Zahl durch das Doppelte der ersten Wurzelziffer, so ist der Quotient die zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel.

5) Dem vorhin gebrauchten Divisor setze man die zweyte gefundene Wurzelnote rechts bey, und ziehe das Product aus der so erhaltenen Zahl in den nach Nro. 4 gefundenen Quotienten von der in Nro. 3 erhaltenen vollständigen Zahl ab.

6) Zum erhaltenen Reste setze man wieder die nächst folgende Classe der gegebenen Quadratzahl herab, schneide die erste Ziffer rechts ab, und dividire die links gebliebene Zahl durch das Doppelte der beyden höchsten Wurzelziffern, diese zusammen als Zahl für sich betrachtet; so ist der Quotient die dritte Wurzelnote.

7) Dem nach Nro. 6 gebrauchten Divisor füge man rechts die dritte aufgefundene Wurzelnote bey, multiplizire die so erhaltene Zahl auch mit der dritten Wurzelnote, und ziehe das Product von der in Nro. 6 erhaltenen vollständigen Zahl ab.

8) Auf dieselbe Art wie in Nro. 6 und 7 fahre man so lange fort, bis alle Classen der gegebenen Quadratzahl herabgesetzt worden sind; wo dann am Ende kein Rest mehr bleiben darf, weil wir die gegebene Zahl als vollkommene Quadratzahl vorausgesetzt haben.

9) Sollte man Null zum Quotienten erhalten, so wird diese den bereits gefundenen Wurzelziffern rechts beygefügt, die nächste Classe gleich herabgesetzt, und dann wie in 6 verfahren.

Beyspiel. Man entwickle

$$\sqrt{56836521}.$$

Digitized by Google

Rechnung.

Die beygefügten in Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf die Nummern der eben gegebenen Regeln bey b). Man schreibe nach Nro. 1):

$$\sqrt{56|83|65|21} = 7539$$
$$-7^2 = -49$$
$$783 \quad (3)$$

(4) $78{,}3 : 14 = 5$

(5) $-145.5 = -725$

58

(6) $586{,}5 : 150 = 3$

(7) $-1503 \times 3 = -4509$

1356

(8) $13562{,}1 : 1506 = 9$

(7) $-15069 \times 9 = -135621$

" " " " "

Im Zusammenhange steht die Rechnung also:

$$\sqrt{56|83|65|21} = 7539$$
$$-49$$
$$78{,}3 \quad : 145$$
$$-725 \quad 5$$
$$586{,}5 \quad : \quad 1503$$
$$-4509 \quad 3$$
$$13562{,}1 \quad : \quad 15069$$
$$-135621 \quad 9$$
$$0$$

Kürzer noch verfährt man, wenn man die nach und nach erhaltenen Producte $7.7 = 49$, $145.5 = 725$, $1503.3 = 4509$ und $15069.9 = 135621$ gleich in Gedanken während der Multiplication abzieht, ohne dieselben erst anzusetzen.

Diesem nach würde die Rechnung stehen wie folgt:

Digitized by Google

$$\sqrt{56|83|65|21} = 7539$$
$$783 : 145$$
$$5865 : 1503$$
$$135621 : 15069$$
$$/\!/\ /\!/\ /\!/$$

Von der Gültigkeit der oben aufgestellten Regel, aus gegebenen Quadratzahlen die zweyte Wurzel zu ziehen, kann man sich auf folgende Art überzeugen:

Wir wollen allgemein die Wurzelziffern von der Linken gegen die Rechte mit A, B, C und D bezeichnen. Zuvörderst sehen wir, daß die gesuchte Wurzel nothwendig vier Ziffern haben (§. 56. Zus. a) und daß die erste Classe (56), weil sie keine vollkommene Quadratzahl ist, auch noch etwas von dem Bestandtheile 2AB enthalten müsse (§. 56. Zus. b). Aus diesem Grunde nimmt man die nächst kleinere Quadratzahl 49, deren Wurzel 7 die höchste Ziffer der gesuchten Wurzel ist. Ziehen wir das Quadrat 49 von 56, eigentlich $\overset{6}{49}$ von $\overset{6}{56}$ ab, so bleibt der Rest $\overset{6}{7}$, und es muß demnach der vollständige Rest

$$\overset{6}{7836521} = 2AN + N^2 \text{ seyn,}$$

wo A die erste Wurzelziffer und N die übrigen drey Wurzelnoten B, C, D als Zahl für sich betrachtet, bezeichnet.

Es ist ferner aus §. 56. Zus. klar, daß die Zahl $\overset{6}{783}$ oder $\overset{4}{783}$ die beyden Bestandtheile $2AB+B^2 = 2.7.B+B^2$ enthalten, und daß $\overset{6}{78}$ den Theil 2AB involviren müsse, weil 2AB auf die $\overset{4}{3}$ keinen Einfluß haben kann, weßhalb wir die Ziffer 3 rechts abgeschnitten haben. Da ferner $2AB:2A=B$, oder $2.\overset{3}{7}.B:2.\overset{3}{7}=B$; so ist einleuchtend, daß man den Dividend $\overset{5}{78}$ durch das Doppelte der ersten Wurzelziffer ($\overset{3}{14}$) dividiren müsse, um die nächst niedrigere Stelle der gesuchten Wurzel zu finden; aber $\overset{5}{78} : \overset{3}{14} = \overset{2}{5} = B$ als ganze Zahl.

Nun müßten wir die beyden Bestandtheile nachbilden, welche $\overset{2}{5}$ oder B im Quadrate gibt, nähmlich $2.AB+B^2 = 2.\overset{3}{7}.\overset{2}{5}+\overset{2}{5^2} = 70+25$, und die Summe derselben von dem Reste $2AN+N^2$,

Digitized by Google

oder von $783^{4}6^{2}5^{1}21$ abziehen, um die Summe der Bestandtheile der beyden noch fehlenden Stellen C und D zu finden. Weil aber $2AB+B^2 = (2A+B)B = (2.7^{3}+5^{2})5^{1} = (14^{3}+5^{2})5^{1} = 145^{2}.5^{1} = 725^{4}$, so sehen wir, daß die Summe beyder Bestandtheile sogleich gefunden werde, wenn man dem letzten Divisor 14^{3} die neue gefundene Wurzelnote 5^{2} rechts anhängt, und die so erhaltene Zahl mit derselben Ziffer multiplizirt, welches Product dann von der Zahl 783^{4} abzuziehen ist.

Bezeichnen wir nun die beyden gefundenen Wurzelnoten als Zahl für sich betrachtet, durch S, setzen wir nähmlich $A+B = 75^{2} = S_{2}$; so läßt sich dann auf dieselbe Art zeigen, daß wir auch die dritte Ziffer $C=3^{1}$ auf gesetzmäßigem Wege gefunden haben; denn nachdem wir bereits $(A+B)^2 = S_{2}^2$ von der gegebenen Quadratzahl abgezogen haben; so enthält der Rest $5865^{4}2^{1}21$ nur noch die Bestandtheile, welche die Ziffern C und D im Quadrat geben. Weil aber C Einheiten der ersten Ordnung, also C^2 Einheiten der zweyten Ordnung bezeichnet, so sind die beyden Theile $2.S_{2}.C+C^2$ nothwendig in der Zahl 5865^{2} enthalten, und zwar der Theil $2.S_{2}C = 2.75^{2}.C = 150^{2}.C$, welches Einheiten der dritten Ordnung ausdrückt, in der Zahl 586^{3}, welche also als Dividend genommen werden muß, und durch $2S_{2} = 150^{2}$ zu dividiren ist, um C zu finden; denn $2S_{2}.C : 2S_{2} = C$.

Es ist $586^{3} : 150^{2} = 3^{1}$ als ganze Zahl, mithin $C = 3^{1}$, und $2S_{2}C+C^2 = 150^{2}.3^{1}+3^{2} = (150^{2}+3^{1}).3^{1} = 1503^{1}.3^{1} = 4509^{2}$. Wir dürfen also auch hier wieder dem gebrauchten Divisor 150^{2} nur die neue gefundene Wurzelnote 3^{1} rechts anhängen, und die so erhaltene Zahl 1503^{1} mit derselben Ziffer 3^{1} multipliziren, um die beyden Be-

Digitized by Google

standtheile der Ziffer $\overset{1}{3}$ im Quadrate auf ein Mahl zu finden. Ziehen wir endlich vom obigen Reste $586\overset{2}{5}21$ die Summe $2 . \underset{2}{S} C + C^2 = 450\overset{2}{9}$ ab, so finden wir die Differenz 135621, welche noch die beyden Bestandtheile der vierten Ziffer D im Quadrate enthält, nähmlich $2(A+B+C).D+D^2 = 2.\underset{3}{S}D+D^2 = 2.75\overset{1}{3}.D+D^2$, und der Theil $2\underset{3}{S}D = 2.75\overset{1}{3}.D = 150\overset{1}{6}.D$ kann nur in der Zahl $1356\overset{1}{2}$ enthalten seyn (§. 56. Zus. b.). Nun ist $2\underset{3}{S}.D : 2\underset{3}{S} = D$, oder $1356\overset{1}{2} : 150\overset{1}{6} = \overset{0}{9} = 9$ als ganze Zahl; folglich ist 9 die vierte Ziffer der gesuchten Wurzel, und $2\underset{3}{S}D + D^2 = 150\overset{1}{6}.9 + 9^2 = (150\overset{1}{6}+9)9 = 15069.9 = 135621$, welche Zahl vom obigen Reste 135621 abgezogen die Differenz 0 gibt.

Auf dieselbe Art wird der Beweis geführt, wenn die Wurzel der gegebenen Quadratzahl mehr als vier Ziffern hat.

II. Ist die gegebene Zahl keine vollkommene Quadratzahl, so verfahre man genau nach der in I. b. gegebenen Vorschrift, so findet man die Wurzel der nächst kleineren Quadratzahl, mithin die Wurzel als ganze Zahl, und am Ende wird ein Rest erhalten, den wir uns für jetzt immer bemerken werden. Wie man mit jenem Reste zu verfahren habe, um die gesuchte Wurzel näherungsweise zu bestimmen, werden wir erst in der Folge kennen lernen. Zur Übung folgen hier einige Beyspiele;

1) $\sqrt{7|48} = 27$ als ganze Zahl, folglich $748 = 27^2 + 19$.

$$\begin{array}{l} -4 \\ \hline 348 : 47 \\ -329 \quad 7 \\ \hline \text{Rest } '' \; 19 \end{array}$$

2) $\sqrt{81|45} = 90$ als ganze Zahl, folglich ist $8145 = 90^2 + 45$.

$$\begin{array}{l} 81 \\ \hline -'' \; 45 : 18 \\ \quad\;\; 0 \\ \hline \text{Rest } '' \; 45. \end{array}$$

Digitized by Google

3) $\sqrt{95|37|08} = 971$ als ganze Zahl, folglich ist $943708 = 971^2 + 867$.

−81	
1337 : 187	
−1309	7
2808 : 1941	
−1941	
Rest " 867.	

4) $\sqrt{34|75|00|09|46} = 58949$ als ganze Zahl, folglich ist $3475000946 = 58949^2 + 16345$.

−25	
975 : 108	
−864	8
11100 : 1169	
−10521	9
57909 : 11784	
−47136	4
1077346 : 117889	
−106100.	9
Rest " 16345	

5) $\sqrt{90|40|20|69|47} = 95080$ als ganze Zahl, folglich ist $9040206947 = 95080^2 + 547$.

940 : 185
1520 : 190
152069 : 19008
547 : 19016
Rest 547.

6) $\sqrt{38|45|07|88|75|79} = 620087$ als ganze Zahl, folglich ist $384507887579 = 620087^2 + 10$.

245 : 122
107 : 124
10788 : 1240
1078875 : 124008
8681179 : 1240167
10

Zusatz 1.

Bezeichnet demnach n jede beliebige ganze Zahl, w den Werth von $\sqrt{n}$ als ganze Zahl, mithin w^2 die nächst kleinere Quadratzahl, und r den dazu gehörigen Rest, so ist allgemein:

$$n = w^2 + r, \text{ und } n < (w+1)^2.$$

Für $r = 0$, wird $n = w^2$, also $w = \sqrt{n}$ und n ist eine voll-

Digitized by Google

kommene Quadratzahl, umgekehrt wird, wenn n eine vollkommene Quadratzahl ist, $r = o$.

Zusatz 2.

Weil $n = w^2 + r$, und
$n < (w+1)^2$, so ist auch
$w^2 + r < (w+1)^2$, d. i.
$w^2 + r < w^2 + 2w + 1$
mithin $r < 2w + 1$, oder $r - 1 < 2w$;

d. h. der Rest ist immer kleiner als die um eine Einheit vermehrte doppelte Wurzel, oder der um 1 verminderte Rest ist immer kleiner als das doppelte der genäherten Wurzel.

§. 77.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Kubikwurzel als ganze Zahl auszuziehen.

I. Wenn die gegebene Zahl ein vollkommener Würfel ist, so besteht dieselbe a) aus höchstens drey bedeutenden Ziffern, oder sie besteht b) aus mehr als drey Ziffern.

a) Im ersten Falle ist die Wurzel aus dem §. 58. Zus. 1. angegebenen Täfelchen bekannt. So z. B. ist $\sqrt[3]{64} = 4$, und $\sqrt[3]{512} = 8$.

b) Besteht die gegebene vollkommene Kubikzahl aus mehr als drey Ziffern, so verfahre man nach folgenden Vorschriften:

1) Man theile die gegebene Zahl in Classen nach §. 60. Zus. 3, so weiß man dadurch, wie viel Wurzelziffern man finden müsse.

2) Suche man in dem Täfelchen §. 58. Zus. 1. denjenigen Würfel, welcher entweder der in der ersten Classe links enthaltenen Zahl gleich ist, oder ihr unter den vollkommenen Kubikzahlen am nächsten kommt; die dieser Würfelzahl entsprechende Wurzel setze man als erste Ziffer der gesuchten Wurzel an.

3) Den in Nro. 2 gefundenen Würfel ziehe man von der ersten Classe links ab, und setze zu dem etwa gefundenen Reste die nächste Classe von Ziffern herab.

4) Von der so erhaltenen Zahl schneide man zur Rechten die zwey ersten Ziffern ab, und dividire die links stehen gebliebene Zahl durch das dreyfache Quadrat der ersten gefundenen Wurzelnote; so ist der Quotient die zweyte (von der Linken gegen die Rechte) Ziffer der gesuchten Wurzel.

Digitized by Google

5) Nun bilde man wieder die drey Bestandtheile, welche die zweyte Ziffer im Kubus gibt (§. 60), und ziehe die Summe derselben von der in Nro. 3 erhaltenen vollständigen Zahl ab.

6) Zum gefundenen Reste setze man nun die nächste (dritte) Classe der gegebenen Zahl herab, schneide wieder die zwey ersten Ziffern rechts ab, und dividire die links gebliebene Zahl durch das dreyfache Quadrat der beyden bereits gefundenen Wurzelziffern, diese als Zahl für sich betrachtet, so ist der Quotient die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel.

7) Die Summe der drey Bestandtheile, welche die dritte Wurzelnote im Kubus gibt, ziehe man von der in Nro. 6 erhaltenen vollständigen Zahl ab, setze zum gefundenen Unterschiede die nächst folgende Classe der gegebenen Zahl herab, und dividire, nachdem man von ihr die beyden ersten Ziffern rechts abgeschnitten hat, die links gebliebene Zahl durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen drey Wurzelziffern, diese als Zahl für sich betrachtet, um die vierte Wurzelnote zu finden.

8) Auf diese Art fahre man fort, bis man endlich alle Classen herabgesetzt und alle Ziffern der gesuchten Wurzel bestimmt hat.

9) Sollte man ein Mahl Null zum Quotienten erhalten, so wird diese den bereits gefundenen Wurzelziffern rechts als folgende Wurzelnote beygefügt, die folgende Classe von Ziffern herabgesetzt, und dann wie in Nro. 7 verfahren.

Da die gegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl ist, und von derselben auf die angegebene Art alle constitutiven Theile des Würfels nach und nach hinweggenommen wurden; so kann am Ende kein Rest mehr bleiben.

Beyspiel. Man suche die Kubikwurzel aus der Zahl 624368683323.

Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die unter b) gegeben Vorschriften.

Nach (1) erhält man $\sqrt{624|368|683|323}$ = eine vierziffrige Zahl.

Die Wurzel der nächst kleinern Kubikzahl (512), in Bezug auf die erste Classe (624) ist 8, man erhält demnach nach (3)

624|368|683|323 (8=A

$-8^3 = -512$

112368

nach (4) $1123{,}68 : 3.8^2 = 1123{,}68 : 192 = 5 = B.$

nach (5)
$$\left\{\begin{array}{l} 3.8^2.5 = 960 \\ 3.8\ .5^2 = 600 \\ \qquad 5^3 = 125 \end{array}\right.$$
Summe = 102125, mithin
$$\left\{\begin{array}{r} 112368 \\ -102125 \end{array}\right\} = 10243;$$

nach (6) $102436{,}83 : 3.85^2 = 102436{,}83 : 21675 = 4 = C;$

nach (7)
$$\left\{\begin{array}{l} 3.85^2.4 = 86700 \\ 3.85\ .4^2 = 4080 \\ \qquad 4^3 = 64 \end{array}\right.$$
Summe = 8710864,
demnach
$$\left\{\begin{array}{r} 10243683 \\ -\ 8710864 \end{array}\right\} = 1532819$$
und $15328193{,}23 : 3.854^2 = 15328193{,}23 : 2187948 = 7 = D,$
endlich
$$\left\{\begin{array}{l} 3.854^2.7 = 15315636 \\ 3.854\ .7^2 = 125538 \\ \qquad 7^3 = 343 \end{array}\right.$$
Summe = 1532819323
also
$$\left\{\begin{array}{r} 1532819323 \\ -1532819323 \end{array}\right\} = 0;$$
folglich ist die gesuchte Wurzel = 8547.

Im Zusammenhange wird die Rechnung auf folgende Art zu stehen kommen:

$$\sqrt[3]{624|368|683|323} = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 8 & 5 & 4 & 7 \end{array}$$
$$-8^3 = -512$$
$$1123{,}68 : 192 = 5$$
$$-\left\{\begin{array}{l} 960 \\ 600 \\ 125 \end{array}\right.$$
$$102436{,}83 : 21675 = 4$$
$$-\left\{\begin{array}{l} 86700 \\ 4080 \\ 64 \end{array}\right.$$
$$15328193{,}23 : 2187948 = 7$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
\quad 15328143{,}23 : 2187948 = 7 \\
- \left\{ \begin{array}{r} 15315636 \\ 125538 \\ 343 \end{array} \right. \\
\hline
\quad \text{''} \ \text{''} \ \text{''} \ \text{''} \ \text{''}
\end{array}
$$

Wir haben nähmlich die drey zusammengehörigen Bestandtheile in ihrer gehörigen Aufeinanderfolge nach ihrem Localwerthe unter einander gesetzt, und die Summe derselben gleich in Gedanken vom betreffenden Minuende subtrahirt.

Von der Gültigkeit der gegebenen Vorschrift, aus irgend einer vollkommenen Kubikzahl die dritte Wurzel zu ziehen, kann man sich auf folgende Art überzeugen.

Berücksichtiget man alles das, was im §. 60 und den dortigen Zusätzen gelehrt wurde, so sieht man zuvörderst ein, daß die gesuchte Wurzel aus der gegebenen Zahl vierziffrig sey, daß sich demnach die erste Wurzelnote A auf Einheiten der dritten Ordnung beziehen müsse. Da nun 624 kein vollkommener Würfel ist, und unter allen vollkommenen Kubikzahlen, die kleiner als 624 sind, $512 = 8^3$ die nächstgelegene ist, so ist $\overset{3}{8}$ die erste Wurzelnote. Nehmen wir nun $\overset{3}{8^3} = \overset{9}{512}$ von der gegebenen Zahl hinweg, so erhalten wir

$$
\begin{array}{r}
\overset{9}{624}368683323 \\
-\ 512 \\
\hline
\overset{876}{R' = 112368683323}
\end{array}
$$

zum Reste, welcher noch alle Bestandtheile der folgenden Wurzelnoten B, C und D enthält, nähmlich:

$$
\begin{aligned}
&(3A^2.B + 3AB^2 + B^3) + \\
&+ [3(A+B)^2 C + 3(A+B).C^2 + C^3] \\
&+ [3(A+B+C)^2 . D + 3(A+B+C)D^2 + D^3].
\end{aligned}
$$

Da sich nun in unserem Falle B auf Einheiten der zweyten Ordnung bezieht, also $3A^2B = 3.\overset{3}{8^2}.B = 3.\overset{6}{64}.B$ auf Einheiten der achten Ordnung, und B^3 auf Einheiten der sechsten Ordnung, so kann die Summe $(3A^2B + 3AB^2 + B^3)$ nur auf den Theil $\overset{876}{112368}$ des obigen Restes einen Einfluß haben, und zwar das Glied $3A^2B$ nur auf den Theil $\overset{8}{112}3$, woraus erhellt, daß man zu dem in (b.3) gefundenen Reste 112 nur die nächste Classe 368 herabsetzen, und die beyden ersten Ziffern (68) rechts abschneiden dürfe, um den Dividend

Digitized by Google

$3A^2B$ (der freylich auch noch etwas von den nachfolgenden Bestandtheilen enthält, wie aus der Natur der Zusammensetzung des Würfels einer mehrziffrigen Zahl für sich klar ist) zu erhalten, welcher durch $3A^2$ getheilt, B zum Quotienten gibt. Nun ist $1123 : 3 . 8^2 = 1123 : 192 = 5$, oder eigentlich $\overset{8}{1123} : 3.\overset{3}{8^2} = \overset{8}{1123} : \overset{6}{192} = 5$ (als ganze Zahl); folglich ist 5 die nächst niedrigere Ziffer der gesuchten Wurzel.

Nimmt man nun vom ganzen Reste R' die Summe $3A^2B + 3AB^2 + B^3 = 3.\overset{3}{8^2}.5 + 3.8.\overset{2}{5^2} + \overset{1}{5^3} = \overset{8}{960} + \overset{7}{600} + \overset{6}{125} = \overset{6}{102125}$ hinweg, so findet man

$$R' = \overset{6}{112368683323}$$
$$- 102125$$
$$R'' = \overset{6543}{10243683323}$$

als neuen Rest, welcher noch die Theile

$$[3(A+B)^2 . C + 3(A+B) . C^2 + C^3] +$$
$$+ [3(A+B+C)^2 . D + 3(A+B+C)D^2 + D^3]$$

enthält.

Weil ferner C sich auf Einheiten der ersten Ordnung, mithin C^3 auf Einheiten der dritten, $3(A+B)^2 . C = 3(\overset{3}{8}+\overset{2}{5})^2 . C = 3.\overset{2}{85^2}.C = \overset{4}{21675}.C$ auf Einheiten der fünften, und $3(A+B).C^2 = 3.\overset{2}{85}.C^2$ auf Einheiten der vierten Ordnung sich bezieht, so ist einleuchtend, daß die Summe $3(A+B)^2 . C + 3(A+B) . C^2 + C^3$ nur auf den Theil $\overset{543}{10243683}$, und zwar $3(A+B)^2 . C = \overset{4}{21675}. C$ nur auf den Theil $\overset{5}{102436}$ Einfluß haben könne, woraus die Gültigkeit der in (b.6) gegebenen Vorschrift von selbst erhellt, indem $3(A+B)^2 . C : 3(A+B)^2 = C$, oder $\overset{4}{21675} . C : \overset{4}{21675} = C$ ist. Weil wir nun $\overset{5}{102436}$ für den eigentlichen Dividend, der $= \overset{4}{21675}.C$ ist, erhalten, indem wir den Einfluß der folgenden Bestandtheile auf die Zahl $\overset{5}{102436}$ noch nicht kennen; so ist $\overset{5}{102436} : \overset{4}{21675} = 4$ (als ganze Zahl) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel.

Digitized by Google

Hieraus folgt dann $3(A+B)^2C+3(A+B)C^2+C^3=3.85^2.1+$
$+3.85.4^2+4^3=86700+4080+64=8710864$, welche Zahl von
R'' weggenommen, den neuen Rest $R'''=153281932^3_3$ gibt, der
noch die Summe $3(A+B+C)^2.D+3(A+B+C)D^2+D^3=$
$=3(854)^2D+3.854.D^2+D^3$ enthalten muß. Da endlich in unserem speciellen Falle D primitive Einheiten bezeichnet, mithin die Zahl
$3.854^2.D=2187948^1.D$ Einheiten der zweyten, und $3.854.D^2$
Einheiten der ersten Ordnung ausdrückt, so kann das Glied $3.854^2.D$
nur in dem Theile 153281933^3 von R''' vorkommen, welcher demnach
als Dividend durch die Zahl $3.854^2=2187948^1$ getheilt, den Quotienten $D=7$ gibt; folglich ist die Summe $3.854^2D+3.854.D^2+D^3=$
$=2187948^1.7+2562^1.7^2+7^3=15315636^2+125538^1+343=$
$=153281932^3$, welche Zahl dem letzten Reste R''' gleich ist, und
demnach von diesem abgezogen Null zur Differenz gibt, wie es seyn
muß, weil die gegebene Zahl, als vollkommene Würfelzahl, vorausgesetzt wurde. Es ist also die verlangte Wurzel $=8547$.

Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis geführt, wenn die gesuchte Wurzel noch mehr als vier Ziffern hat.

II. Ist die gegebene Zahl, aus welcher die dritte Wurzel zu ziehen ist, keine vollkommene Kubikzahl, so verfahre man ganz nach der in I. b. gegebenen Regel; so findet man die Kubikwurzel der nächst kleinern Würfelzahl, mithin die Wurzel als ganze Zahl, und noch einen Rest, welchen wir vor der Hand immer zur Seite bemerken werden.

Zur Übung noch folgende Beyspiele:

1) $\sqrt[3]{759|549|058|624}=9124$
-729
$305,49:243\ (=3.9^2)=1$

$-\left\{\begin{array}{l}243..=3.9^2.1\\27.=3.9.1^2\\1=1^3\end{array}\right.$
$5978058:24843\ (=3.91^2)=2$

Digitized by Google

$$5978058 : 24843 \; (= 3.91^2) = 2$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} 49686.. = 3.91^2.2 \\ \quad 1092. = 3.91\;.2^2 \\ \qquad 8 = 2^3 \end{array} \right.$$

$$9985306{,}24 : 2495232 \; (= 3.912^2) = 4$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} 9980928.. = 3.912^2.4 \\ \quad 43776. = 3.912\;.4^2 \\ \qquad 64 = 4^3 \end{array} \right.$$

" " " " "

2) $\sqrt[3]{13|915|786|397|000} = 24053$

$- \; 8$

$$59{,}15 : 12 = 4$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} 48 \\ \;\; 96 \\ \;\;\; 64 \end{array} \right.$$

$$917{,}86 : 1728 = 0$$

$$917863{,}97 : 172800 = 5$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} 864000 \\ \quad 18000 \\ \qquad 125 \end{array} \right.$$

$$52062720{,}00 : 1732075 = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 52056225 \\ \qquad 64935 \\ \qquad\quad 27 \end{array} \right.$$

" " " " 123

folglich ist $13915786397000 = 24053^3 + 123$, nähmlich 24053 ist die Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl als ganze Zahl, und 123 ist der Rest.

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Vom Maß und Vielfachen, von absoluten und relativen Primzahlen und Zerfällung der Zahlen in ihre Factoren.

§. 78.

1) Wenn eine Größe A in einer andern B so viel Mahl enthalten ist, als eine ganze Zahl m anzeigt, d. h. wenn die Größe B durch A dividirt, die ganze Zahl m zum Quotienten gibt, so sagt man, A ist ein Maß von B, oder B wird von A gemessen, oder B ist durch A meßbar oder theilbar, und B ist ein Vielfaches von A, und A ist ein aliquoter Theil von B. Weil z. B. $35 = 5.7$, so ist 7 ein Maß von 35, oder 35 ist durch 7 meßbar, 35 ist ein Vielfaches von 7, und 7 ist ein aliquoter Theil von 35.

2) Jede Größe kann durch sich selbst gemessen werden. — Also kann eine Größe nie kleiner als ihr Maß seyn.

3) Eine ganze Zahl, welche durch keine andere kleinere Zahl, die Einheit ausgenommen, ohne Rest getheilt werden kann, heißt eine absolute Primzahl, oder eine Primzahl an und für sich, oder auch schlechtweg eine Primzahl. Weil z. B. die Zahl 23 durch keine der ganzen Zahlen von 2 bis 22 ohne Rest getheilt werden kann; so ist 23 eine Primzahl. Jede andere ganze Zahl heißt eine zusammengesetzte Zahl oder ein Product.

4) Wenn mehrere Größen A, B, C, D von einer andern M gemessen werden, so heißt M ein gemeinschaftliches Maß der Größen A, B, C, D. So z. B. ist 7 ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen 14, 21, 28, 35.

Sind die Größen M, N, P... gemeinschaftliche Maße von den Größen A, B, C, D, und ist M größer als jede andere Größe, durch welche A, B, C, D gemessen werden können; so heißt M das größte gemeinschaftliche Maß von den Größen A, B, C, D. So z. B. sind die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 gemeinschaftliche Maße von den Zahlen 144, 156, 216; aber eine größere Zahl als 12 gibt es

Digitized by Google

nicht, durch welche die Zahlen 144, 156, 216 zugleich gemessen werden könnten, folglich ist 12 das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

5) Wenn zwey oder mehrere ganze Zahlen außer der Einheit keine ganze Zahl zum gemeinschaftlichen Maße haben, so heißen sie relative Primzahlen, oder Primzahlen gegen einander, wie z. B. die Zahlen 6, 15, 35.

Kommt unter mehreren gegebenen ganzen Zahlen nur eine einzige absolute Primzahl vor, welche größer als 1, und kein gemeinschaftliches Maß der übrigen gegebenen Zahlen ist; so sind es relative Primzahlen, wie z. B. die Zahlen 4, 6, 9, 11, 15, wo 11 eine absolute Primzahl ist. Dagegen sind die Zahlen 7, 21, 28, 42, 84 keine relativen Primzahlen, weil sie die gegebene absolute Primzahl 7 zum gemeinschaftlichen Maße haben. Übrigens können mehrere Zahlen relative Primzahlen seyn, ohne daß eine von ihnen eine absolute Primzahl ist, wie z. B. die oben angeführten Zahlen 6, 15, 35.

6) Wenn eine Größe V von mehreren andern A, B, C.... gemessen werden kann, so heißt V ein gemeinschaftliches Vielfaches, oder ein gemeinschaftlicher Dividend der Größen A, B, C.... So z. B. ist 60 ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 6, 10, 12, 15, d. h. die Zahl 60 ist durch die Zahlen 6, 10, 12 und 15 meßbar.

Wenn eine Größe A von einer andern a das eben so Vielfache (z. B. das mfache) ist, das wie vielfache B von b ist, wenn nähmlich A = m.a und B = m.b; so heißen A und B die Gleichvielfachen von a und b, und a und b heißen ähnliche aliquote Theile von A und B. So z. B. sind die Zahlen 24 und 36 die Gleichvielfachen (nähmlich die Vierfachen) der Zahlen 6 und 9; 6 und 9 aber sind ähnliche aliquote Theile der Zahlen 24 und 36.

Wenn die Größen A, B, C, D.... durch die Zahlen a, b, c, d gemessen werden können, und es ist A die kleinste unter allen ganzen Zahlen, die durch a, b, c, d zugleich meßbar sind; so heißt A das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, oder der kleinste gemeinschaftliche Dividend der gegebenen Zahlen a, b, c, d. So z. B. sind die Zahlen 60, 120, 180, 240, 300, 360.... gemeinschaftliche Dividende von den Zahlen 6, 10, 12 und 15; aber eine kleinere Zahl, als 60, gibt es nicht, welche ein gemeinschaftliches Vielfaches von 6, 10, 12 und 15 wäre; folglich ist 60 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache jener Zahlen.

Digitized by Google

Wenn d die größte unter den gegebenen Zahlen a, b, c, d ist, so ist die erste aus der Reihe von Zahlen d, 2.d, 3.d, 4.d, 5.d..., welche durch die übrigen Zahlen a, b und c gemessen werden kann, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen a, b, c, d.

Das Product aus mehreren ganzen Zahlen ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von ihnen. Sind demnach die gegebenen Zahlen lauter absolute Primzahlen, so ist ihr Product zugleich ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

§. 79.

Wenn zwey Größen A und B von einer dritten m gemessen werden; so wird sowohl ihre Summe A+B als auch ihre Differenz A—B von eben dieser Größe m gemessen.

Denn wenn $\frac{A}{m}$ und $\frac{B}{m}$ ganze Zahlen sind, so müssen auch

$\frac{A}{m} + \frac{B}{m} = \frac{A+B}{m}$ (§. 69. IV.) und $\frac{A}{m} - \frac{B}{m} = \frac{A-B}{m}$

(§. 69. V.) ganze Zahlen sey.

Zusatz.

Hieraus folgt dann von selbst, daß, wenn die Größen A, B, C, D.... von einer andern m gemessen werden, auch ihre Summe A+B+C+D+... durch m theilbar seyn müsse.

Beyspiele. 1) Weil die Zahlen 12 und 18 durch 3 gemessen werden, so ist auch die Summe 12 + 18 = 30 durch 3 ohne Rest theilbar.

2) Weil
$$15 = 3 \cdot 5$$
$$25 = 5 \cdot 5$$
$$30 = 6 \cdot 5$$
$$45 = 9 \cdot 5,$$

so ist auch $15+25+30+45=(3+5+6+9)\,5$,
oder $115=23.5$, mithin $115:5=23$.

3) Weil $352=32.11$
und $297=27.11$
so ist auch $352-297=(32-27).11$
oder $55= 5.11$, mithin $55:11=5$.

Digitized by Google

§. 80.

Wenn die Größe A durch B und B durch C gemessen wird; so ist auch A durch C theilbar.

Denn es sey $A = mB$ und $B = n.C$; so ist $A = m.B = m.nC = mn.C$, folglich $A:C = mn =$ einer ganzen Zahl, weil m und n ganze Zahlen sind.

Beyspiel. Weil $78 = 13.6$ und $6 = 2.3$; so ist auch $78 = 13.6 = 13(2.3) = (13.2).3 = 26.3$.

Zusatz 1.

Setzen wir $mn = n.m = p$, also $A = p.C$; so kann p sowohl durch m als auch durch n ohne Rest getheilt werden, d. h. die ganze Zahl p, welche anzeigt, wie vielmahl C in A enthalten ist, wird sowohl von derjenigen, welche anzeigt, wie vielmahl C in B enthalten ist, als auch von derjenigen, welche anzeigt, wie vielmahl B in A enthalten ist, gemessen.

Zusatz 2.

Wenn A durch B meßbar und A ein gemeinschaftliches Maß mehrerer Größen C, D, E ... ist; so ist auch B ein gemeinschaftliches Maß derselben Größen C, D, E...., und die Quotienten $\frac{C}{B}, \frac{D}{B}, \frac{E}{B}$.... (welche lauter ganze Zahlen sind) werden alle durch den Quotienten $\frac{A}{B}$, welcher ebenfalls eine ganze Zahl ist, gemessen.

Wenn demnach $\frac{A}{B} > 1$ ist; so sind die Quotienten $\frac{C}{B}, \frac{D}{B}, \frac{E}{B}$... nicht relative Primzahlen.

Beyspiel. Weil $\frac{12}{4} = 3$, und 12 ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen 60, 144, 156 ist; so ist auch 4 ein gemeinschaftliches Maß eben dieser Zahlen; aber da der Quotient $12:4 = 3 > 1$ ist, so sind die Quotienten $\frac{60}{4} = 15$, $\frac{144}{4} = 36$ und $\frac{156}{4} = 39$ nicht relative Primzahlen.

Zusatz 3.

Wenn A ein Vielfaches von B, und B ein gemeinschaftlicher Dividend mehrerer Größen C, D, E ist, so ist auch A ein gemeinschaftliches Vielfaches eben dieser Größen. Denn es sey

Digitized by Google

$$A=m.B,\ B=n.C=p.D=q.E,$$

wo m, n, p, q ganze Zahlen bezeichnen; so ist

$$A=m.nC=m.pD=m.qE, \text{ oder}$$

$$\frac{A}{C}=mn,\ \frac{A}{D}=mp,\ \frac{A}{E}=mq.$$

Setzen wir $mn=n'$, $mp=p'$ und $mq=q'$; so ist $\frac{n'}{m}=n$, $\frac{p'}{m}=p$ und $\frac{q'}{m}=q$, d. h. die Zahlen n', p', q', welche ausdrücken, wie vielmahl die Größen C, D, E in der Größe A enthalten sind, werden alle von der Zahl m, welche anzeigt, wie oft B in A enthalten ist, gemessen, und sind demnach, wenn $m=\frac{A}{B}>1$ ist, nicht relative Primzahlen.

Beyspiel. Es ist $720=6.120$, und

$$120=3.40=5.24=8.15, \text{ mithin}$$

$$720=6.120=(6.3)40=(6.5).24=(6.8).15$$
$$=18.40=30.24=48.15,$$

d. i. es ist auch 720 ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 40, 24 und 15, und die Zahlen $18=6.3$, $30=6.5$, und $48=6.8$ sind alle durch 6 meßbar.

§. 81.

Wenn die Größe A ein gemeinschaftliches Vielfaches von B und C ist, und es ist die ganze Zahl, welche anzeigt, wie vielmahl B in A enthalten ist, ein Vielfaches von der ganzen Zahl, welche anzeigt, wie vielmahl C in A enthalten ist, so ist auch C ein Vielfaches von B.

Denn es sey $A=mB=nC$, und $m=p.n$, oder $m:n=p$, so ist $C=A:n=mB:n=pn.B:n=pB$ (§. 69. III.).

Beyspiel. Weil $360=30.12=5.72$, und $30=6.5$ ist; so ist auch 72 ein Vielfaches 12, nähmlich $72=6.12$.

§. 82.

Wenn A durch mehrere Größen B, C, D, ... gemessen wird, und die ganzen Zahlen, welche anzeigen, wie vielmahl diese Größen in A enthalten sind, sind nicht relative Primzahlen; so gibt es noch ein ande-

Digitized by Google

res gemeinschaftliches Vielfaches M der Größen B, C, D..., welches das erstere A mißt, und also kleiner als A ist.

Denn, setzen wir $\frac{A}{B} = m$, $\frac{A}{C} = n$ und $\frac{A}{D} = p$, so müssen die ganzen Zahlen m, n und p irgend ein gemeinschaftliches Maß $q > 1$ haben, weil sie der Voraussetzung gemäß nicht relative Primzahlen sind. Man setze nun $\frac{A}{q} = M$, also $A = q.M$, und $\frac{A}{M} = q =$ einer ganzen Zahl, folglich $A > M$ und $m : q = r$, mithin $m = qr$. Da nun A ein gemeinschaftliches Vielfaches von M und B ist, und die Zahl m, welche anzeigt, wie vielmahl B in A enthalten ist, von der Zahl q, welche andeutet, wie oft M in A enthalten ist, gemessen wird, so muß nach §. 81 auch M ein Vielfaches von B seyn. Eben so beweist man auch, daß M ein Vielfaches von den übrigen Größen C, D..., mithin ein gemeinschaftliches Vielfaches der gegebenen Größen B, C, D... seyn müsse, welches zugleich die Größe A mißt, und folglich kleiner als A ist.

Beyspiel. Es ist die Zahl 5040 meßbar durch die Zahlen 16, 18, 24, nähmlich es ist

$$5040 = 315.16 = 280.18 = 210.24,$$

d. i. es ist 5040 ein gemeinschaftliches Vielfaches von den Zahlen 16, 18, 24; aber die Quotienten 315, 280 und 210 sind nicht relative Primzahlen, weil sie den gemeinschaftlichen Factor 35 enthalten, denn es ist

$$315 = 9.35 = 35.9$$
$$280 = 8.35 = 35.8$$
$$210 = 6.35 = 35.6,$$

also ist auch $(35.9).16 = (35.8).18 = (35.6).24 = 5040$,
oder $35(9.16) = 35(8.18) = 35(6.24) = 5040$,
folglich ist $9.16 = 8.18 = 6.24 = 5040 : 35 = 144$, und
$$5040 = 35.144.$$

Es ist demnach $\frac{5040}{35} = 144 < 5040$ auch ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 16, 18, 24, und zugleich ein Maß vom gegebenen Vielfachen 5040.

Zusatz.

Ist demnach A das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Größen B, C, D..., oder doch wenigstens ein solches Vielfaches, daß

Digitized by Google

es kein kleineres M gibt, welches zugleich ein Maß von A wäre, so sind die Quotienten, welche andeuten, wie oft die Größen B, C, D... in A enthalten sind, relative Primzahlen.

§. 83.

Wenn zwey Größen A und B von derselben dritten Größe C gemessen werden, und es ist der Quotient $\frac{A}{C}$ ein Vielfaches des Quotienten $\frac{B}{C}$; so ist auch B ein Maß von A.

Denn es sey $\frac{A}{C}=m$, $\frac{B}{C}=n$ und $m=p.n$; so ist $A=m.C$, und $B=n.C$. Setzt man in der Gleichung $A=m.C$ nun statt m seinen Werth pn; so erhält man $A=(pn).C=p.(nC)=p.B$; folglich $\frac{A}{B}=p=$ einer ganzen Zahl.

§. 84.

Wenn M ein gemeinschaftliches Maß mehrerer Größen A, B, C... ist, und die Quotienten, welche erhalten werden, indem man diese Größen durch M dividirt, sind nicht relative Primzahlen; so gibt es noch ein anderes gemeinschaftliches Maß N der Größen A, B, C..., welches ein Vielfaches von M und demnach größer als M ist.

Denn es sey $\frac{A}{M}=a$, $\frac{B}{M}=b$, $\frac{C}{M}=c...$, oder $A=M.a$, $B=M.b$, $C=M.c$... die ganze Zahl m sey ein gemeinschaftliches Maß, oder ein gemeinschaftlicher Factor der Quotienten a, b, c..., z. B. $a=m.a'$, $b=m.b'$, $c=m.c'$..., und endlich sey $m.M=N$, folglich $N>M$. Nun ist $A=M.a=M.(m.a')=(Mm)a'=Na'$, $B=M.b=M(mb')=(Mm)b'=N.b'$ und $C=M.c=M(mc')=(Mm).c'=N.c'$, also ist N auch ein gemeinschaftlicher Factor oder ein gemeinschaftliches Maß der Größen A, B, C, welches zugleich ein Vielfaches von M und demnach auch größer als M ist.

Beyspiel. Da
$$108 = 18 . 6$$
$$180 = 30 . 6$$
$$234 = 39 . 6,$$
so ist 6 ein gemeinschaftliches Maß von 108, 180, 234; aber die Zahlen 18, 30, 39 sind nicht relative Primzahlen, weil sie noch den

Digitized by Google

gemeinschaftlichen Divisor 3 haben, indem $18 = 6.3$, $30 = 10.3$, $39 = 13.3$, also ist auch

$$108 = (6.3).6 = 6.(3.6)$$
$$180 = (10.3).6 = 10\,(3.6)$$
$$234 = (13.3).6 = 13\,(3.6),$$

folglich ist auch $3.6 = 18$, welche Zahl ein Vielfaches von 6 und demnach größer als 6 ist, ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen 108 180 und 234.

Zusatz.

Ist demnach M ein gemeinschaftliches Maß mehrerer Größen A, B, C..., und gibt es kein größeres gemeinschaftliches Maß dieser Größen, oder wenigstens kein größeres, welches zugleich ein Vielfaches von M ist; so sind die Quotienten, welche anzeigen, wie oft M in den Größen A, B, C... enthalten ist, relative Primzahlen.

§. 85.

Jedes gemeinschaftliche Vielfache zweyer oder mehrerer Größen wird von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eben dieser Größen gemessen.

Denn es sey M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Größen, und N irgend ein anderes Vielfaches, mithin $N > M$. Wäre nun N nicht theilbar durch M, so müßte irgend ein Rest $R < M$ bleiben. Man nehme an, es sey $N : M = m + \frac{R}{M}$, oder $N = Mm + R$, folglich $N - Mm = R$. Weil nun der Voraussetzung gemäß sowohl M, mithin auch Mm, als auch N ein gemeinschaftliches Vielfaches der gegebenen Größen ist, d. i. weil Mm sowohl als N durch die gegebenen Größen theilbar ist; so müßte auch $N - Mm$ (§. 79), d. i. es müßte auch R, welches kleiner als M ist, durch die gegebenen Größen meßbar seyn, folglich wäre M nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Größen, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Zusatz.

Ist also N zwar ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Größen, aber nicht das kleinste, so ist es doch theilbar durch den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend dieser Größen, und demnach sind die Zahlen, welche andeuten, wie vielmahl die gegebenen Größen in N ent-

Digitized by Google

halten sind, nicht relative Primzahlen. Ist also M ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer gegebenen Größen, und sind die Quotienten, welche erhalten werden, indem man M durch jene Größen dividirt, relative Primzahlen; so ist M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Größen.

§. 86.

Wenn es von zwey Größen A und B solche Vielfache gibt, welche nur um eine Einheit von einander verschieden sind, so sind es relative Primzahlen.

Denn man setze $M = mA$, $N = nB$ und $M - N = 1$. Wären nun A und B nicht relative Primzahlen, so müßten sie ein gemeinschaftliches Maß $p > 1$ haben, d. h. es müßte sowohl A als auch B durch p gemessen werden können; folglich wäre auch jedes Vielfache von ihnen, z. B. mA und nB durch p theilbar, mithin auch $mA - nB$ (§. 79) $= M - N$, d. i. es wäre 1 theilbar durch die ganze Zahl p, was nicht seyn kann.

§. 87.

Wenn es von zwey relativen Primzahlen a und b zwey Vielfache ad und bc gibt, welche einander gleich sind, so muß der Factor, mit welchem die eine der relativen Primzahlen multiplizirt wird, ein Vielfaches der andern jener relativen Primzahlen seyn.

Denn es sey $ad = bc = p$, so ist, weil a und b relative Primzahlen sind, die Größe p zugleich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von c und d (§. 85. Zus.). Aber auch das Product $cd = dc$, welches wir durch q bezeichnen wollen, ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von c und d (§. 78. 6.); folglich muß q durch p gemessen werden können (§. 85), d. i. es muß $\frac{q}{p}$ eine ganze Zahl seyn, welche wir mit m bezeichnen wollen. Hieraus folgt $q = p.m$, mithin ist auch, weil $cd = dc = q$ ist,

$$cd = dc = pm = (ad)\,p = (bc)\,p,$$

oder $cd = (ad)\,p = (ap).d$
und $dc = (bc)\,p = (bp).c$
} folglich $\begin{matrix} c = ap \\ d = bp \end{matrix}$

d. i. die Zahl c, mit welcher b multiplizirt wurde, ist ein Vielfaches der andern relativen Primzahl a, und die Zahl d, mit welcher die

Digitized by Google

Zahl a multiplizirt wurde, ist ein Vielfaches der andern b der relativen Primzahlen.

Zusatz 1.

Sind a und b relative Primzahlen, und wird bc von der ganzen Zahl a gemessen, so muß a auch ein Maß von c seyn. Denn es sey $\frac{bc}{a} = d$; so ist $bc = ad$, folglich muß nach unserem Satze c ein Vielfaches von a und daher durch a theilbar seyn.

Zusatz 2.

Wenn ein Product aus mehreren ganzen Zahlen von einer andern ganzen Zahl m gemessen wird, und jeder Factor des Productes, einen einzigen ausgenommen, ist in Bezug auf m eine Primzahl; so muß m ein Maß des ausgenommenen Factors seyn. Denn es sey das Product abcd, und jeder der Factoren a, b, c, den Factor d ausgenommen, sey in Bezug auf m eine Primzahl, das Product abcd aber sey theilbar durch m; so muß nach Zusatz 1. das Product bcd auch durch m gemessen werden, weil a und m relative Primzahlen sind, und demnach, weil b und m relative Primzahlen sind, auch das Product cd, folglich muß m ein Maß von d seyn, weil auch c und m relative Primzahlen sind.

Hat man demnach ein Product P aus mehreren ganzen Zahlen, deren jede, eine ausgenommen, in Bezug auf die Zahl m eine relative Primzahl ist, und ist der ausgenommene Factor durch m nicht theilbar, so wird auch P durch m nicht gemessen. Besteht aber ein Product P aus mehreren Factoren, deren auch nur ein einziger von der Zahl m gemessen wird, so muß auch P durch m theilbar seyn, was auch schon aus §. 80. Zus. 3. von selbst erhellt.

Zusatz 3.

Ist demnach jeder Factor eines gegebenen Productes P in Bezug auf irgend eine ganze Zahl m eine Primzahl, so sind auch m und P selbst relative Primzahlen, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann. Es sey $P = abcd$, und es seyen m und a, m und b, m und c, m und d relative Primzahlen. Wären nun m und P nicht relative Primzahlen, so müßten sie einen gemeinschaftlichen Factor $f > 1$ haben. Man nehme also an, es sey $\frac{P}{f} = \frac{abcd}{f} = g$, und $\frac{m}{f} = h$, oder

Digitized by Google

$abcd = fg$ und $m = fh$, wo $h < m$ seyn muß, weil $f > 1$ vorausgesetzt wurde. Weil ferner $abcd = fg$ und $m = fh$, so ist auch $abcd.h = fg.h$ und $m.g = fh.g = f.gh$, folglich wäre auch $abcd.h = mg$, und daher $g = \frac{abcd.h}{m} = \frac{Ph}{m}$, d. i. es wäre Ph durch m theilbar. Da endlich Ph durch m gemessen wird, P aber in Bezug auf m eine Primzahl ist (Zus. 2.); so müßte der Factor h durch m theilbar seyn (Zus. 1.), was absurd ist, weil $h < m$ ist.

Zusatz 4.

Hieraus folgt nun von selbst, daß, wenn jede der ganzen Zahlen a, b, c, d, ... in Bezug auf jede einzelne der Zahlen A, B, C, D, ... eine Primzahl ist, auch die Producte $abcd...$ und $ABCD...$ relative Primzahlen seyn müssen.

Zusatz 5.

Sind demnach zwey Zahlen a und b relative Primzahlen, so sind auch was immer für Potenzen derselben, z. B. a^m und b^n Primzahlen unter sich. Nun sind aber zwey verschiedene absolute Primzahlen auch relative Primzahlen, mithin auch zwey Potenzen von ihnen.

Zusatz 6.

Ein Product P aus zwey oder mehreren Factoren, die entweder absolute Primzahlen oder Potenzen absoluter Primzahlen sind, und eine andere, von diesen verschiedene absolute Primzahl p, oder eine Potenz von ihr, z. B. p^n sind demnach (nach Zus. 3.) auch relative Primzahlen. Ist nun p was immer für eine absolute Primzahl, die größer als 1 ist, so kann weder p^n noch p ein Maß von P seyn.

Zusatz 7.

Ein Product aus zwey oder mehreren Factoren, die alle größer als 1 und entweder absolute Primzahlen oder Potenzen absoluter Primzahlen sind, kann von einer Potenz einer jener Primzahlen, deren Exponent größer ist als der derselben Primzahl im Producte, unmöglich gemessen werden. Sind z. B. a, b, c absolute Primzahlen, und $m > n$, z. B. $m = n + x$, so kann das Product $a^u b^p c^q$ nicht durch a^m gemessen werden. Denn wäre dieß möglich, so sey $\frac{a^u b^p c^q}{a^m} = d$,

Digitized by Google

oder $a^n b^p c^q = a^m d = a^{n+x} d = a^n . a^x . d$, folglich auch, wenn man beyde Größen durch a^n dividirt: $b^p c^q = a^x d$, mithin $d = \frac{b^p c^q}{a^x}$, d. i. es wäre $b^p c^q$ durch a^x theilbar, welches nach dem vorigen Zusatze nicht möglich ist.

§. 88.

Jede zusammengesetzte Zahl N, d. i. jede Zahl, die keine absolute Primzahl ist, läßt sich in Factoren zerlegen, welche größer als 1, und absolute Primzahlen (einfache Factoren) sind.

Denn da die gegebene Zahl N keine absolute Primzahl ist, so läßt sie sich in zwey Factoren A und B zerlegen, deren jede größer als 1 ist. Ist nun einer oder sind beyde Factoren wieder zusammengesetzt, so kann man sie wieder zerlegen, und mit dieser Zerlegung so lange fortfahren, bis man endlich auf lauter absolute Primzahlen (einfache Factoren) kommt, welches der Fall seyn muß, weil sonst die gegebene Zahl N aus unendlich vielen Factoren zusammengesetzt und demnach selbst unendlich groß wäre, was der Voraussetzung, daß N eine gegebene Zahl sey, widerspricht.

Beyspiel. Es sey $N = 360$, so ist $360 = 36 . 10$. Von diesen beyden Zahlen ist keine eine Primzahl, man zerlege sie also auch in ihre Factoren, nähmlich 36 in 4 und 9, und 10 in 2 und 5, so erhält man

$$360 = 4 . 9 . 2 . 5.$$

Von diesen Factoren sind 4 und 9 keine absoluten Primzahlen, man zerlege sie also in ihre Factoren, nähmlich 4 in 2 und 2, und 9 in 3 und 3; so erhält man endlich

$$360 = 2.2.3.3.2.5 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3 . 3^2 . 5.$$

Es kann demnach jede Zahl, welche keine absolute Primzahl ist, entweder als eine Potenz einer absoluten Primzahl, oder als ein Product zweyer oder mehrerer Factoren dargestellt werden, deren jeder eine absolute Primzahl und größer als 1, oder eine Potenz einer solchen absoluten Primzahl ist.

Zusatz.

Aus diesem Satze und den beyden letzten Zusätzen zum vorigen Paragraphe folgt nun von selbst, daß eine zusammengesetzte Zahl nur auf eine einzige Art in ihre einfachen Factoren aufgelöst werden könne.

Digitized by Google

§. 89.

Besondere Regeln für die Theilbarkeit der Zahlen.

I. 1) Jede Zahl, die sich mit einer, zwey oder drey Nullen endigt, wird von 10, 100 oder 1000 gemessen. Weil nun $10 = 2 . 5$, $100 = 4 . 25$, und $1000 = 8 . 125$ ist, so wird auch jede Zahl, die die Stelle der Einheiten mit einer Null besetzt hat, von 2 und von 5 gemessen; jede Zahl, welche die beyden ersten Stellen mit Nullen besetzt hat, wird von 4 und 25 gemessen, und jede Zahl, welche ein Vielfaches von 1000 ist, ist auch durch 8 und durch 125 theilbar (§. 80.).

2) Jede Zahl, bey welcher die Ziffer der gewöhnlichen Einheiten durch 2 oder 5 theilbar ist, wird selbst von 2 oder 5 gemessen. Denn jede mehrziffrige Zahl N, z. B. 7368, läßt sich auf die Form $N = A . 10 + E = 7360 + 8 = 736 . 10 + 8$ bringen, und da die Zahl $A . 10$ von 2 und von 5 gemessen wird, so wird N selbst von 2 oder 5 gemessen, sobald E (die Ziffer der primitiven Einheiten) ein Vielfaches von 2 oder 5 ist (§. 79.).

3) Jede Zahl, deren zwey niedrigste Ziffern als Zahl für sich betrachtet, durch 4 oder 25 gemessen werden, ist selbst durch 4 oder 25 theilbar. Denn jede mehr als zweyziffrige Zahl N ist ein Vielfaches von Hundert mehr einer zweyziffrigen Zahl, die wir durch z_2 bezeichnen wollen; nähmlich jede mehr als zweyziffrige Zahl N läßt sich auf die Form $N = A . 100 + z_2$ bringen. Weil nun $A . 100$ durch 4 und durch 25 gemessen wird, so wird auch die Zahl N durch 4 oder 25 gemessen, je nachdem z_2 theilbar ist durch 4 oder durch 25 (§. 79.).

4) Wenn wir eine ähnliche Bezeichnung beybehalten, so sieht man ein, daß $N = A . 1000 + z_3$ eine allgemeine Form aller mehr als dreyziffrigen Zahlen sey. Weil nun 1000 die Factoren 8 und 125 enthält, so wird die Zahl N durch 8 oder 125 gemessen, je nachdem z_3 durch 8 oder 125 theilbar ist (§. 79.).

II. Es ist allgemein jede ganze Zahl $N = a + b . 10 + c . 100 + d . 1000 + e . 1000 + \ldots$ (§. 53. Zus. 3.), wenn wir die Ziffern, mit welchen die Zahl N geschrieben ist, von der Rechten gegen die Linke durch a, b, c, d, e, ... bezeichnen.

Nun ist aber

Digitized by Google

$$
\begin{array}{llll}
a & = a & & a \\
b \cdot 10 & = b\,(9+1) & = b \cdot 9 & + b \\
c \cdot 100 & = c\,(99+1) & = c \cdot 99 & + c \\
d \cdot 1000 & = d\,(999+1) & = d \cdot 999 & + d \\
e \cdot 10000 & = e\,(9999+1) & = e \cdot 9999 & + e \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

---

also durch Addition

$$N = a + b.10 + c.100 + d.1000 + e.10000 + \ldots$$
$$= (b.9 + c.99 + d.999 + e.9999 + \ldots) +$$
$$+ (a + b + c + d + e + \ldots.)$$
$$= (b + c.11 + d.111 + e.1111 + \ldots)\,9 + (a + b + c + d + e + \ldots)$$

$= R.9 + S$, wenn $b + c.11 + d.111 + e.1111 + \ldots = R$, und $a + b + c + d + e + \ldots = S$ der Kürze halben gesetzt wird. Da nun R.9 durch 9, folglich auch durch 3 (§. 79.) gemessen wird; so wird auch N durch 9 also auch durch 3 gemessen werden, wenn S den Factor 9 mithin auch den Factor 3 enthält; d. h. es ist eine Zahl N durch 3 oder 9 theilbar oder nicht, je nachdem die Summe ihrer Ziffern durch 3 oder 9 gemessen werden kann oder nicht. So z. B. ist die Zahl 471 theilbar durch 3, weil $4+7+1 = 12 = 4.3$ durch 3 gemessen wird; und die Zahl 53748 ist theilbar durch 9, weil die Summe ihrer Ziffern $5+3+7+4+8 = 27 = 3.9$ durch 9 gemessen wird.

III. Theilen wir was immer für eine ganze Zahl N von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey zu zwey Ziffern, und bezeichnen die so erhaltenen zweyziffrigen Zahlen der Ordnung nach durch A, B, C, D,...; so ist $N = A + B.100 + C.10000 + D.1000000 + \ldots$

z. B. $47298063\overset{8}{4}5 = 47 + 29 + 80 + 63 + 45 =$

$= 45 + 63.100 + 80.10000 + 29.1000000 + 47.100000000.$

Nun ist aber

$$
\begin{array}{llll}
A = & & & A \\
B \cdot 100 & = B\,(99+1) & = B \cdot 99 & + B \\
C \cdot 10000 & = C\,(9999+1) & = C \cdot 9999 & + C \\
D \cdot 1000000 & = D\,(999999+1) & = D \cdot 999999 & + D \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

folglich $N = A + B.100 + C.10000 + D.1000000 + \ldots$

$$= (B.99 + C.9999 + D.999999 + \ldots)$$
$$+ (A + B + C + D + \ldots)$$

Digitized by Google

$=(B+C.101+D.10101+\ldots).99+(A+B+C+D+\ldots)$
$=R.99+S,$

wenn wir jene zusammengesetzten Ausdrücke kurz durch R und S bezeichnen. Aus der Gleichung $N=R.99+S$ folgt $N:99=R+\frac{S}{99}$, d. h. die Zahl N ist theilbar durch 99, also auch durch 11 und 33, wenn S, nähmlich die Summe jener zweyziffrigen Zahlen, durch 99, also auch durch 11 und 33 gemessen wird. In unserem obigen Beyspiele ist $47+29+80+63+45=264$, und wenn man mit dieser Summe eben so verfährt: $2+64=66=6.11=2.33$, folglich ist 264 theilbar durch 11 und 33, mithin auch die gegebene Zahl 4729806345.

Sind 99 und S relative Primzahlen, so läßt N durch 11, 33, 99 getheilt dieselben Reste, welche S durch eben diese Zahlen dividirt, läßt.

IV. Wir haben (§. 85.) gesehen, daß eine Zahl, welche von zwey oder mehreren andern zugleich gemessen wird, auch von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eben dieser Zahlen gemessen werde. Dieser Satz, in Verbindung mit den hier abgeleiteten Regeln für die Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 25, 33 und 125 setzt uns in den Stand, mit Leichtigkeit zu beurtheilen, ob eine gegebene Zahl N durch mehrere andere gegebene Zahlen theilbar sey oder nicht, ob z. B. N theilbar sey durch die Zahlen 2, 4, 5, 6. 9, 8, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 30, 33, 36 u. s. w. Denn ist

N theilbar	durch	2	und	3,	so	ist	N	auch	theilbar durch 6
»	»	»	3	»	4	»	»	»	» 12
»	»	»	3	»	5	»	»	»	» 15
»	»	»	4	»	5	»	»	»	» 20
»	»	»	5	»	6	»	»	»	» 30
»	»	»	3	»	8	»	»	»	» 24

u. s. w., weil diese letztern Zahlen die kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der erstern sind.

* Wir könnten noch mehrere besondere Regeln für die Theilbarkeit der Zahlen ableiten, wollen dieß aber dem Privat-Fleiße des Anfängers überlassen, weil jene Regeln für die Anwendung minder erheblich sind. Ob also N durch eine Primzahl, die weder 2, noch 3, noch 5, noch 11 ist, theilbar sey, muß man durch wirkliche Division untersuchen.

Digitized by Google

§. 90.

Eine gegebene Zahl in ihre einfache Factoren aufzulösen.

Man dividire die gegebene Zahl N mit Berücksichtigung der im vorigen Paragraphe gegebenen Vorschriften durch die auf einander folgenden Primzahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, ...

Ist nun z. B. a die erste Primzahl, welche N mißt, und der Quotient $N:a=Q$, so ist Q das Product der übrigen einfachen Factoren von N; man suche also den kleinsten derselben wieder auf dieselbe Art, indem man aber alle Primzahlen, welche kleiner als a sind, wegläßt; denn wäre Q theilbar durch einen einfachen Factor, der $<a$, so müßte auch N durch denselben Factor gemessen werden, folglich wäre gegen unsere Voraussetzung a nicht der kleinste einfache Factor von N. Weil aber N eine Potenz von a enthalten kann, so beginne man die Division von Q durch a. Ist a kein Maß von Q, so gehe man zur nächst größern Primzahl über, und setze dieses Verfahren fort, bis man endlich auf einen Quotienten stößt, der selbst eine absolute Primzahl ist. Man nehme also an, es sey

$$\begin{array}{llll} N & : a = Q^{I}, & \text{folglich} & N = a.Q^{I} \\ Q^{I} & : b = Q^{II} & \text{»} & Q^{I} = b.Q^{II} \\ Q^{II} & : c = Q^{III} & \text{»} & Q^{II} = c\,Q^{III} \\ Q^{III} & : d = Q^{IV} & \text{«} & Q^{III} = d\,Q^{IV} \end{array}$$

wo a, b, c, d, Q^{IV} absolute Primzahlen seyn sollen; so ist

$$N = a.Q^{I} = a.b\,Q^{II} = a\,b\,c\,Q^{III} = a\,b\,c\,d\,Q^{IV}$$

ein Product aus lauter absoluten Primzahlen.

Bey diesen Divisionen braucht man nur jene auf einander folgenden Primzahlen zu versuchen, die kleiner als die Hälfte des gerade aufzulösenden Dividends sind; denn wenn ein Product $P=A\,B$ ist, wo A und B ganze Zahlen, die größer als 1 sind, bezeichnen; so kann der eine Factor, z. B. B nie größer als $\frac{P}{2}$, und der andere A nie kleiner als 2 werden, folglich liegen alle verschiedenen Werthe von A und B zwischen 2 und $\frac{P}{2}$. — Zeigt sich nun bey diesen Ver-

Digitized by Google

suchen, daß die Zahl N durch keine ganze zwischen 1 und $\frac{N}{2}$ liegende Zahl theilbar ist; so ist N eine Primzahl.

*) Zur Erleichterung der Untersuchungen dieser Art hat man Factorentafeln und Verzeichnisse der absoluten Primzahlen bis zu bestimmten Gränzen verfertigt, deren Einrichtung und Gebrauch in den Einleitungen zu denselben aus einander gesetzt ist. Solche Tafeln findet man z. B. in *Vega's* logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, Leipzig 1797; worin alle Zahlen, die weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 gemessen werden, von der Zahl 1 bis 102000 mit ihren Factoren, und dann alle absoluten Primzahlen von 102000 bis 400031 verzeichnet sind, so wie auch in den Logarithmen-Tafeln vom Herrn Prof. Hantschl, und in mehrern andern. Übersteigt die gegebene aufzulösende Zahl die Gränzen solcher Tafeln, so ist man immer noch in die Nothwendigkeit versetzt, nach der oben angegebenen Methode die Factoren derselben versuchsweise zu bestimmen, was oft sehr lästig ist. Ein Erleichterungsmittel biethet uns folgende Wahrheit dar:

§. 91.

Jede Zahl N, welche zwischen a und a^2 liegt, ist eine absolute Primzahl, wenn sie durch keine kleinere Zahl als a gemessen wird.

Denn da wir voraussetzen, daß die Zahl N weder durch die Primzahl a noch durch eine andere Zahl, die kleiner als a ist, gemessen werden könne, so müßte, wenn N keine Primzahl wäre, N durch eine Zahl m, die größer als a ist, theilbar seyn. Man nehme also an, es sey $N:m=n$, also $N=mn$, und $N:n=m$, oder N ein Vielfaches von der ganzen Zahl n. Da aber $m>a$ vermöge der Voraussetzung, so ist $\frac{N}{m}<\frac{N}{a}$, oder $n<\frac{N}{a}$. Vermöge der Voraussetzung aber ist $N<a^2$, mithin $\frac{N}{a}<\frac{a^2}{a}$, oder $\frac{N}{a}<a$, folglich um so mehr $n<a$. Aus der Annahme des Gegners aber folgt, daß N durch n gemessen werde, folglich wäre N durch n, d. i. durch eine Zahl, die kleiner als a ist, theilbar, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Wenn man zur Bestimmung der einfachen Factoren einer gegebenen Zahl N diese durch die auf einander folgenden Primzahlen nach der Vorschrift des vorigen Paragraphen dividirt hat, und man erhält endlich einen Quotienten, welcher kleiner als der Divisor a ist, ohne daß eine der Primzahlen, welche kleiner als a sind, die Zahl N ge-

Digitized by Google

messen hat; so ist N nothwendig eine Primzahl. Sollte man z. B. untersuchen, ob die Zahl 317 eine Primzahl sey oder nicht, und man hat jene Zahl durch keine der Primzahlen zwischen 1 und 13 theilbar gefunden; so setze man die Divisionen fort, so erhält man:

$$317 : 13 = 24 + \frac{5}{13}$$

$$317 : 17 = 18 + \frac{11}{17}$$

$$317 : 19 = 16 + \frac{13}{19}.$$

Da nun $16 < 19$, mithin $317 > 19.16$, oder $317 < 19^2 = 361$; und 317 durch keine der Primzahlen zwischen 1 und 19 theilbar war; so ist 317 eine absolute Primzahl.

Beyspiel über die in den beyden letzten Paragraphen gegebenen Regeln. Man bestimme die einfachen Factoren der Zahl 82893096.

Rechnung.

	82893096	
:2	41446548	
:2	20723274	
:2	10361637	denn $1+3+6+1+6+3+7=27=9.3$ (§. 89. II.)
:3	3453879	denn $3+4+5+3+8+7+9=39=13.3$ (§. 89. II.)
:3	1151293	denn $93+12+15+1=121$, und $21+1=22=2.11$
:11	104663.	(§. 89. III.)

Da 104663 durch 11 nicht mehr theilbar ist, so gehe man nun zur nächst höhern Primzahl 13 über.

Es ist $104663 : 13 = 8051$

und $8051 : 13 = 619 + \frac{4}{13}$, also ist 13 kein Factor mehr, man ver-
25
121
" 4
suche demnach die folgenden Primzahlen:

$8051 : 17 = 473 + \frac{10}{17}$; u. s. w.
125
61
10

Man findet, durch fortgesetztes Dividiren, daß 8051 durch keine der

Digitized by Google

Primzahlen zwischen 1 und 83 gemessen werde, man versuche also die Division mit 83:

$8051 : 83 = 97$; da aber 97 auch eine Primzahl ist, so ist man
581
" "

mit der Rechnung am Ende. Es ist also

$$82893096 = 2.2.2.3.3.11.13.83.97 = 2^3.3^2.11.13.83.97.$$

Zusatz.

Endiget sich die gegebene Zahl mit einer oder mehreren Nullen, so zerlege man die gegebene Zahl ohne die Nullen in ihre Factoren, und füge diesen noch jene Potenzen von 2 und 5 hinzu, deren Exponenten gleich sind der Anzahl der weggelassenen Nullen. Wäre z. B. die Zahl 82893096000 in Factoren zu zerlegen, so setze man

$$82893096000 = 82893096 \times 1000 = 2^3.3^2.11.13.83.97 \times 10^3 =$$
$$= 2^3.3^2.11.13.83.97.(2.5)^3 = 2^3.3^2.11.13.83.97.2^3.5^3 =$$
$$= 2^6.3^2.5^3.11.13.83.97.$$

§. 92.

Enthält die zusammengesetzte Zahl A unter ihren einfachen Factoren alle einfachen Factoren einer andern Zahl B, und zwar zu einer Potenz erhoben, die nicht niedriger ist, als die in B; so wird A von B gemessen.

Es sey $A = a^m b^n c^p d^q e$, und $B = a^r c^s d^2 e$, wo a, b, c, d, e lauter absolute Primzahlen seyn sollen, und wo $m = r + x$, $p = s + z$ und $q > 2$ ist; so ist

$$A = a^m b^n c^p d^q e = a^{r+x} b^n c^{s+z} d^{q-2+2} e = a^r . a^x b^n c^s c^z d^{q-2} d^2 e$$
$$= a^x b^n c^z d^{q-2} (a^r c^s d^2 e) = a^x b^n c^z d^{q-2} . B$$

folglich ist A ein Vielfaches von B, und wird demnach auch von B gemessen.

Zusatz 1.

Wenn einer der einfachen Factoren von B nicht unter den Factoren von A vorkommt, so kann auch B kein Maß von A seyn. Denn es sey z. B. $A = a^4 b^3 c^2 d$ und $B = a^2 b^2 c^2 e$, wo a, b, c, d, e lauter absolute Primzahlen bedeuten sollen, so ist B theilbar durch e. Wäre nun auch A durch B meßbar, so müßte nach (§. 80) auch A von e gemessen werden, welches nach §. 87. Zus. 6 nicht möglich ist, folglich ist B kein Maß von A.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Enthält A auch alle einfachen Factoren von B, aber auch nur einen derselben zu einer niedrigern Potenz erhoben als in B, so kann dennoch A nicht durch B gemessen werden. Denn es sey z. B. $A = a^5 b^6 c^3 d^2$ und $B = a^3 b^3 c^4$, so ist c^4 ein Maß von B. Wäre nun B auch ein Maß von A, so müßte nach §. 80 auch A durch c^4 theilbar seyn, was nach §. 87. Zus. 7 nicht möglich ist, folglich kann B kein Maß von A seyn.

§. 93.

Das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer gegebenen ganzen Zahlen zu finden, d. h. die größte ganze Zahl zu bestimmen, von welcher mehrere gegebene ganze Zahlen, die nicht absolute Primzahlen sind, gemessen werden.

Man zerlege nach §. 90 alle gegebenen Zahlen in ihre einfachen Factoren und nehme aus diesen die niedrigsten Potenzen jener Factoren, welche allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich sind, so ist das Product derselben das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß. Denn es seyen z. B. $A = a^3 b^4 c^2 d$, $B = a^4 b^5 c^3 d^2$, $C = a^6 b^2 c^4 f$ und $D = a^5 b^4 c g^3$ die gegebenen Zahlen, so ist das Product $P = a^3 . b^2 c$ das größte gemeinschaftliche Maß derselben, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann:

Daß P ein gemeinschaftliches Maß der Größen A, B, C, D sey, erhellt aus §. 92, weil die Zahlen a, b, c in allen gegebenen Zahlen als Factoren vorkommen, und zwar zu Potenzen erhoben, die nicht niedriger sind als in dem Producte P. Weil ferner jede ganze Zahl N, die ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen A, B, C, D ist, in ihre einfachen Factoren aufgelöst, keine andere Primzahl unter ihren Factoren enthalten kann, als P, nähmlich a, b, c, indem sonst N kein gemeinschaftliches Maß von A, B, C, D seyn könnte (§. 92. Zus. 1); und weil endlich jene ganze Zahl N auch keine höhern Potenzen der Primzahlen a, b, c unter ihren Factoren enthalten kann, als im Producte $P = a^3 b^2 c$ vorkommen, indem N sonst die Größen A, B, C, D nicht zugleich messen könnte (§. 92. Zus. 2); so muß nach (§. 92) P selbst von N gemessen werden, und es kann demnach P unmöglich kleiner als N seyn; folglich ist P auch das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C, D.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Also wird das größte gemeinschaftliche Maß P mehrerer gegebenen Zahlen A, B, C, ... von jedem andern gemeinschaftlichen Maße eben dieser Zahlen gemessen. Sind demnach die Quotienten, welche erhalten werden, indem man die Zahlen A, B, C, ... durch das gemeinschaftliche Maß P dividirt, Primzahlen unter sich, so ist P das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C, ...; denn wäre P nicht das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C, ...; so sey es N. Dann wäre aber N durch P theilbar, und es könnten wider unsere Voraussetzung die Quotienten $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, $\frac{C}{P}$, ... nicht relative Primzahlen seyn (§. 80. Zus. 2).

Zusatz 2.

Wenn unter den gegebenen Zahlen A, B, C, ... eine einzige absolute Primzahl ist, so sind A, B, C, ... auch relative Primzahlen, außer wenn jene absolute Primzahl größer als 1 und zugleich ein gemeinschaftliches Maß aller übrigen ist. In diesem Falle ist jene absolute Primzahl selbst das größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Zahlen, weil sie sich selbst mißt, und das Maß nie größer seyn kann als die zu messende Zahl.

* Die oben angegebene Methode, zu mehreren gegebenen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, ist in den meisten Fällen sehr beschwerlich, besonders wenn die gegebenen Größen sehr große Primzahlen, welche die Gränzen der Tafeln überschreiten, oder allgemeine zusammengesetzte Ausdrücke sind; es wird daher zweckmäßiger seyn, nach folgender allgemeinen und directen Methode zu verfahren.

§. 94.

Das größte gemeinschaftliche Maß für zwey gegebene Größen A und B zu finden.

Es sey $A > B$. Man dividire A durch B, und wenn ein Rest R bleibt, B durch R, und wenn auch hier wieder ein Rest R^1 bleibt, R durch R^1, und so fort, bis man endlich auf einen Rest kommt, welcher in dem vorhergehenden genau enthalten ist. Dieser letzte Divisor, welcher keinen Rest übrig läßt, ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß. Es sey nähmlich

Digitized by Google

1) $A : B = Q + \frac{R}{B}$, mithin $A = BQ + R$, wo $R < B$ (§. 63),
also $A - BQ = R$

2) $B : R = Q^I + \frac{R'}{R}$, mithin $B = RQ^I + R^I$, wo $R^I < R$,
also $B - RQ^I = R^I$

3) $R : R^I = Q^{II} + \frac{R^{II}}{R^I}$, mithin $R = R^IQ^{II} + R^{II}$, wo $R^{II} < R^I$,
also $R - R^IQ^{II} = R^{II}$

4) $R^I : R^{II} = Q^{III} + \frac{R^{III}}{R^{II}}$, mithin $R^I = R^{II}Q^{III} + R^{III}$, wo $R^{III} < R^{II}$,
also $R^I - R^{II}Q^{III} = R^{III}$

5) $R^{II} : R^{III} = Q^{IV}$, mithin $R^{II} = R^{III}Q^{IV}$; also $R^{II} - R^{III}Q^{IV} = 0$;

so ist R^{III} das größte gemeinschaftliche Maß von A und B, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann:

Es ist vermöge der Voraussetzung R^{II} durch R^{III} theilbar, mithin auch $R^{II}Q^{III}$; und weil auch jede Größe ein Maß von sich selbst ist, so ist auch $R^{II}Q^{III} + R^{III}$, d. i. R^I theilbar durch R^{III} (§. 79). Da ferner R^{III} ein Maß von R^{II} und von R^I, also auch von R^IQ^{II} ist; so mißt R^{III} auch $R^IQ^{II} + R^{II}$, d. i. R (§. 79). Weil nun sowohl R^I als R, also auch RQ^I Vielfache von R^{III} sind, so kann auch $RQ^I + R^I$, d. i. B durch R^{III} gemessen werden; folglich auch BQ, mithin auch $BQ + R$ oder A. Also ist R^{III} ein gemeinschaftliches Maß von A und B; daß es aber auch das größte sey, sieht man leicht so ein: Wollte jemand behaupten, es sey R^{III} nicht das größte gemeinschaftliche Maß von A und B, so soll es M seyn, wo also $M > R^{III}$. Da nun A und B, mithin auch BQ durch M gemessen werden sollen, so müßte auch $A - BQ$ theilbar seyn durch M (§. 79); aber $A - BQ = R$, also wäre M ein Maß von R, demnach auch von RQ^I, folglich auch von $B - RQ^I$, d. i. von R^I. Weil ferner M sowohl R als auch R^I, mithin auch R^IQ^{II} messen würde, so müßte auch $R - R^IQ^{II}$, d. i. R^{II}, also auch $R^{II}Q^{III}$, mithin auch $R^I - R^{II}Q^{III}$, d. i. R^{III} theilbar seyn durch M, welches nicht möglich ist, weil $M > R^{III}$ angenommen wurde; folglich gibt es keine Zahl, welche größer als R^{III} und ein gemeinschaftliches Maß von A und B wäre, d. h. es ist R^{III} das größte gemeinschaftliche Maß von A und B.

Beyspiel. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 56287 und 39831.

Digitized by Google

Rechnung: 1) $56287 : 39831 = 1 + \frac{16456}{39831}$

2) $39831 : 16456 = 2 + \frac{6919}{16456}$

3) $16456 : 6919 = 2 + \frac{2618}{6919}$

4) $6919 : 2618 = 2 + \frac{1683}{2618}$

5) $2618 : 1683 = 1 + \frac{935}{1683}$

6) $1683 : 935 = 1 + \frac{748}{935}$

7) $935 : 748 = 1 + \frac{187}{748}$

8) $748 : 187 = 4$, also ist 187 das größte gemeinschaftliche Maß.

Kürzer führt man die Rechnung auf folgende Art:

$A = 56287$	$B = 39831$	$1 = Q$
$R = 16456$	$R^{I} = 6919$	$2 = Q^{I}$
$R^{II} = 2618$	$R^{III} = 1683$	$2 = Q^{II}$
$R^{IV} = 935$	$R^{V} = 748$	$2 = Q^{III}$
$R^{VI} = 187$	// //	$1 = Q^{IV}$
		$1 = Q^{V}$
		$1 = Q^{VI}$
		$4 = Q^{VII}$

Es ist nähmlich $A = 56287 = 301 . 187 = 301 . 11 . 17$

und $B = 39831 = 213 . 187 = 371 . 11 . 17$

folglich ist $11 . 17 = 187$ das größte gemeinschaftliche Maß von A und B, weil die Quotienten 301 und 213 relative Primzahlen sind.

Zusatz 1.

Sind A und B relative Primzahlen, so wird $R^{IV} = 1$ gefunden, und umgekehrt, wenn $R^{IV} = 1$ ist; so sind A und B relative Primzahlen.

Zusatz 2.

Ist nach dieser Methode das größte gemeinschaftliche Maß für mehrere gegebene Zahlen A, B, C, D zu suchen, so suche man nach der gegebenen Vorschrift das größte gemeinschaftliche Maß

Digitized by Google

1) von A und B, welches wir a nennen wollen;
2) von a und C, welches wir b nennen wollen;
3) von b und D, welches wir c nennen wollen;

so ist c das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C und D; denn weil c ein Maß von b und D ist, und b ein Maß von a und C, so wird auch a und C von c gemessen (§. 80). Weil ferner a durch c theilbar und a ein Maß von A und B ist, so ist c auch ein Maß von A und B (§. 80); folglich ist c ein gemeinschaftliches Maß von A, B, C, D. Da ferner nach (§. 93. Zus. 1) das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen durch jedes andere gemeinschaftliche Maß m eben dieser Zahlen theilbar ist, so wird m, als gemeinschaftliches Maß von A, B, C, D, auch das größte gemeinschaftliche Maß a von A und B messen, und aus demselben Grunde auch die Zahlen b und c. Es enthält demnach c jedes andere gemeinschaftliche Maß m der Zahlen A, B, C, D als Factor; folglich ist auch c die größte ganze Zahl, von welcher A, B, C, D zugleich gemessen werden.

§. 95.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehreren gegebenen ganzen Zahlen zu finden.

Man zerlege nach §. 90 alle gegebenen Zahlen, die nicht absolute Primzahlen sind, in ihre einfachen Factoren, und multiplizire die höchsten vorkommenden Potenzen derselben mit einander, so ist das Product das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Denn es seyen die gegebenen ganzen Zahlen A, B, C, D, und zwar sey $A = a^4 b^3 c^5$, $B = a^2 c^3 d^4 e$, $C = ab^2 c^3 e^2$ und $D = b^5 c^2 d$; so ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache, welches wir mit V bezeichnen wollen, $V = a^4 b^5 c^5 d^4 e^2$. Daß nun V ein gemeinschaftliches Vielfaches aller gegebenen Zahlen ist, folgt aus (§. 92), weil keine andere Zahlen als a, b, c, d, e in den gegebenen Zahlen als Factoren vorkommen, und zwar zu Potenzen erhoben, die nicht höher sind, als in V. Weil ferner jedes gemeinschaftliche Vielfache V^1 der gegebenen Zahlen in seine einfachen Factoren zerlegt, die absoluten Primzahlen a, b, c, d, e alle unter seinen Factoren enthalten muß, indem es sonst nicht von allen Zahlen gemessen würde (§. 92. Zus. 1), und weil V^1 unter seinen Factoren keine niedrigern Potenzen jener Primzahlen enthalten kann, als in V vorkommen, indem sonst V^1 nicht von allen Zahlen gemessen würde (§. 92. Zus. 2); so muß nach (§. 92)

Digitized by Google

jedes gemeinschaftliche Vielfache V^1 von V gemessen werden; folglich kann V^1 nicht kleiner als V seyn, d. h. es ist V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D.

Beyspiel. Die gegebenen Zahlen seyen 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 25, 27, 28, 30, 36, 40, 45; so ist

$8 = 2^3$	$25 = 5^2$
$9 = 3^2$	$27 = 3^3$
$10 = 2.5$	$28 = 2^2.7$
$12 = 2^2.3$	$30 = 2.3.5$
$15 = 3.5$	$36 = 2^2.3^2$
$18 = 2.3^2$	$40 = 2^3.5$
$24 = 2^3.3$	$45 = 3^2.5$

also ist $V = 2^3.3^3.5^2.7 = 8.27.25.7 = 37800$.

Zusatz 1.

Eine andere Methode, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweyer gegebenen Zahlen A und B zu bestimmen, ist folgende: Man suche das größte gemeinschaftliche Maß M von A und B, dividire eine der gegebenen Zahlen durch M, und multiplizire mit dem gefundenen Quotienten die andere gegebene Zahl, so ist das Product das gesuchte gemeinschaftliche Vielfache. Denn es sey $A : M = a$, und $B : M = b$, mithin $A = M.a$, $B = M.b$, wo a und b relative Primzahlen seyn müssen. Weil nun $b(M.a) = a.(M.b)$

$$\text{oder } b.A = a.B, \text{ oder } \left(\frac{B}{M}\right) A = \left(\frac{A}{M}\right) B,$$

so ist dieses Product, weil a und b relative Primzahlen sind, nach §. 85. Zus. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A und B.

Es sey z. B. $A = 1020$, $B = 1230$; so ist, weil $1020 = 34.30$ und $1230 = 41.30$, die Zahl 30 das größte gemeinschaftliche Maß von 1020 und 1230, mithin

$$\left(\frac{1230}{30}\right) . 1020 = \left(\frac{1020}{30}\right) . 1230$$

$$\text{d. i. } 41 . 1020 = 34 . 1230 = 41820,$$

folglich ist 41820 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 1020 und 1230.

Zusatz 2.

Soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehrern Größen

Digitized by Google

A, B, C, D bestimmt werden, so suche man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

von A und B, welches m heißen mag;
von m und C, welches n heißen mag;
endlich von n und D, welches p heißen soll;

so ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D. Denn da p durch n und D gemessen wird, und n durch m und C; so ist p ein Vielfaches vom m, C und D; und weil m ein Vielfaches von A und B ist, so ist auch p ein gemeinschaftliches Vielfaches von A und B, folglich ein gemeinschaftliches Vielfaches von A, B, C, D.

Weil ferner jedes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Größen von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen derselben gemessen wird (§. 85); so wird jedes gemeinschaftliche Vielfache V der Größen A, B, C, D

von A und B, also auch von m gemessen; also
von m und C, daher auch von n; also
von n und D, mithin auch von p.

Es wird demnach jedes gemeinschaftliche Vielfache V der Zahlen A, B, C, D von p gemessen, und daher kann V nicht kleiner als p seyn; folglich ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D.

Zusatz 3.

Für die Ausübung beobachte man folgende Regel, um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer gegebenen Zahlen zu finden:

a) Man schreibe die gegebenen Zahlen in horizontaler Richtung neben einander, oder in verticaler Richtung unter einander, und lasse die kleinern Zahlen, die etwa in einer der übrigen enthalten sind, weg;

b) nun untersuche man, ob nicht zwey oder mehrere der übrigen Divisoren ein gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so bemerke man sich dieses gemeinschaftliche Maß zur Seite, dividire damit die theilbaren Zahlen, und schreibe die Quotienten an, die nicht theilbaren Zahlen aber setze man ungeändert daneben.

c) Auf die neuen so erhaltenen Zahlen wende man wieder die in a) und b) angegebenen Vorschriften an, und wiederhohle diese Operation so lange, bis man endlich auf lauter absolute oder relative Primzahlen kommt.

d) Das Product aus den gebrauchten Divisoren in die erhaltenen Primzahlen ist dann der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend für die gegebenen Zahlen.

Digitized by Google

Beyspiel. Man suche den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend für folgende Zahlen: 6, 8, 9, 10, 15, 18, 30, 35, 40, 42, 48, 54, 60.

Die kleinern, in einem größern gegebenen Divisor enthaltenen Zahlen werde ich durchstreichen, nach jeder Operation eine Linie ziehen, und zur Seite die gebrauchten Divisoren bemerken. Es steht demnach die Rechnung, wie folgt:

2) 6, 8, 9, 10, 15, 18, 30, 35, 40, 42, 48, 54, 60
2) 35, 20, 21, 24, 27, 30
2) 35, 10, 21, 12, 27, 15
3) 35, 5, 21, 6, 27, 15
35, 7, 2, 9, 5

Da nun 35, 2 und 9 relative Primzahlen sind, so ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= 35 . 2 . 9 \times 3 . 2 . 2 . 2 = 2^4 . 3 . 9 . 5 . 7 = 2^4 . 3^3 . 5 . 7 = 15120$.

§. 96.

Die einfachen und zusammengesetzten Divisoren (oder Factoren) einer gegebenen Zahl zu finden, d. h. alle Zahlen, durch welche eine gegebene theilbar ist.

Man suche zuerst nach §. 90 die einfachen Factoren der gegebenen Zahl, schreibe diese in verticaler Richtung unter einander, und zwar zur Erleichterung der Rechnung so, daß man die größern zuerst ansetzt, dann multiplizire man mit dem zweyten einfachen Factor den ersten, mit dem dritten und jedem folgenden einfachen Factor aber alle vorausgehenden einfachen und zusammengesetzten Factoren, welche Producte immer rechts in einer mit dem jedesmahligen Multiplicator horizontalen Richtung angesetzt werden. — Kommt derselbe einfache Factor mehrmahlen vor, so multiplizirt man mit dem zweyten und folgenden gleichen Factor nur die unmittelbar vorhergehende Reihe von Zahlen.

Zur Übung folgende Beyspiele:

1) Man suche die einfachen und zusammengesetzten Factoren von 1260. Weil $1260 = 4 . 315 = 2^2 . 9 . 35 = 2^2 . 3^2 . 5 . 7$; so erhält man folgende Divisoren:

Digitized by Google

7
5, 35
3, 21, 15, 105
3, 9, 63, 45, 315
2, 14, 10, 70, 6, 42, 30, 210, 18, 126, 90, 630
2, 4, 28, 20, 140, 12, 84, 60, 420, 36, 256, 180, 1260.

2) Man suche die einfachen und zusammengesetzten Divisoren der Zahl 403650. Weil $403650 = 8073 . 50 = 9 . 897 . 2 . 25 = = 3^2 . 2 . 5^2 . 897 = 2 . 3^2 5^2 . 3 . 299 = 2 . 3^3 . 5^2 . 13 . 23$; so erhält man folgende Divisoren:

23
13, 299
5, 115, 65, 1495
5, 25, 575, 325, 7475
3, 69, 39, 897, 15, 345, 195, 4485, 75, 1725, 975, 22425
3, 9, 207, 117, 2691, 45, 1035, 585, 13455, 225, 5175, 2925, 67275
3, 27, 621, 351, 8073, 135, 3105, 1755, 40365, 675, 15525, 8775, 201825
2, 46, 26, 598, 10, 230, 130, 2990, 50, 1150, 650, 14950, 6, 138, 78, 1794, 30, 690, 390, 8970, 150, 3450,
1950, 44850, 18, 414, 234, 5382, 90, 2070, 1170, 26910, 450, 10350, 5850, 134550, 54, 1242, 702
16146, 270, 6210, 3510, 80730, 1350, 31050, 17550, 403650.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Von den Brüchen.

§. 97.

1) Theilt man die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und nimmt dann einen oder mehrere solcher Theile, so heißt die dadurch erhaltene Zahl eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Zur Bezeichnung eines Bruches sind demnach zwey Zahlen nöthig, deren eine anzeigt, in wie viel gleiche Theile die Einheit getheilt ist, und die andere, wie viele solche Theile genommen worden sind oder genommen werden sollen. Die erstere Zahl heißt der Nenner und die letztere der Zähler des Bruches. — Man schreibt den Nenner unter den Zähler, und sondert beyde Zahlen durch eine horizontale Linie von einander ab. So bezeichnet z. B. der Bruch $\frac{5}{7}$, daß die Einheit oder das Ganze in 7 gleiche Theile getheilt sey, und von diesen 5 Theile genommen werden sollen, und man spricht jenen Bruch durch die Worte fünf Siebentel aus.

2) Man theilt die Brüche in ächte und unächte. Ein ächter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, der also keine Ganzen in sich enthält; z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, allgemein $\frac{a}{a+x}$ oder $\frac{a-z}{a}$; ein unächter Bruch hingegen ist ein solcher, dessen Zähler größer ist als der Nenner, der daher Ganze in sich enthält. Z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{18}{5}$, ... allgemein $\frac{a+x}{a}$ oder $\frac{a}{a-z}$. Alle ächten Brüche sind demnach kleiner als 1, alle unächten Brüche aber sind größer als 1.

3) Man theilt die Brüche ferner in eigentliche und uneigentliche. Ein eigentlicher Bruch ist ein solcher, dessen Zähler durch den Nenner nicht theilbar ist, z. B. $\frac{a}{a+m}$ und $\frac{a+n}{a}$, wo n kein Viel-

Digitized by Google

faches von a ist; ein uneigentlicher oder scheinbarer Bruch aber ist derjenige, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners ist, z. B. $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{15}{5}$, ... allgemein $\frac{a}{a}$, $\frac{n \cdot a}{a}$, $\frac{m(a+x)}{(a+x)}$, u. s. w.

4) Endlich theilt man die Brüche in reguläre und irreguläre. Erstere sind solche Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, letztere aber solche, bey welchen Zähler und Nenner zugleich Brüche, oder bey welchen eine der beyden Größen selbst ein Bruch ist. Z. B. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{4}}$, $\frac{8}{\frac{2}{4}}$, $\frac{\frac{2}{9}}{5}$ u. s. w.

5) Wenn mit einer ganzen Zahl ein Bruch verbunden ist, so heißt dieser Ausdruck eine gemischte Zahl; z. B. $5\frac{3}{4} = 5+\frac{3}{4}$, allgemein $a+\frac{m}{n}$.

6) Eine gemischte Zahl einrichten, heißt, sie als einen unächten Bruch darstellen, dessen Nenner der Nenner des in der gemischten Zahl vorkommenden Bruches ist.

Zusatz.

Jeder unächte Bruch läßt sich durch Division in eine gemischte Zahl verwandeln, denn es ist

$\frac{an+x}{a} = \frac{an}{a} + \frac{x}{a}$ (§. 69. IV.) $= n + \frac{x}{a}$ (§. 69. XIX.) Z. B.

$$\frac{17}{5} = \frac{15+2}{5} = 3+\frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

Umgekehrt kann man eine gemischte Zahl einrichten, wenn man die Ganzen mit dem Nenner des angehängten Bruches multiplizirt, das Product um den Zähler des angehängten Bruches vermehrt, und der Summe denselben Nenner unterschreibt. Denn es ist

$$n+\frac{x}{a} = \frac{n \cdot a}{a} + \frac{x}{a} = \frac{na+x}{a}, \text{ z. B.}$$

$$3\frac{4}{5} = 3+\frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}.$$

§. 98.

1) Wenn die Einheit durch eine ganze Zahl, z. B. durch 3 getheilt wird, so ist der Quotient $1:3 = \frac{1}{3}$, weil dieser Bruch drey Mahl

Digitized by Google

genommen, oder durch den Divisor 3 multiplizirt den Dividend 1 gibt. Es ist demnach allgemein $1:n=\frac{1}{n}$, weil $\frac{1}{n}.n=1$ ist (§. 69. X.).

Da nun $2=1+1$; so ist auch $2:n=(1+1):n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ (§. 69. IV.) $=2.\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$.

Eben so ist auch $3:n=(1+1+1):n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=3.\frac{1}{n}=\frac{3}{n}$; und $4:n=(1+1+1+1):n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=4.\frac{1}{n}=\frac{4}{n}$, folglich allgemein $a:n=a.\frac{1}{n}=\frac{a}{n}$.

Es ist demnach jeder Bruch eine angezeigte Division, wo der Zähler den Dividend, der Nenner aber den Divisor vorstellt. Ist also der Dividend kleiner als der Divisor, so wird der Quotient in der Form eines Bruches angezeigt.

2) Weil nun $a:n=\frac{a}{n}$, so ist auch $\frac{a}{n}.n=a$; denn der Quotient mit dem Divisor multiplizirt gibt den Dividend. Multiplizirt man daher einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man den Zähler desselben zum Producte. Z. B.

$\frac{3}{4}.4=3$, $\frac{5}{6}.6=5$, $\frac{a+x}{a-x}.(a-x)=a+x$, u. s. w.

3) Weil $\frac{an}{n}=an:n=a$; so ist auch umgekehrt $a=\frac{an}{n}$, d. h. eine ganze Zahl a wird in einen Bruch vom gegebenen Nenner n verwandelt, wenn man dieselbe mit dem gegebenen Nenner multiplizirt, und dem Producte jenen Nenner unterschreibt. Z. B.

$$4=\frac{4.5}{5}=\frac{4.9}{9}=\frac{4.7}{7}=\frac{4.13}{13}, \text{ u. s. w.}$$

Eben so ist

$$a=\frac{am}{m}=\frac{ap}{p}=\frac{a(1+x)}{1+x}, \text{ u. s. f. und } a+m=\frac{(a+m)n}{n}=\frac{(a+m)xy}{xy}=\text{ &c.}$$

4) Da jeder Bruch eine angezeigte Division ist, und der Quotient bey einerley Divisor um so größer wird, je größer der Dividend ist, so ist einleuchtend, daß von zwey Brüchen, welche einerley Nenner haben, jener der größere sey, welcher den größern Zähler hat. Ist nähmlich $a>b$; so ist auch $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$. Z. B. $\frac{5}{7}>\frac{3}{7}$, $\frac{13}{25}>\frac{11}{25}$, u. s. w.

Digitized by Google

5) Es ist

$$\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=(2+2+2):7=(2.3):7=\frac{2.3}{7};$$

eben so $\frac{2}{7}\cdot 4=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=(2+2+2+2):7=(2.4):7=\frac{2.4}{7}$; allgemein ist $\frac{a}{b}.n=\frac{a.n}{b}$, d. h. ein Bruch wird durch eine ganze Zahl multiplizirt, wenn man den Zähler mit derselben multiplizirt, den Nenner aber ungeändert läßt. Z. B. $\frac{5}{6}\cdot 7=\frac{5.7}{6}=\frac{35}{6}$.

6) Da jeder Bruch ein angezeigter Quotient ist (Nro. 1); so ist auch nach (§. 69. IX.) $\frac{an}{b}=\frac{an:n}{b:n}=\frac{a}{b:n}$; und weil $\frac{an}{b}=\frac{a}{b}.n$; so ist auch $\frac{a}{b}.n=\frac{a}{b:n}$, d. h. ein Bruch wird auch durch eine ganze Zahl multiplizirt, wenn man den Nenner durch dieselbe dividirt, den Zähler aber ungeändert läßt. Z. B. $\frac{14}{33}.11=\frac{14}{33:11}=\frac{14}{3}$.

7) Es ist $\frac{a}{b}:n=\frac{a}{b.n}$, weil $\frac{a}{bn}.n=\frac{a.n}{b.n}=\frac{a}{b}$ ist, d. h. weil der Quotient mit dem Divisor multiplizirt den Dividend gibt. Es ist aber auch $\frac{a}{bn}=\frac{a:n}{bn:n}=\frac{a:n}{b}$ und $\frac{a}{bn}=\frac{a}{b}:n$; folglich ist auch $\frac{a}{b}:n=\frac{a:n}{b}$. Es wird demnach ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit derselben multiplizirt und den Zähler ungeändert läßt, oder wenn man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividirt, und den Nenner ungeändert läßt.

Beyspiele: $\frac{7}{8}:3=\frac{7}{8.3}=\frac{7}{24}$; $\frac{6}{13}:2=\frac{6:2}{13}=\frac{3}{13}$;

$\frac{13}{17}:4=\frac{13}{17.4}=\frac{13}{68}$; $\frac{36}{43}:12=\frac{36:12}{43}=\frac{3}{43}$.

8) Weil $\frac{a}{b}=\frac{a.n}{b.n}=\frac{a:m}{b:m}$ (§. 69. VIII. und IX.); so erhellt von selbst, daß ein Bruch dem innern Werthe nach ungeändert bleibe, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt. Z. B. $\frac{7}{10}=\frac{7.3}{10.3}=\frac{21}{30}$, $\frac{12}{20}=\frac{12:4}{20:4}=\frac{3}{5}$.

§. 99.

Einen Bruch **abkürzen** heißt ihn ohne Veränderung seines innern Werthes durch kleinere Zahlen darstellen, welches geschieht, wenn

Digitized by Google

man Zähler und Nenner durch ein gemeinschaftliches Maß dividirt. Dividirt man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß, so werden sie Primzahlen gegen einander, und dann sagt man, der Bruch sey auf die kleinste Benennung gebracht. Z. B.

$$\frac{24}{30} = \frac{24:6}{30:6} = \frac{4}{5}; \quad \frac{70}{98} = \frac{70:14}{98:14} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{18\,a^4\,b^2\,c^3}{24\,a^5\,b\,x^2} = \frac{18\,a^4\,b^2\,c^3 : 6\,a^4\,b}{24\,a^5\,b\,x^2 : 6\,a^4\,b} = \frac{3\,b\,c^3}{4\,a\,x^2}.$$

Zusatz.

Ein Bruch wird, wenn Zähler und Nenner in Factoren aufgelöst sind, dadurch zur kleinsten Benennung gebracht, daß man die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner wegläßt (§. 69. XIX.) Z. B. $\frac{60}{75} = \frac{2^2 . 3 . 5}{3 . 5^2} = \frac{2 . 2 . 3 . 5}{3 . 5 . 5} = \frac{2 . 2}{5} = \frac{4}{5}$.

§. 100.

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ kann ohne Veränderung seines innern Werthes in einen andern vom gegebenen Nenner n verwandelt werden.

Man setze, es sey $n : b = q$, also $n = bq$; so ist $\frac{a}{b} = \frac{a . q}{b . q} = \frac{a . q}{n}$ (§. 98. 8).

Man verwandle z. B. den Bruch $\frac{7}{12}$ in einen andern von gleichem Werthe, dessen Nenner 48 ist. Es ist $48 : 12 = 4$, also $\frac{7}{12} = \frac{7 . 4}{12 . 4} = \frac{28}{48}$; man dividirt nähmlich den neuen Nenner durch den alten, und multiplizirt mit dem gefundenen Quotienten Zähler und Nenner des gegebenen Bruches.

Zusatz 1.

Dieser Satz biethet uns ein Mittel dar, mehrere gegebene Brüche ohne Veränderung ihres innern Werthes auf einerley Benennung zu bringen. Man suche nähmlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller gegebenen Nenner (§. 95. Zus. 3), dividire dieses durch jeden einzelnen Nenner, und multiplizire mit dem gefundenen Quotienten Zähler und Nenner des entsprechenden Bruches. Sind z. B. die Brüche $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$ und $\frac{d}{D}$ auf gleiche Benennung zu bringen, und ist N

Digitized by Google

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C und D; so erhält man, wenn $N : A = m$, mithin $N = A \cdot m$

$N : B = n$, » $N = B \cdot n$

$N : C = p$, » $N = C \cdot p$

$N : D = q$, » $N = D \cdot q$

gesetzt wird, folgende Brüche:

$$\frac{a}{A} = \frac{a \cdot m}{A \cdot m} = \frac{am}{N},$$

$$\frac{b}{B} = \frac{b \cdot n}{B \cdot n} = \frac{bn}{N}$$

$$\frac{c}{C} = \frac{c \cdot p}{C \cdot p} = \frac{cp}{N}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{d \cdot q}{D \cdot q} = \frac{dq}{N}.$$

Beyspiel. Man bringe die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ und $\frac{13}{18}$ auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung. Da 180 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Nenner ist, und

$180 : 4 = 45$, so ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 45}{4 \cdot 45} = \frac{135}{180}$

$180 : 6 = 30$, . . $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 30}{6 \cdot 30} = \frac{150}{180}$

$180 : 9 = 20$, . . $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 20}{9 \cdot 20} = \frac{100}{180}$

$180 : 12 = 15$, . . $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 15}{12 \cdot 15} = \frac{105}{180}$

$180 : 15 = 12$, . . $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 12}{15 \cdot 12} = \frac{96}{180}$

$180 : 18 = 10$, . . $\frac{13}{18} = \frac{13 \cdot 10}{18 \cdot 10} = \frac{130}{180}$.

Zusatz 2.

Von zwey Brüchen, die einerley Zähler aber verschiedene Nenner haben, ist jener der größere, welcher den kleinern Nenner hat, eine Wahrheit, welche schon aus den bey der Division in ganzen Zahlen aufgestellten Grundbegriffen erhellt, wovon man sich aber auch auf folgende Art überzeugen kann. Es seyen $\frac{a}{n}$ und $\frac{a}{n+x}$ die beyden Brüche, so ist $\frac{a}{n} = \frac{a(n+x)}{n(n+x)} = \frac{an+ax}{n(n+x)}$, und $\frac{a}{n+x} = \frac{a \cdot n}{(n+x) \cdot n} = \frac{an}{n(n+x)}$.

Digitized by Google

Da nun $an+ax>an$; so ist auch $\frac{an+ax}{n(n+x)}>\frac{an}{n(n+x)}$ (§. 98. 4.),

d. i. $\frac{a}{n}>\frac{a}{n+x}$.

Zusatz 3.

Auf ähnliche Art überzeugt man sich auch von der Wahrheit folgender Sätze:

a) Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches um dieselbe Zahl vermehrt, so wird der Werth des Bruches geändert, und zwar vermehrt oder vermindert, je nachdem der Bruch ein ächter oder unächter ist. So z. B. ist

$$\frac{3+4}{5+4}=\frac{7}{9}=\frac{7\cdot5}{9\cdot5}=\frac{35}{45},\text{ und }\frac{3}{5}=\frac{3\cdot9}{5\cdot9}=\frac{27}{45},$$

also $\frac{35}{45}>\frac{27}{45}$, d. i. $\frac{3+4}{5+4}>\frac{3}{5}$.

Ferner ist $\frac{17+1}{3+1}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=\frac{27}{6}$, und $\frac{17}{3}=\frac{34}{6}$;

mithin ist $\frac{27}{6}<\frac{34}{6}$, d. i. $\frac{17+1}{3+1}<\frac{17}{3}$.

b) Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches um dieselbe Zahl vermindert, so wird der Bruch kleiner oder größer, je nachdem er ein ächter oder unächter ist. So z. B. ist

$\frac{7-2}{11-2}=\frac{5}{9}=\frac{5\cdot11}{9\cdot11}=\frac{55}{99}$, und $\frac{7}{11}=\frac{7\cdot9}{11\cdot9}=\frac{63}{99}$, mithin ist, weil

$\frac{55}{99}<\frac{63}{99}$ ist, auch $\frac{7-2}{11-2}<\frac{7}{11}$; aber weil

$\frac{19-1}{13-1}=\frac{18}{12}=\frac{18:6}{12:6}=\frac{3}{2}=\frac{3\cdot13}{2\cdot13}=\frac{39}{26}$, $\frac{19}{13}=\frac{19\cdot2}{13\cdot2}=\frac{38}{26}$,

und $\frac{39}{26}>\frac{38}{26}$; so ist auch $\frac{19-1}{13-1}>\frac{19}{13}$.

c) Sind die Unterschiede zwischen Nenner und Zähler zweyer ächten Brüche einander gleich, so ist derjenige Bruch der größere, welcher mit den größern Zahlen geschrieben ist. So z. B. ist $13>5$, $17>9$, aber $17-13=4$ und $9-5=4$; mithin $\frac{13}{17}>\frac{5}{9}$; denn

$$\frac{13}{17}=\frac{13\cdot9}{17\cdot9}=\frac{117}{153},\text{ und }\frac{5}{9}=\frac{5\cdot17}{9\cdot17}=\frac{85}{153}.$$

Digitized by Google

Zusatz 4.

Der innere Werth eines Bruches wird nicht geändert, wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen ändert. Denn es ist z. B.

$$\frac{a-b}{m-n} = \frac{(a-b)x-1}{(m-n)x-1} = \frac{-a+b}{-m+b} = \frac{b-a}{n-m}.$$

Eben so ist $\frac{-a}{m-n} = \frac{-ax-1}{(m-n)x-1} = \frac{a}{-m+n} = \frac{a}{n-m}$.

§. 101.

Gegebene Brüche zu addiren.

Haben die gegebenen Brüche einerley Nenner, so addire man die Zähler, und schreibe der gefundenen Summe den gemeinschaftlichen Nenner unter. Haben aber die gegebenen Brüche nicht einerley Nenner, so bringe man sie (nach §. 100. Zus. 1.) auf gleiche Benennung, und verfahre dann wie vorhin. Es ist nähmlich

$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n}$, denn es ist (nach §. 93. 1.)

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = a \cdot \frac{1}{n} + b \cdot \frac{1}{n} + c \cdot \frac{1}{n} = (a+b+c) \cdot \frac{1}{n} = \frac{a+b+c}{n}.$$

So z. B. ist $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$, und

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} + \frac{7}{12} = \frac{9+10+7}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}.$$

Zusatz 1.

Sind die gegebenen Summanden gemischte Zahlen, so addire man zuerst die Brüche für sich nach der oben gegebenen Vorschrift, ziehe aus der gefundenen Summe nach (§. 97. Zus.) die Ganzen heraus, und addire diese zur Summe der gegebenen Ganzen, oder man richte die gemischten Zahlen ein (§. 97. Zus.), und verfahre dann wie oben. Die erste Methode ist jedoch zweckmäßiger. So z. B. ist

$$4\tfrac{2}{3} + 7\tfrac{5}{6} = 11 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{6} = 11 + \frac{4+5}{6} = 11 + \tfrac{9}{6} = 11 + \tfrac{3}{2} = 12 + \tfrac{1}{2};$$

oder $4\frac{2}{3} + 7\frac{5}{6} = \frac{14}{3} + \frac{47}{6} = \frac{28}{6} + \frac{47}{6} = \frac{28+47}{6} = \frac{75}{6} = \frac{75:3}{6:3} =$

$$= \frac{25}{2} = 12\tfrac{1}{2}.$$

Zusatz 2.

In der Ausübung gebe man der Rechnung folgende Einrichtung: Man schreibe die gegebenen Summanden in verticaler Reihe unter ein-

Digitized by Google

ander, setze die Quotienten aus den Nennern in ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches ihnen zur Seite, und schreibe daneben die entsprechenden neuen Zähler, nähmlich die Producte aus jenen Quotienten in die Zähler der respectiven Brüche. Hierauf dividire man die Summe der neuen Zähler durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner, und addire die etwa gefundenen Ganzen zu den gegebenen Ganzen, wie aus folgenden Rechnungen zu ersehen ist.

1) Man soll die Summe folgender Brüche finden:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9} + \frac{3}{10} + \frac{7}{12} + \frac{8}{15}.$$

Es ist 360 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner, mithin erhält man folgende Rechnung:

Summanden	Quotienten 360	neue Zähler.
$\frac{3}{4}$	90	270
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{5}{8}$	45	225
$\frac{7}{9}$	40	280
$\frac{3}{10}$	36	108
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{8}{15}$	24	192
gem. Nenner 360		1585 = Summe der

Zähler; folglich ist die verlangte Summe

$$= \frac{1585}{360} = \frac{3\frac{17}{72}}{} = 4 + \frac{29}{72}.$$

2) Man bestimme die Summe folgender Brüche:

$$4\frac{3}{5} + 13\frac{7}{9} + \frac{11}{12} + 8\frac{13}{18} + 2\frac{17}{20} + 9\frac{41}{45} + \frac{23}{48}.$$

Hier ist 720 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner, mithin der kleinste gemeinschaftliche Nenner der gegebenen Brüche. Man erhält demnach:

Digitized by Google

	720	
$4\frac{3}{5}$	144	432
$13\frac{7}{9}$	80	560
$\frac{11}{12}$	60	660
$8\frac{13}{18}$	40	520
$2\frac{17}{20}$	36	612
$9\frac{41}{45}$	16	656
$\frac{23}{48}$	15	345
5		$3785 : 720 = \frac{3785}{720} = \frac{757}{144} = 5 + \frac{37}{144}$

41, folglich ist die gesuchte Summe $= 41 + \frac{37}{144}$.

§. 102.

Gegebene Brüche von einander abzuziehen.

1) Man bringe die gegebenen Brüche auf einerley Benennung, im Falle sie verschiedene Nenner haben sollten, und schreibe dem Unterschiede zwischen dem Zähler des Minuends und dem Zähler des Subtrahends den gemeinschaftlichen Nenner unter.

2) Ist von einer ganzen Zahl ein Bruch abzuziehen, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch, der mit dem gegebenen Subtrahenden einerley Nenner hat (§. 98. 3.), und verfahre dann wie vorhin.

3) Hat man gemischte Zahlen von einander abzuziehen; so verwandle man dieselben zuerst in unächte Brüche, und verfahre dann wie in Nro. 1; oder man ziehe die Ganzen von einander ab, und dann auch die Brüche, wenn die Theile des Minuends einzeln betrachtet, größer sind als die einzelnen Theile des Subtrahenden.

4) Eben so verfahre man, wenn von einer gemischten Zahl eine ganze Zahl abzuziehen ist.

Der Beweis für die Gültigkeit der hier aufgestellten Regeln ist für sich einleuchtend.

Digitized by Google

Beyspiele.

1) Es ist $\frac{13}{17} - \frac{8}{17} = \frac{13-8}{17} = \frac{5}{17}$, denn $\frac{8}{17} + \frac{5}{17} = \frac{8+5}{17} = \frac{13}{17}$.

2) Es ist $\frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$, denn $\frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6+1}{10} = \frac{7}{10}$.

3) Es ist $7 - \frac{4}{5} = \frac{35}{5} - \frac{4}{5} = \frac{35-4}{5} = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$.

Man könnte hier sehr zweckmäßig auch so verfahren:

Es ist $7 - \frac{4}{5} = 6 + 1 - \frac{4}{5} = 6 + \frac{5-4}{5} = 6\frac{1}{5}$.

4) Es ist $12 - 3\frac{11}{15} = 12 - \frac{3.15+11}{15} = 12 - \frac{56}{15} =$

$= \frac{180}{15} - \frac{56}{15} = \frac{180-56}{15} = \frac{124}{15} = 8\frac{4}{15}$.

Oder $12 - 3\frac{11}{15} = 12 - \left(3 + \frac{11}{15}\right) = 12 - 3 - \frac{11}{15} = 9 - \frac{11}{15} =$

$= 8 + 1 - \frac{11}{15} = 8 + \frac{15-11}{15} = 8 + \frac{4}{5} = 8\frac{4}{5}$.

5) Es ist $23\frac{4}{7} - 15\frac{2}{3} = \frac{23.7+4}{7} - \frac{15.3+2}{3} = \frac{165}{7} - \frac{47}{3} =$

$= \frac{165.3-47.7}{7.3} = \frac{495-329}{21} = \frac{166}{21} = 7\frac{19}{21}$;

oder $23\frac{4}{7} - 15\frac{2}{3} = 23 + \frac{4}{7} - 15 - \frac{2}{3} = 23 - 15 + \frac{4}{7} - \frac{2}{3} =$

$= 8 + \frac{4}{7} - \frac{2}{3} = 8 + \frac{4.3-2.7}{7.3} = 8 + \frac{12-14}{21} = 8 + \frac{-2}{21} =$

$= 8 - \frac{2}{21} = 7 + 1 - \frac{2}{21} = 7 + \frac{21-2}{21} = 7 + \frac{19}{21} = 7\frac{19}{21}$.

Daß man diese Auflösungen der Zahlen in der Ausübung in Gedanken leicht machen könne, um die Rechnung abzukürzen, ist für sich einleuchtend.

6) Es ist $15\frac{3}{4} - 6 = \frac{60+3}{4} - 6 = \frac{63}{4} - \frac{24}{4} = \frac{63-24}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$,

oder kürzer $15\frac{3}{4} - 6 = 15 - 6 + \frac{3}{4} = 9\frac{3}{4}$.

§. 103.

Das Product zu finden, wenn einer der Factoren, oder wenn beyde Factoren Brüche sind.

1) Wie ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplizirt werde, ist schon (§. 98. 5. u. 6.) gezeigt worden.

Digitized by Google

2) Hat man eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu multipliziren, so richte man dieselbe ein, und verfahre dann nach Nro. 1; oder besser: man multiplizire den in der gemischten Zahl vorkommenden Bruch mit dem gegebenen Multiplicator, ziehe die Ganzen heraus, und addire sie zum Producte aus dem Multiplicator in die Ganzen des Multiplicands. Z. B.

$$3\tfrac{4}{5} \cdot 7 = \tfrac{19}{5} \cdot 7 = \tfrac{19 \cdot 7}{5} = \tfrac{133}{5} = 26\tfrac{3}{5},$$

oder $3\frac{4}{5} \cdot 7 = \frac{4}{5} \cdot 7 + 3 \cdot 7 = \frac{28}{5} + 21 = 5\frac{3}{5} + 21 = 26\frac{3}{5}$.

Eben so ist auch $\left(a + \frac{b}{c}\right) d = \frac{ac+b}{c} \cdot d = \frac{acd+bd}{c}$,

oder $\left(a + \frac{b}{c}\right) d = ad + \frac{bd}{c}$.

3) Ist irgend eine Zahl a durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ zu multipliziren; so multiplizire man a mit dem Zähler m, und dividire das Product am durch den Nenner n; oder man dividire zuerst die Zahl a durch n, und multiplizire den Quotienten mit m; nähmlich es ist $\frac{m}{n} \cdot a = \frac{m \cdot a}{n} = m \cdot \frac{a}{n}$. Denn nach §. 42. (Zus. 2.) entsteht das Product aus dem Multiplicand a eben so, wie der Multiplicator $\frac{m}{n}$ aus der Einheit entsteht. Nun erhält man aber aus der Einheit den Bruch $\frac{m}{n}$, wenn man diese durch n dividirt, und den Quotienten mit m multiplizirt, nähmlich es ist $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$; oder wenn man die Einheit mit m multiplizirt, und das Product durch n dividirt, nähmlich es ist auch $\frac{m}{n} = (m \cdot 1) : n = \frac{m \cdot 1}{n}$; folglich ist auch $\frac{m}{n} \cdot a = m \cdot \frac{a}{n} = \frac{m \cdot a}{n}$.

Weil $ma = a \cdot m$; so ist auch $\frac{ma}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$, oder $\frac{m}{n} \cdot a = a \cdot \frac{m}{n}$.

4) Ist in der Gleichung $\frac{m}{n} \cdot a = \frac{am}{n}$ der Factor a auch ein Bruch z. B. $a = \frac{p}{q}$, so erhält man $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \left(m \cdot \frac{p}{q}\right) : n = \frac{mp}{q} : n = \frac{mp}{nq}$ (§. 98. 7), oder auch $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = m\left(\frac{p}{q} : n\right) = m\left(\frac{p}{nq}\right) = \frac{mp}{nq}$.

Also werden zwey Brüche mit einander multiplizirt, wenn man

Digitized by Google

das Product der Zähler durch das Product der Nenner dividirt. Z. B.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{13}{17} = \frac{4.13}{5.17} = \frac{52}{85}.$$

Eben so ist $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mp}{nq} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mpr}{nqs}$, und $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} =$

$$= \frac{3.5.8}{4.6.9} = \frac{3.5.2^3}{2^3.3^3} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}.$$

Es ist in der Ausübung am zweckmäßigsten, die Zähler und Nenner der Factoren noch vor der Multiplication gegen einander abzukürzen. So z. B. ist

$$\frac{12\,a^4b^3}{25\,m^2n} \cdot \frac{15\,mn^2}{8\,ab^2} = \frac{12.15.a^4b^3mn^2}{8.25.ab^2m^2n} = \frac{4.3.3.5.a.a^3b^2bmnn}{4.2.5.5.ab^2mmn} =$$

$$= \frac{3.3a^3bn}{2.5m} = \frac{9a^3bn}{10m}, \text{ oder } \frac{12\,a^4b^3}{25\,m^2n} \cdot \frac{15\,mn^2}{8\,ab^2} = \frac{3.a^3b}{5.m} \cdot \frac{3n}{2} = \frac{9a^3bn}{10m}.$$

5) Sind gemischte Zahlen mit einander zu multipliziren; so richte man dieselben ein, und verfahre dann nach den vorhergehenden Vorschriften, oder man verfahre wie bey der Multiplication zusammengesetzter Ausdrücke (§. 44. Zus. 8.). Z. B.

$$5\tfrac{2}{3} \times 3\tfrac{5}{7} = \frac{17}{3} \cdot \frac{26}{7} = \frac{442}{21} = 21\tfrac{1}{21}, \text{ oder}$$

$$5\tfrac{2}{3} \cdot 3\tfrac{5}{7} = \left(5+\tfrac{2}{3}\right) \cdot \left(3+\tfrac{5}{7}\right) = \left(5+\tfrac{2}{3}\right).3 + \left(5+\tfrac{2}{3}\right) \cdot \tfrac{5}{7} =$$

$$= 15 + 2 + \frac{25}{7} + \frac{10}{21} = 17 + \frac{75}{21} + \frac{10}{21} = 17 + \frac{85}{21} =$$

$$= 17 + 4\tfrac{1}{21} = 21\tfrac{1}{21}.$$

Zusatz 1.

Also sind auch die (§. 69. XIV. XV.) aufgestellten Sätze noch gültig, wenn die dortigen Größen A und B keine ganzen Zahlen sind.

Zusatz 2.

Ist $a < b$; so ist $\frac{a}{b} < 1$, mithin ein ächter Bruch; also ist auch $A \cdot \frac{a}{b} < A \cdot 1$, oder $\frac{Aa}{b} < A$, es mag A eine ganze oder gebrochene Zahl seyn. Multiplizirt man demnach was immer für eine Zahl A durch einen ächten Bruch $\frac{a}{b}$, so ist das Product immer klei-

Digitized by Google

ner als der Multiplicand. Sind aber beyde Factoren ächte Brüche, so ist das Product immer kleiner als jeder derselben.

Also ist, wenn $\frac{a}{b} < 1$ ist, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}$, aus demselben Grunde $\left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^4 < \left(\frac{a}{b}\right)^3$, u. s. w. allgemein also ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} < \left(\frac{a}{b}\right)^m$; d. h. ein ächter Bruch wird um so kleiner, auf eine je höhere Potenz er erhoben wird.

Zusatz 3.

Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$, u. s. w. allgemein also $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, d. h. ein Bruch wird potenzirt, wenn man Zähler und Nenner auf die gegebene Potenz erhebt.

Zusatz 4.

Sind a und b relative Primzahlen, so sind es auch a^n und b^n (§. 87. Zus. 5.), also ist sowohl $\frac{a}{b}$ als auch $\frac{a^n}{b^n}$ oder $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ ein Bruch. Wird demnach was immer für ein Bruch potenzirt, so ist auch die erhaltene Potenz ein Bruch, und zwar ein ächter oder ein unächter, je nachdem die Wurzel $\frac{a}{b}$ ein ächter oder unächter Bruch ist.

§. 104.

Gebrochene Zahlen durch einander zu dividiren.

Es bezeichne A was immer für eine Zahl, welche durch den Bruch $\frac{a}{b}$ zu dividiren ist. Man bezeichne den Quotienten mit x, man setze nähmlich $A : \frac{a}{b} = x$; so muß (§. 69. I.) $A = \frac{a}{b} \cdot x = \frac{ax}{b}$ seyn, mithin auch $b \cdot A = b \cdot \frac{ax}{b} = ax$ (§. 98. 2.), und daher $x = \frac{b \cdot A}{a} = \frac{b}{a} \cdot A$, d. h. es ist $A : \frac{a}{b} = A \cdot \frac{b}{a} = \frac{Ab}{a}$.

Es wird demnach was immer für eine Zahl A durch einen Bruch

Digitized by Google

$\frac{a}{b}$ dividirt, wenn man den Dividend A mit dem umgekehrten Divisor multiplizirt, oder wenn man das Product aus dem Dividend in den Nenner des Bruches durch den Zähler desselben dividirt. Ist $A = \frac{m}{n}$ so erhält man $\frac{m}{n} : \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{na}$.

Beyspiele.

1) $24 : \frac{3}{4} = \frac{24 \cdot 4}{3} = 8 \cdot 4$ (§. 69. XV.) $= 32$.

2) $30 : 4\frac{5}{7} = 30 : \frac{33}{7} = \frac{30 \cdot 7}{33} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 7}{3 \cdot 11} = \frac{70}{11} = 6\frac{4}{11}$.

3) $\frac{6}{35} : \frac{12}{55} = \frac{6}{35} \cdot \frac{55}{12} = \frac{1}{7} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{14}$.

4) $7\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{15}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$.

5) $6\frac{5}{8} : 4\frac{2}{3} = \frac{53}{8} : \frac{14}{3} = \frac{53 \cdot 3}{8 \cdot 14} = \frac{159}{112} = 1\frac{47}{112}$.

6) $12\frac{3}{5} : 7\frac{14}{19} = \frac{63}{5} : \frac{147}{19} = \frac{63 \cdot 19}{5 \cdot 147} = \frac{21 \cdot 19}{5 \cdot 49} = \frac{3 \cdot 19}{5 \cdot 7} = \frac{57}{35} = 1\frac{22}{35}$.

Hat man eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu dividiren, so dividire man zuerst die Ganzen des Dividends durch den gegebenen Divisor, verwandle den Rest mit dem in der gemischten Zahl vorkommenden Bruche in einen unächten Bruch, und dividire diesen dann durch den gegebenen Divisor nach einer der beyden bekannten Regeln, so ist der erste gefundene Quotient um diesen zweyten vermehrt, der verlangte. So z. B. ist

$19\frac{5}{8} : 3 = 6 + \left(1\frac{5}{8}\right) : 3 = 6 + \frac{13}{8} : 3 = 6\frac{13}{24}$, denn es ist

$$19\frac{5}{8} : 3 = \left(19 + \frac{5}{8}\right) : 3 = \frac{19}{3} + \frac{5}{8 \cdot 3} = 6 + \frac{1}{3} + \frac{5}{24} =$$
$$= 6 + \frac{8}{24} + \frac{5}{24} = 6 + \frac{13}{24}.$$

Zusatz 1.

Also sind die (§. 69. XVII. und XVIII.) aufgestellten Sätze auch dann noch gültig, wenn die dortigen Quotienten $\frac{m}{n}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{b}{a}$ keine ganzen Zahlen sind.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Da bey ungeändertem Dividende der Quotient um so größer wird, je kleiner der Divisor genommen wird, so ist, wenn $\frac{a}{b} < 1$, also ein ächter Bruch ist, $A : \frac{a}{b} > A : 1$, d. i. $A : \frac{a}{b} > A$. Wird demnach irgend eine Größe A durch einen ächten Bruch dividirt, so wird der Quotient größer als der Dividend.

§. 105.

Einen irregulären Bruch in einen regulären oder in eine ganze Zahl zu verwandeln.

Die irregulären Brüche lassen sich auf eine der folgenden Formen bringen: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c}$. Nun bezeichnet aber $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ nichts anders als den Quotienten $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, und weil $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}$ ist; so muß auch $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ seyn.

Eben so ist $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$, und $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Es ist also z. B. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} : \frac{\frac{m}{n}}{p} = \frac{ad}{bc} : \frac{m}{np} = \frac{adnp}{bcm}$, und

$$\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}} : \frac{4}{\frac{1}{7}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{11}{3}} : \frac{28}{5} = \frac{15}{22} \cdot \frac{5}{28} = \frac{75}{616}.$$

Von den künstlichen Brüchen.

§. 106.

Brüche, deren Nenner Zahlen von bestimmter Form seyn müssen, heißen wir künstliche, um sie von den gemeinen Brüchen, deren Nenner was immer für ganze Zahlen seyn können, und die wir

Digitized by Google

bisher betrachtet haben, zu unterscheiden. Solche künstliche Brüche sind z. B. die Decimal-Brüche, oder zehntheilige Brüche, deren Nenner immer 10 oder eine Potenz von 10 sind, und die demnach in der allgemeinen Form $\frac{A}{10^n}$, wo A und n jede beliebige ganze Zahl bezeichnen können, enthalten sind. Eben so heißen Brüche, deren Nenner lauter Potenzen der Zahl 60 sind, Sexagesimal-Brüche oder sechzigtheilige Brüche, u. s. w.

A. Von den Decimal-Brüchen.

§. 107.

Aus dem, was (§. 20—22) gesagt wurde, erhellt, daß man die Decimal-Brüche auch ohne Nenner bezeichnen könne, indem man diese durch das Absonderungszeichen andeutet, wodurch sich also die Decimal-Brüche von den gemeinen Brüchen schon ihrer Form nach unterscheiden. So z. B. ist

$$6534{\cdot}728 = 6.10^3+5.10^2+3.10^1+4+7.\tfrac{1}{10}+2.\tfrac{1}{100}+$$

$$+8.\tfrac{1}{1000} = 6.10^3+5.10^2+3.10^1+4+7.\tfrac{1}{10^1}+2.\tfrac{1}{10^2}+8.\tfrac{1}{10^3}.$$

$$= 6.10^3+5.10^2+3.10^1+4+7.10^{-1}+2.10^{-2}+8.10^{-3}$$

(§. 71. 3.).

$$= \overset{3\,2\,1\,0}{6534}+\tfrac{7}{10}+\tfrac{2}{100}+\tfrac{8}{1000}.$$

$$= \overset{3\,2\,1\,0}{6534}+\tfrac{7.100}{1000}+\tfrac{2.10}{1000}+\tfrac{8}{1000}.$$

$$= \overset{3\,2\,1\,0}{6534}+\tfrac{700+20+8}{1000} = \overset{3\,2\,1\,0}{6534}+\tfrac{728}{1000} = \overset{3\,2\,1\,0}{6534}+0{\cdot}728$$

(§. 21.)

$$= \frac{6534.1000+728}{1000} = \frac{6534000+728}{1000} = \frac{6534728}{1000} = 6534{\cdot}728 \text{ (§. 64.)}.$$

Man sieht hieraus zugleich die Gültigkeit der für die Numeration der Decimal-Zahlen (§. 21 und 22.) gegebenen Vorschriften klar und deutlich ein.

Zusatz 1.

Bezeichnen wir die Ziffern einer Decimal-Zahl allgemein durch Buchstaben, und zwar die Ziffer der Einheiten durch η, und die fol-

Digitized by Google

genden Ziffern der Ganzen von der Rechten gegen die Linke mit A, B, C, D..., so daß also A die Ziffer der Zehner, B die Ziffer der Hunderte, u. s. w. bezeichnet, die Decimal-Ziffern aber von der Linken gegen die Rechte der Reihe nach mit a, b, c, d...; so läßt sich allgemein jede Decimal-Zahl auf folgende Art darstellen:

$$.... + D.10^4 + C.10^3 + B.10^2 + A.10 + \eta + a.10^{-1} + b.10^{-2} + c.10^{-3} + d.10^{-4} + ...$$

So wie nun der Ausdruck $\overset{4\ 3\ 2\ 1}{DCBA}\eta$ die Ganzen der gegebenen Decimal-Zahl als Zahl für sich darstellt, so kann man auch die Decimal-Ziffern von der Linken gegen die Rechte der Ordnung nach mit den negativen Zeigern $-1, -2, -3$. u. s. w. versehen, und also den Decimal-Bruch $a.10^{-1} + b.10^{-2} + c.10^{-3} + d.c^{-4} = \frac{\overset{3\ 2\ 1}{abcd}}{10^4}$ auch also bezeichnen: $\overset{-1\ -2\ -3\ -4}{a\ b\ c\ d}$. Die obige Decimal-Zahl läßt sich demnach auch so darstellen: $\overset{4\ 3\ 2\ 1\ 0\ \ -1\ -2\ -3\ -4}{DCBA\eta \cdot a\ b\ c\ d}$...

Übrigens ist es nicht nothwendig, alle Ziffern der gegebenen Zahl mit Zeigern zu versehen, sondern es ist schon hinreichend, wenn eine einzige Ziffer derselben den gehörigen Zeiger erhält, oder wenn man das Absonderungszeichen setzt. Man könnte demnach kürzer auch so schreiben: $DCBA\overset{2}{\eta}abcd$, oder $\overset{4}{D}CBA\eta abcd$, oder $DCBA\eta \overset{-1}{a}bcd$, oder $DCBA\eta ab\overset{-3}{c}d$, u. s. w., oder endlich $DCBA\eta \cdot abcd$.

Zusatz 2.

Eine Decimal-Zahl bleibt dem Werthe nach ungeändert, wenn man ihr rechts oder links einige Nullen anhängt. Denn es ist $\frac{A}{10^m} = \frac{A \cdot 10^n}{10^m \cdot 10^n} = \frac{A \cdot 10^n}{10^{m+n}}$, also wird, wenn man n Nullen anhängt, nur die Benennung des Bruches geändert. So z. B. ist

$$79 \cdot 304 = 79 \cdot 304000 = 0079 \cdot 304000 = \text{ic.}$$

Eben so ist auch $623 = 623 \cdot = 623 \cdot 0000 = \overset{2}{623}00 = \text{ic.}$

Zusatz 3.

Bey den Decimal-Brüchen wird also bloß der Zähler angeschrieben, der Nenner aber dadurch ausgedrückt, daß man im Zähler von

Digitized by Google

der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern als Decimalen abschneidet, wie viele Nullen im Nenner vorkommen, oder wie viele Einheiten der Exponent von 10 im Nenner enthält. Hat der Zähler nicht so viele Ziffern, als der Nenner Nullen enthält; so ergänzt man die fehlenden Stellen durch Nullen. Setzt man z. B. in der allgemeinen Form $\frac{A}{10^m} = A.10^{-m}$ den Zähler $A = 314$, und nach und nach $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ so erhält man:

$$\frac{314}{10} = 31\cdot 4,\ \frac{314}{10^2} = \frac{314}{100} = 3\cdot 14,\ \frac{314}{10^3} = \frac{314}{1000} = \cdot 314 = 0\cdot 314,$$

$$\frac{314}{10^4} = \cdot 0314,\ \frac{314}{10^5} = 0\cdot 00314, \text{ u. s. w.}$$

Umgekehrt wird ein Decimal-Bruch auf die Form eines gemeinen Bruches gebracht, wenn man denselben als ganze Zahl betrachtet, und die Einheit mit so vielen rechts folgenden Nullen, wie viele Decimal-Ziffern vorkommen, als Nenner unterschreibt.

So z. B. ist $42\cdot 8 = \frac{428}{10}$, $64\cdot 375 = \frac{64375}{1000}$, $0\cdot 756 = \frac{756}{1000}$,

$0\cdot 004378 = \frac{4378}{1000000}$ allgem. $\overset{-4}{a}bcde = \frac{\overset{4}{a}bcde}{10^8}$, und $\overset{-n}{a}bcd. = \frac{abcd}{10^{n+3}}$

§. 108.

Einen gegebenen Decimal-Bruch in der letzten Decimal-Stelle um eine Einheit zu vermehren.

Man verfahre genau so, wie im §. 14, indem man die Anzahl der Decimal-Ziffern ungeändert läßt. Vermehrt man z. B. die Zahl 17·345 in der letzten Stelle um eine Einheit, so erhält man 17·346, und so geht die Zahl 43·749 über in 43·750, die Zahl 8·3699 in 8·3700, u. s. w.

Zusatz.

Vergleicht man bey zwey Decimal-Brüchen, die nicht alle Stellen mit einerley Ziffern besetzt haben, von der Linken gegen die Rechte die Ziffern derselben Ordnung mit einander, so ist derjenige Decimal-Bruch, welcher eine frühere Stelle mit einer höheren Ziffer besetzt hat, der größere. So z. B. ist von den Brüchen 18·3472 und 18·3475 der letzte der größere; eben so ist $316\cdot 45876 < 316\cdot 45976$, und $7\cdot 542 > 7\cdot 541879$; u. s. w.

Digitized by Google

§. 109.

Jeder gemeine Bruch, dessen Nenner bloß die Factoren 2 und 5 enthält, oder der ein Product aus was immer für Potenzen dieser beyden Zahlen ist, läßt sich immer in einen endlichen Decimal-Bruch, d. h. in einen solchen, der eine bestimmte Anzahl von Decimal-Ziffern enthält, verwandeln. Die allgemeine Form eines solchen gemeinen Bruches ist $\frac{A}{2^m 5^n}$. Nun ist aber $\frac{A}{2^m.5^n} = \frac{A.2^n.5^m}{2^m.5^n.2^n.5^m} =$

$= \frac{A.2^n.5^m}{2^{m+n}.5^{m+n}} = \frac{A.2^n.5^m}{(2.5)^{m+n}} = \frac{A.2^n.5^m}{10^{m+n}}$, folglich ein Decimal-Bruch von $(m+n)$ Decimal-Ziffern. So z. B. ist

$$\frac{13}{16} = \frac{13}{2^4} = \frac{13.5^4}{2^4.5^4} = \frac{13.625}{10^4} = \frac{8125}{10000} = 0{\cdot}8125;$$

eben so ist auch $\frac{43}{125} = \frac{43}{5^3} = \frac{43.2^3}{5^3.2^3} = \frac{43.8}{10^3} = \frac{344}{1000} = 0{\cdot}344;$

$$\frac{3127}{2^4.5^3} = \frac{3127.5}{2^4.5^4} = \frac{15635}{10^4} = 1{\cdot}5635;$$

$$\frac{45729}{2^3.5^5} = \frac{45729.2^2}{2^5.5^5} = \frac{45729.4}{10^5} = \frac{182916}{10^5} = 1{\cdot}82916$$

$$\text{und } \frac{83}{2^2.5^6} = \frac{83.2^4}{2^6.5^6} = \frac{83.16}{10^6} = \frac{1328}{10^6} = 0{\cdot}001328.$$

§. 110.

Ist ein zur kleinsten Benennung gebrachter Bruch $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, so müssen A und B Gleichvielfache von a und b seyn, d. h. es muß A : a = B : b = derselben ganzen Zahl seyn.

Denn da $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, so ist auch $\frac{a}{b}.Bb = \frac{A}{B}.Bb$, d. i. $aB = A.b$ mithin auch $\frac{Ab}{ab} = \frac{aB}{ab}$, oder $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$. Wäre nun A nicht durch a, also auch B nicht durch b theilbar; so setze man weil $A > a$ und $B > b$ seyn muß, indem a und b relative Primzahlen seyn sollen,

$$A : a = p + \frac{r}{a}, \text{ und } B : b = q + \frac{s}{b},$$

wo p und q ganze Zahlen, und $\frac{r}{a}$ und $\frac{s}{b}$ aber ächte Brüche bedeu-

Digitized by Google

ten. Da nun, wie wir oben gesehen haben, $\frac{A}{a} = \frac{A}{b}$ seyn muß, so wäre auch

$$p + \frac{r}{a} = q + \frac{s}{b}, \text{ also } p - q = \frac{s}{b} - \frac{r}{a}.$$

Da ferner $\frac{s}{b} < 1$, und auch $\frac{r}{a} < 1$, so ist um so mehr $\frac{s}{b} - \frac{r}{a} < 1$; also wäre $\frac{s}{b} - \frac{r}{a}$ entweder ein ächter (positiver oder negativer) Bruch, oder es wäre $\frac{s}{b} - \frac{r}{a} = 0$. Allein es kann $\frac{s}{b} - \frac{r}{a}$ unmöglich ein Bruch seyn, weil sonst auch $p - q$, d. i. der Unterschied zweyer ganzen Zahlen gleich einem Bruche wäre, was unmöglich ist. Wäre aber $\frac{s}{b} - \frac{r}{a} = 0$, so wäre $\frac{s}{b} = \frac{r}{a}$, also auch $\frac{s}{b} . ab = \frac{r}{a} . ab$, oder $as = br$, demnach auch $\frac{as}{bs} = \frac{br}{bs}$, oder $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$.

Da nun $r < a$ und $s < b$ oben vorausgesetzt wurden; so wäre der Bruch $\frac{a}{b}$ in noch kleineren Zahlen $\frac{r}{s}$ ausgedrückt, was nicht seyn kann; indem $\frac{a}{b}$ schon zur kleinsten Benennung gebracht, mithin a und b als relative Primzahlen vorausgesetzt wurden. Also können die Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ nur ganze Zahlen seyn.

§. 111.

Wenn der Nenner eines zur kleinsten Benennung gebrachten gemeinen Bruches außer 2 und 5 noch andere einfache Factoren hat, die größer als 1 sind, so läßt er sich nicht durch einen endlichen Decimal-Bruch ausdrücken. Denn der gegebene gemeine Bruch sey $\frac{a}{b}$, wo a und b relative Primzahlen sind, und wo b den Factor m, der weder durch 2 noch durch 5 theilbar und größer als 1 ist, enthalten soll; so sind m und 2 sowohl, als auch m und 5 relative Primzahlen, mithin auch m und 10 (§. 87. Zus. 3.), also auch m und 10^n, wo n was immer für eine ganze positive Zahl bezeichnen mag, d. h. es kann m kein Maß von 10^n seyn. Könnte nun der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen endlichen Decimal-Bruch, d. h. durch einen solchen Decimal-Bruch, welcher eine bestimmte Anzahl, z. B. m Decimal-Ziffern

Digitized by Google

hat, vollkommen genau ausgedrückt werden, so ließe sich dieser wieder in der Form eines gemeinen Bruches, z. B. $\frac{A}{10^m}$ darstellen, nähmlich es wäre $\frac{a}{b} = \frac{A}{10^m}$; folglich müßte b ein Factor von 10^m (§. 110) seyn, also würde auch m die Zahl 10^m messen, weil b durch m gemessen wird (§. 80), welches dem obigen, daß m kein Maß von 10^m seyn könne, widerspricht.

§. 112.

Ein Decimal-Bruch wird durch eine Potenz von 10 multiplizirt oder dividirt, wenn man den Decimal-Punct um so viele Stellen, als der Exponent von 10 anzeigt, weiter gegen die Rechte oder gegen die Linke rückt. So z. B. ist

$347{\cdot}8569 \times 10^2 = 347{\cdot}8569 \,.\, 100 = 34785{\cdot}69$
$347{\cdot}8569 \times 10^6 = 347856900,$
$0{\cdot}04597 \times 10^3 = 0{\cdot}04597 \,.\, 1000 = 45{\cdot}97,$
$750{\cdot}84 : 10 = 75{\cdot}084$
$750{\cdot}84 : 1000 = 750{\cdot}84 : 10^3 = 0{\cdot}75084$
$750{\cdot}84 : 10^5 = 750{\cdot}84 : 100000 = 0{\cdot}0075084$
$7893000 : 10^6 = 7{\cdot}893000 = 7{\cdot}893$

Der Beweis für die Gültigkeit des angegebenen Verfahrens erhellt aus der Natur unseres Zahlensystems (§. 21).

Zusatz 1.

Da $0{\cdot}4728 = \overset{-1}{4728} = \overset{-2}{4728} = \overset{-3}{4728} = \overset{-4}{4728}$ (§. 107. Zus. 1.)

$$= \frac{4728}{10^4},$$

und $0{\cdot}4728 \,.\, 10^1 = 4{\cdot}728 = \overset{-1}{4728} = \overset{-2}{4728} = \overset{-3}{4728} = \overset{(-4+1)}{4728},$

$0{\cdot}4728 \,.\, 100 = 0{\cdot}4728 \,.\, 10^2 = 47{\cdot}28 = \overset{-1}{4728} = \overset{-2}{4728} = \overset{(-4+2)}{4728};$

$0{\cdot}4728 \,.\, 1000 = 0{\cdot}4728 \,.\, 10^3 = 472{\cdot}8 = \overset{-1}{4728} = \overset{(-4+3)}{4728};$

$0{\cdot}4728 \,.\, 10000 = 0{\cdot}4728 \,.\, 10^4 = \overset{0}{4728} = \overset{(-4+4)}{4728};$

u. s. w.; so sieht man, daß ein Decimal-Bruch mit einer Potenz von 10 multiplizirt werde, wenn man den Zeiger irgend einer Ziffer des Multiplicands um den Exponenten von 10 vermehrt.

Digitized by Google

Eben so ist auch $6045{\cdot}79 : 10^1 = 604579^{-1} : 10 = 604{\cdot}579 = 604579^{-3} = 604579^{(-1-1)} = 604579$;

$6045{\cdot}79 : 10^2 = 604579^{-2} : 10^2 = 60{\cdot}4579 = 604{\cdot}579^{-4} = 604579^{(-1-3)} = 604579$;

$6045{\cdot}79 : 10^3 = 604579^{-1} : 10^3 = 6{\cdot}04579 = 604579^{-5} = 604579^{(-1-3)} = 604579$;

u. s. w. Also wird auch ein Decimal-Bruch durch eine Potenz von 10 dividirt, wenn man den Zeiger irgend einer Ziffer des Dividends um den Exponenten von 10 vermindert.

Zusatz 2.

Es ist $A . 10^{-m} = A . \frac{1}{10^m} = \frac{A}{10^m} = A : 10^m$, und

$A : 10^{-m} = A : \frac{1}{10^m} = A . \frac{10^m}{1} = A . 10^m$.

Also heißt eine Größe mit 10^{-m} multipliziren nichts anders, als sie durch 10^m dividiren, und umgekehrt, eine Größe durch 10^{-m} dividiren nichts anders, als sie mit 10^m multipliziren.

Zusatz 3.

Schreibt man über die niedrigste Ziffer einer gegebenen ganzen Zahl einen positiven oder negativen ganzen Ordnungs-Exponenten m, so ist dieß eben so viel, als wenn man die ganze Zahl, welche die Reihe von Ziffern an und für sich bezeichnet, mit 10^m multiplizirt hätte. Hat man z. B. die Zahl 7538, und schreibt 7538^4, so ist offenbar $7538^4 = 75380000 = 7538 . 10000 = 7538 . 10^4$; schreibt man aber 7538^{-4}; so ist $7538^{-4} = 7538 . 10^{-4} = \frac{7538}{10^4} = 0{\cdot}7538 = 7538 : 10^4$.

§. 113.

Jeder gemeine, zur kleinsten Benennung gebrachte Bruch $\frac{a}{b}$, dessen Nenner b einen oder mehrere von 2 und 5 verschiedene Factoren hat, kann in einen Decimal-Bruch verwandelt werden, welcher dem wahren Werthe $\frac{a}{b}$ so nahe kommt, als man nur immer will. Denn da b und a, b und 10^n (§. 111.) relative Primzahlen sind, mithin auch b und $a . 10^n$ (§. 87. Zus. 3.); so setze man, weil man

Digitized by Google

n immer so groß nehmen kann, daß $a \cdot 10^n > b$ wird, $\frac{a \cdot 10^n}{b} = p + \frac{r}{b}$, wo $r < b$ oder $\frac{r}{b}$ ein ächter Bruch ist. Hieraus folgt nun $\frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \left(p + \frac{r}{b}\right) : 10^n$, d. i. $\frac{a}{b} = \frac{p}{10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n}$. Da nun $\frac{r}{b} < 1$ vermöge unserer Voraussetzung ist; also auch $\frac{r}{b} \cdot \frac{1}{10^n} < 1 \cdot \frac{1}{10^n}$, oder $\frac{r}{b \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}$; so wird der Bruch $\frac{r}{b \cdot 10^n}$ immer kleiner und kleiner, je größer n genommen wird, d. h. der Bruch $\frac{a}{b}$ nähert sich ohne Ende dem Werthe $\frac{p}{10^n}$, und der Fehler, der durch Weglassung des Ergänzungstheiles $\frac{r}{b \cdot 10^n}$ begangen wird, ist kleiner als $\frac{1}{10^n}$, d. h. der Fehler beträgt in der n^{ten} Decimal-Stelle keine ganze Einheit mehr; wir können demnach ohne merklichen Fehler den Bruch $\frac{a}{b} = \frac{p}{10^n}$ setzen, wenn nur n so groß genommen wird, als es gerade die Genauigkeit der Rechnung in praktischen Fällen erfordert.

§. 114.

Einen gemeinen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze positive Zahlen sind, in einen Decimal-Bruch zu verwandeln, welcher dem gegebenen Bruche dem Werthe nach entweder vollkommen gleich, oder doch so nahe kommt, als es nur immer die Genauigkeit der Rechnung erfordert.

Man hänge dem Zähler rechts so viele Nullen als Decimalen an, bis er, als ganze Zahl betrachtet, nicht mehr kleiner als der Nenner ist, untersuche dann, welchen Local-Werth die höchste Ziffer des Quotienten habe nach den (§. 68. Anm.) aufgestellten Grundsätzen, um beurtheilen zu können, in der wie vielsten Decimal-Stelle die erste bedeutende Ziffer erscheint; und dann dividire man nach den bekannten Regeln (§. 68), als hätte man es mit lauter ganzen Zahlen zu thun, so lange, bis entweder die Division ein Mahl aufgeht, oder bis man den Näherungswerth hinlänglich genau bestimmt hat. Diese Vorschriften werde ich bey nachstehenden Beyspielen deutlich zu machen suchen.

Digitized by Google

Beyspiel 1. Der gegebene Bruch sey $\frac{29}{32}$, so erhält man

$$\frac{29}{32} = 29 : 32 = 29 \cdot 0 : 32 = 0 \cdot 90625$$
$$\quad\quad\quad

$$\frac{743}{1024} = 743 : 1024 = 743 \cdot 0 : 1024 = \cdot 7255859375$$

2620
5720
·6000
8800
6080
9600
3840
7680
5120
····

Beyspiel 4. Der gegebene Bruch sey $\frac{5}{7}$; so erhält man:

$$\frac{5}{7} = 5 : 7 = 5 \cdot 0 : 7 = 0 \cdot 7142857\ldots$$

·10
·030
·0020
60
40
50
···

Aus dieser Rechnung sieht man, daß 0·7142857 der Decimal-Ausdruck des gegebenen Bruches auf 7 Decimal-Ziffern ist.

Beyspiel 5. Es sey $\frac{35}{44}$ der gegebene Bruch; so findet man

$$\frac{35}{44} = 35 : 44 = 35 \cdot 0 : 44 = 0 \cdot 795454\ldots$$

4·20
·240
200
240
200
24
····

Also ist 0·795454 der Decimal-Ausdruck von $\frac{35}{44}$ auf 6 Decimal-Ziffern.

Zusatz 1.

In den beyden letzten Beyspielen wird die Division nie aufgehen, so weit man auch dieselbe fortsetzen mag; allein man sieht auch zugleich ein, daß der Decimal-Ausdruck dem wahren Werthe des gegebenen Bruches um so näher kommen müsse, je weiter die Division getrieben wird.

Auch sieht man aus dem Gange der Rechnung sogleich, daß, wenn ein gemeiner Bruch einen unendlichen Decimal-Bruch gibt, im-

Digitized by Google

mer eine oder mehrere Decimal-Ziffern entweder gleich von der ersten Decimal-Stelle angerechnet, oder von einer spätern Stelle an periodisch, d. h. immer in derselben Ordnung, wiederkehren; denn da bey der Division mit einem bestimmten unveränderlichen Divisor nur eine bestimmte Anzahl von Resten Statt finden kann, so müssen, wenn ein schon vorhanden gewesener Rest zum zweyten Mahle vorkommt, im Quotienten auch dieselben Ziffern in derselben Ordnung wiederkehren, und diese Wiederhohlung muß dann nothwendig ohne Ende Statt finden. — Ist der Divisor n, so können die Reste nur folgende seyn: 0, 1, 2, 3, ... (n — 2), (n — 1); mithin kann die Periode, welche entsteht, indem man irgend eine Zahl durch n dividirt, nie mehr als höchstens (n — 1) Ziffern haben; denn wäre der Rest, welcher immer kleiner als n seyn muß, ein Mahl 0, so wäre die Division ein Messen, folglich könnte der Quotient kein periodischer Decimal-Bruch seyn.

So findet man z. B.

1) $\frac{1}{3} = 0{\cdot}3333\ldots$ ohne Ende; hier ist also die Periode einzifferig.

2) $\frac{1}{7} = 0{\cdot}142857142857142857\ldots$. hier ist die Periode sechszifferig, nähmlich 142857.

3) $\frac{1}{11} = 0{\cdot}09090909\ldots$. hier ist die Periode zweyzifferig, nähmlich 09.

4) $\frac{1}{13} = 0{\cdot}076923076923\ldots$ hier ist die Periode sechszifferig, nähmlich 076923.

5) $\frac{1}{6} = 0{\cdot}16666\ldots$ hier beginnt die Periode erst bey der zweyten Stelle.

6) $\frac{1}{175} = 0{\cdot}005714285714285\ldots$ hier beginnt die Periode erst bey der dritten Stelle.

Ist die Periode nur einzifferig, so setzt man auf die wiederhohlende Ziffer einen Punct; ist sie aber mehrzifferig, so setzt man über die erste und letzte Ziffer einen Punct, um kurz anzudeuten, daß der Bruch periodisch sey. Man schreibt nähmlich

$$\frac{1}{3} = 0{\cdot}\dot{3}$$

$$\frac{1}{6} = 0{\cdot}1\dot{6}$$

$$\frac{3}{11} = 0{\cdot}272727\ldots = 0{\cdot}\dot{2}\dot{7}$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{7} = 0{\cdot}\dot{1}42857$$

$$\frac{5}{7} = 0{\cdot}7\dot{1}4285$$

$$\frac{5}{6} = 0{\cdot}8333\ldots = 0{\cdot}8\dot{3}$$

$$\frac{1}{175} = 0{\cdot}00\dot{5}71428.$$

Zusatz 2.

Da man sich in der Ausübung, wie wir in der Folge sehen werden, auf eine bestimmte Anzahl von Decimal-Ziffern beschränkt, so werden öfters eine oder mehrere folgende Decimal-Ziffern weggelassen, wobey man sich an folgende Vorschrift zu halten hat.

Ist die auf die letzte beybehaltene Ziffer folgende Decimal-Ziffer 0, 1, 2, 3, oder 4; so läßt man den genommenen Näherungswerth unverändert; ist aber jene Decimal-Ziffer 6, 7, 8 oder 9, so vermehrt man die letzte beybehaltene Ziffer um eine Einheit. Ist aber die folgende Stelle mit einer 5 besetzt, und folgen keine andern Ziffern mehr nach, so ist der Fehler derselbe, man mag die letzte beybehaltene Ziffer um eine Einheit vermehren oder ungeändert lassen; folgen aber auf die 5 noch bedeutende Ziffern, so ist der Fehler geringer, wenn man die letzte beybehaltene Ziffer um eine Einheit vermehrt. Gesetzt, man hätte den Decimal-Bruch 0·4756238, und man hätte zu seinem Zwecke nur vier Stellen nöthig, so wäre 0·4756 dieser Näherungswerth. Hätte man aber von dem Bruche 0·576834926 nur sechs Stellen nöthig, so würde man nicht 0·576834, sondern 0·576835 nehmen, denn da

$$0{\cdot}576834926 - 0{\cdot}576834 = \frac{576834926}{10^9} - \frac{576834}{10^6} =$$

$$= \frac{576834926 - 576834000}{10^9} = \frac{926}{10^9} = 0{\cdot}000000926, \text{ und}$$

$$0{\cdot}576835 - 0{\cdot}576834926 = \frac{576835}{10^6} - \frac{576834926}{10^9} =$$

$$= \frac{576835000 - 576834926}{10^9} = \frac{74}{10^9} = 0{\cdot}000000074,$$

so sieht man, daß der Fehler im letzten Falle weit kleiner sey als im ersten. Sollten von dem Bruche 0·74585 nur vier Stellen beybehalten werden, so würde der Bruch 0·7458 um $\frac{5}{10^5}$ zu klein, und der Bruch

Digitized by Google

$0{\cdot}7459$ um $\frac{5}{10^5}$ zu groß seyn, also sind beyde Fehler einander gleich. Sollte man aber vom Bruche $0{\cdot}7458523$ nur vier Stellen beybehalten, so würde der Bruch $0{\cdot}7459$ dem gegebenen näher liegen, als der Bruch $0{\cdot}7458$.

§. 115.

Einen unendlichen Decimal-Bruch F in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe zu verwandeln.

Es sey z. B. $F = o{\cdot}abc\ldots labc\ldots labc\ldots l\ldots = o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l}$, wo die Periode $abc\ldots kl$ aus n Ziffern besteht, und schon bey der ersten Stelle beginnt; so ist

$$10^n . F = 10^n \times o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l} = abc\ldots kl\ \dot{a}bc\ldots k\dot{l},$$

und hievon

$$F = o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l} = o{\cdot}abkl\ \dot{a}bc\ldots k\dot{l}\ldots \text{ abgezogen,}$$

erhält man

$$10^n F - F = \overset{n-1}{abc\ldots kl}{\cdot}\overset{1}{abc\ldots kl} - o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l}, \text{ oder}$$

$$(10^n - 1)\,F = \overset{n-1}{abc\ldots kl}{\cdot}\overset{1}{abc\ldots kl} - o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l},$$

$$= \overset{n-1}{abc\ldots kl} + o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l} - o{\cdot}\dot{a}bc\ldots k\dot{l},$$

$$= \overset{n-1}{abc\ldots kl} \text{ und}$$

$$\frac{(10^n - 1)F}{(10^n - 1} = \frac{\overset{1}{abc\ldots kl}}{10^n - 1}, \text{ d. i.}$$

$$F = \frac{\overset{n-1}{abc\ldots kl}}{10^n - 1};$$

d. h. der gemeine Bruch, der mit F einerley Werth hat, wird gefunden, wenn man die Periode als ganze Zahl betrachtet, durch eine Zahl dividirt, die aus so vielen Neunern besteht, als die Periode Ziffern hat. Z. B.

Es sey $F = o{\cdot}\dot{2}\dot{7}$, so ist $100\,F = 100 . o{\cdot}\dot{2}\dot{7} = 100.o{\cdot}272727\ldots = 27{\cdot}\dot{2}\dot{7}\ldots = 27{\cdot}\dot{2}\dot{7}$, also $100\,F - F = 27{\cdot}\dot{2}\dot{7} - o{\cdot}\dot{2}\dot{7} = 27$, oder $99\,F = 27$, folglich $F = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Digitized by Google

Es sey $F = 0{\cdot}7083333\ldots = 0{\cdot}7083$; so ist, weil hier die Periode nur eine Ziffer enthält,

$10F = 7{\cdot}083$, mithin, wenn man von dieser Gleichung

$F = 0{\cdot}7083$ abzieht:

$$9F = 7{\cdot}083 - 0{\cdot}7083 = 7{\cdot}0833 - 0{\cdot}7083 = 6{\cdot}375 = \frac{6375}{1000} = \frac{6375:25}{1000:25} = \frac{255}{40} = \frac{51}{8},$$ folglich $F = \frac{51}{8} : 9 = \frac{51}{72} = \frac{17}{24}$.

Wenn aber die Periode nicht gleich bey der ersten Decimale beginnt, so verfahre man auf folgende Art: Es sey allgemein:

$F = 0{\cdot}ABC\ldots KL\dot{a}bcd\ldots k\dot{l}$; so erhält man, weil die Periode $\dot{a}bc\ldots\dot{l}$ aus n Ziffern besteht, und ihr m Stellen vorausgehen,

$10^m . F = ABC\ldots K\overset{\circ}{L}\cdot\dot{a}bcd\ldots k\dot{l}$ (§. 112. Zus. 1.), mithin auch

$10^m . 10^n . F = ABC\ldots K\overset{n}{L}\,\dot{a}bcd\ldots k\overset{\circ}{l}\cdot\dot{a}bcd\ldots k\dot{l}$, also durch Subtraction:

$10^m . 10^n . F - 10^m F = ABC\ldots KLabcd\ldots kl\cdot\dot{a}bcd\ldots k\dot{l} -$

$- ABC\ldots K\overset{\circ}{L}\cdot\dot{a}bcd\ldots k\dot{l}$, oder

$10^m (10^n - 1) . F = ABC\ldots KLabcd\ldots kl - ABC\ldots K\overset{\circ}{L}$

folglich $F = \frac{ABC\ldots KLabcd\ldots k\overset{\circ}{l} - ABC\ldots K\overset{\circ}{L}}{10^m (10^n - 1)}$;

d. h. beginnt die Periode erst bey der $(m+1)^{ten}$ Ziffer, und besteht sie aus n Ziffern, so wird der gemeine Bruch, welcher mit dem gegebenen unendlichen Decimal-Bruche einerley Werth hat, gefunden, wenn man denselben, bis zur letzten Ziffer der ersten Periode, als ganze Zahl betrachtet, von ihr die der Periode vorausgehenden Stellen, ebenfalls als ganze betrachtet, abzieht, und diese Differenz durch eine Zahl dividirt, welche mit so vielen Nennern geschrieben ist, als die Periode Stellen hat, mit so vielen rechts folgenden Nullen, als der Periode Stellen vorausgehen. — Wir hätten demnach das obige zweyte Beyspiel auch so behandeln können:

Digitized by Google

Weil $F = 0{\cdot}708333\ldots = 0{\cdot}708\dot{3}$; so erhält man $10^3 F = 708{\cdot}\dot{3}$, und $10^3 . 10^1 F = 7083{\cdot}\dot{3}$, mithin

$10^3 . 10F - 10^3 F = 7083{\cdot}\dot{3} - 708{\cdot}\dot{3} = 7083 + 0{\cdot}\dot{3} - 708 - 0{\cdot}\dot{3} =$
$= 7083 - 708$, folglich $10^3 . (10 - 1) . F = 6375$,

und $F = \frac{6375}{10^3 . 9} = \frac{6375}{9000} = \frac{17}{24}$, wie oben.

§. 116

Decimal-Zahlen zu addiren und zu subtrahiren.

Man setze die gegebenen Zahlen nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit unter einander, und verfahre dann wie bey ganzen Zahlen, indem man sich die etwa fehlenden Stellen einer gegebenen Zahl mit Nullen besetzt denkt.

Beyspiele für die Addition.

1)	728·3458		2)	4·937	
	52·87649			508·02	
	0·4136	Summanden		0·0965	Summanden
	143·562			62·74	
	0·000433			5·9	
	925·198323	Summe		581·6935	

Beyspiele für die Subtraction.

1)	824·57089	Min.	2)	97·45382	Min.
	—75·69435	Subtr.		—41·587	Subtr.
	748·87654	Rest.		55·86682	Rest.

3) 4312·95 Min.
—948·72456 Subtr.
3364·22544 Rest.

§. 117.

Decimal-Brüche zu multipliziren.

1) Sind beyde Factoren Decimal-Brüche, so betrachte man sie als ganze Zahlen, mache das Product derselben, und schneide in demselben von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern als Decimalen ab, als in beyden Factoren zugleich vorhanden waren. Denn es seyen $\frac{A}{10^m}$ und $\frac{B}{10^n}$ die beyden Factoren, so ist das Product derselben

Digitized by Google

$\frac{A}{10^m} \cdot \frac{B}{10^n} = \frac{A.B}{10^{m+n}} = AB.10^{-(m+n)}$, welche Gleichung die gegebene Regel enthält.

Beyspiel. Man multiplizire 3708·4532 mit 91·487.

Rechnung. 3708·4532

91·487

33376 0788
370 84532
148 338128
29 6676256
2 59591724

Also ist $339275·2579084 = 3708·4532 \times 91·487$.

Hier wurden die Ziffern des Multiplicators von der Linken gegen die Rechte als Factoren genommen.

2) Ist der eine Factor eine ganze Zahl, so bleibt die obige Regel dennoch gültig.

So z. B. ist $24 \times 708·34 = 17000·16$

141668
283336

17000·16.

3) Ist einer der Factoren ein gemeiner Bruch, so verwandle man entweder den gemeinen Bruch in einen Decimal-Bruch, oder den gegebenen Decimal-Bruch in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe, und verfahre dann nach den bekannten Regeln. Wäre z. B. 0·625 mit $\frac{3}{4}$ zu multipliziren, so setze man

$0·625 \times \frac{3}{4} = 0·625 \times 0·75 = 0·46875$, oder

$0·625 \times \frac{3}{4} = \frac{625}{1000} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32} = 0·46875$.

Es ist auch $0·625 \times \frac{3}{4} = \frac{0·625 \times 3}{4} = \frac{1·875}{4}$, allein einen Decimal-Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, werden wir erst kennen lernen.

Zusatz.

Da $\left(\frac{A}{10^m}\right)^n = \frac{A^n}{(10^m)^n} = \frac{A^n}{10^{mn}}$, so sieht man, daß ein Decimal-Bruch auf irgend eine Potenz erhoben werde, wenn man den-

Digitized by Google

selben als ganze Zahl betrachtet, auf die gegebene Potenz erhebt, und im Resultate so viele Decimal-Ziffern abschneidet, als das Product aus der Anzahl der Decimal-Ziffern in der Wurzel in den Exponenten der gegebenen Potenz-Einheiten beträgt. — Also kommen im Quadrate zwey Mahl, und im Kubus drey Mahl so viele Decimal-Ziffern vor, als in der gegebenen Wurzel.

§. 118.

Regeln für die abgekürzte Multiplication.

In der Ausübung ist es gewöhnlich hinreichend, das Product aus zwey oder mehreren Decimal-Zahlen nur auf einige Stellen genau zu kennen, deren Anzahl in praktischen Fällen durch die Natur der Aufgabe bestimmt wird. Damit man nun im Producte nicht mehr Decimal-Stellen erhalte, als gerade die Genauigkeit der Rechnung erfordert, verfahre man nach folgenden Vorschriften:

1) Man setze die Einheiten des Multiplicators unter diejenige Stelle des Multiplicands, welche im Producte noch vorkommen soll, die übrigen Ziffern des Multiplicators aber schreibe man dann in umgekehrter Ordnung an, so nähmlich, daß die niedrigste Ziffer des Multiplicators die höchste, und umgekehrt, werde.

2) Hat der Multiplicator rechts oder links leere Stellen über sich, so denke man sich dieselben mit Nullen besetzt.

3) Dann multiplicire man mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplicators den Multiplicand von der gerade über ihr stehenden Ziffer angefangen, und schreibe die so erhaltenen Theilproducte wie Additionsposten gerade unter einander; so ist die Summe derselben das verlangte Product.

4) Damit aber die abgekürzten Theilproducte in der letzten Ziffer rechts nicht zu unrichtig werden, so multiplizire man auch die Ziffer des Multiplicands, welche der gerade über dem jedesmahligen Multiplicator stehenden Ziffer rechts vorhergeht, schreibe aber das Product nicht an, sondern zähle in Gedanken bis zu der nächsten Zahl aufwärts, welche die Stelle der Einheiten mit einer 5 besetzt hat, und addire die bey dieser Zahl befindlichen Zehner zum ersten wirklich anzusetzenden Producte. Diese vom vorhergehenden Producte hinzu addirten Zehner nennt man die Correctur.

5) Will man die letzte verlangte Stelle genau haben, so suche man im Producte eine Stelle mehr, als verlangt wurden.

Digitized by Google

Ich werde diejenigen Ziffern der Factoren, welche unter einander zu stehen kommen, und mit denen die Multiplication jedes Mahl begonnen wird, in den folgenden Beyspielen immer mit einerley Buchstaben bezeichnen.

Beyspiele. 1) Man soll das Product 736·8346 × 9081·735642 nur mit drey Decimalen angeben, oder das Product soll bey den Tausendteln abbrechen.

Man setze also: $\overset{c\,b\,a\,d\,e\,f\,g}{736{\cdot}8346} \times \overset{g\,f\,e\,d\,a\,b\,c}{9081{\cdot}735642}$,

nähmlich:

```
      9081·735642
        6438637
    ---------------
    6357214949
     272452069
      5449[illegible]14
       7265388
        272452
         36327
          5449
    ---------------
Prod. = 6691737·048
```

Hier wurde die Multiplication mit der 7 des Multiplicators begonnen, und zwar von 4 an; man sagt nähmlich: 7.2=14, die nächste mit 5 anfangende Zahl ist 15, gibt also 1 zur Correctur; 7.4=28 und 1 zur Correctur ist 29, schreibt die 9 an, und multiplizirt dann auf die gewöhnliche Art weiter. Hierauf multiplizirt man mit der 3 des Multiplicators den Multiplicand von 6 angefangen, sucht aber wieder wegen der Correctur das Product in die vorhergehende 4, indem man spricht: 3 Mahl 4 ist 12, die nächste Zahl ist 15, gibt 1 zur Correctur; 3 Mahl 6 ist 18 und 1 ist 19, schreibt die 9 gerade unter die erste Ziffer des ersten Theilproductes, und fährt dann mit der Multiplication auf gewöhnliche Art fort. Nun multiplizirt man den Multiplicand, von 5 angefangen, mit der 6 des Multiplicators, indem man spricht: 6 Mahl 6 ist 36, die nächste mit 5 anfangende Zahl ist 45, gibt 4 zur Correctur; 6 Mahl 5 ist 30 und 4 gibt 34, schreibt wieder die 4 an, und multiplizirt wie gewöhnlich weiter. Auf diese Art fährt man fort, bis man mit allen Ziffern des Multiplicators multiplicirt hat. Da die 7 des Multiplicators den Localwerth Hundert hat, die 4 des Multiplicands aber den

Digitized by Google

Localwerth Hunderttausendtel, und $10^2 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{10^2}{10^5} = \frac{1}{10^3}$, so hat die 9 des ersten Theilproductes den Localwerth Tausendtel. Beym zweyten Theilproducte wurde die Multiplication mit den Ziffern 3 und 6 begonnen, und da die 3 des Multiplicators den Stellenwerth 10, aber die 6 des Multiplicands den Stellenwerth $\frac{1}{10^4}$ hat, und $10 \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{10}{10^4} = \frac{1}{10^3}$; so hat auch die erste Ziffer des zweyten Theilproductes den Stellenwerth $\frac{1}{10^3}$, und muß demnach unter die erste Ziffer des ersten Theilproductes gesetzt werden. Eben so überzeugt man sich auch, daß die erste Ziffer jedes der folgenden Partial-Producte den Stellenwerth $\frac{1}{10^5}$ habe, und daß demnach die Theilproducte nach dem Gesetze der Gleichnahmigkeit richtig unter einander gesetzt worden sind.

Sucht man das Product 736·8346 × 9081·73564 2 auf gewöhnliche Art, so steht die Rechnung wie folgt:

736·8346 × 9081·73564 2

6357214949	4
272452069	26
5449,0413	852
7265388	5136
272452	06926
36326	942568
5449	041385 2
6691737·049	0788132

Das, was also rechts von der Verticallinie steht, ist des verlangten Zweckes halber überflüssig. Das hier gefundene Resultat ist in der dritten Decimal-Stelle um eine Einheit größer als das obige Resultat. Hätte man sich dieser Ziffer noch versichern wollen, so hätte man das Product auf 4 Decimal-Zahlen suchen müssen.

2) Man entwickle das Product 437·5689 × 570·8194 bis auf 4 Decimal-Stellen.

Digitized by Google

Rechnung. Man setze $\overset{gfabcde}{437{\cdot}5689} \times \overset{edcba}{570{\cdot}8194}$..

	9865734
	2283277600
	17124582 0
	3995735 8
	285409 7
	34249 1
	4566 5
	513 7
	249772·8168

3) Man entwickle das Product $70{\cdot}9376845 \times 910{\cdot}237462$ bis auf die dritte Decimal-Stelle.

Man setze $\overset{badefgh}{70{\cdot}9376845} \times \overset{hgfedcab}{.910{\cdot}237462}$

	548673907
	6371662 2
	81921 3
	2730 7
	637 1
	54 6
	7 3
	4
	64570·136

Man denkt sich hier die Stelle h im Multiplicand mit einer Null besetzt, und spricht, indem man mit der 4 des Multiplicators multiplizirt, 4 Mahl 9 ist 36, die nächste Zahl, die mit 5 anfängt, ist 45, gibt 4 zur Correctur, 4 Mahl 0 und 4 ist 4. — Die 5 des Multiplicators gibt im Producte nichts mehr, und eben so würden die etwa gegen die Linke noch folgenden Stellen nichts mehr geben, deßhalb rücke man in der Folge nur um eine Stelle links hinaus, und setze die folgenden Ziffern des Multiplicators gar nicht mehr an.

4) Man entwickle das Product $\overset{abdefg}{0{\cdot}008765} \times 37{\cdot}245$ mit 3 Decimal-Ziffern.

Digitized by Google

Man erhält

$$\begin{array}{r} {}^{a\,d\,c\,b\,a} \\ 37{\cdot}245 \\ 678 \\ \hline 298 \\ 26 \\ 2 \\ \hline 0{\cdot}326 \end{array}$$

* Daß die hier gegebene Regel für die abgekürzte Multiplication auch auf ganze Zahlen anwendbar sey, ist für sich klar.

§. 119.

Decimal-Brüche zu dividiren.

Alle bey der Division möglichen Fälle lassen sich nach folgender allgemeinen Regel behandeln.

Man untersuche, unter welche Stelle des Dividends die Einheiten des Divisors bey der ersten Division zu stehen kommen, wo dann aus dem Localwerthe jener Stelle der Stellenwerth der höchsten Ziffer im Quotienten erkannt, und dadurch die Anzahl der Ziffern für die Ganzen des Quotienten bestimmt wird (vergl. §. 68. Anm.). Endlich dividire man, nachdem nöthigen Falls dem Dividende rechts eine oder mehrere Nullen angehängt worden sind, wie in ganzen Zahlen, und sondere dann im Resultate die für die Ganzen gehörigen Ziffern ab. — Diese Regel soll durch folgende Beyspiele deutlich gemacht werden.

Beyspiele.

1) Man dividire $2744\overset{a}{7}37{\cdot}922628$ durch $3417{\cdot}564$.

Man spricht hier: 3417 in 27447, also kommen die Einheiten des Divisors unter die mit a bezeichnete Ziffer des Dividends; diese hat aber den Localwerth 100, also fängt der Quotient mit Hunderten an, oder es kommen 3 Ziffern für die Ganzen im Quotienten. Nun betrachte man Dividend und Divisor als ganze Zahlen, und verfahre wie bey der Division in ganzen Zahlen auf gewöhnliche Art. Die Rechnung steht demnach, wie folgt:

$$\begin{array}{l} 2744737{\cdot}922628 : 3417{\cdot}564 = 803{\cdot}127 \\ \quad 10686\ 722 \\ \quad\ \ {=}434\ 0306 \\ \qquad 92\ 27422 \\ \qquad 23\ 922948 \\ \qquad\ \ {=}\ {=}{=}{=}{=}{=} \end{array}$$

Digitized by Google

2) Man dividire 48·97568 durch 9018·34.

Hier sagt man: 9018 in 48975 geht 5 Mahl; mithin kommt die Ziffer der Einheiten (8) des Divisors unter die Tausendtel (5) des Dividends zu stehen, folglich hat auch die höchste Ziffer des Quotienten den Localwerth Tausendtel, man schreibe deßhalb gleich 0·005, und dividire nun wie in ganzen Zahlen weiter. Die Rechnung wird also stehen, wie folgt:

48·97568 : 9018·34 = 0·00543067....
3 883980
2766440
·6693800
6827960
515122.

Es ist demnach hier der Quotient auf 8 Decimal-Ziffern = 0·00543067.

3) Man dividire den Bruch 0·097645 durch 4·325.

Hier sagen wir: 4 in 9 geht 2 Mahl, also kommen die Einheiten des Divisors unter die Stelle der Hundertel, folglich fängt auch der Quotient mit Hunderteln an; es ist nähmlich:

0·097645 : 4·325 = 0·022576...
11145
24950
33250
29750
3800

Es ist demnach 0·022576 der verlangte Quotient mit 6 Decimal-Ziffern.

4) Man dividire 0·0084759 durch 0·00208.

Man sagt hier: 208 in 847, also kommt die 2 des Divisors unter die 8 des Dividends zu stehen, folglich die Einheiten des Divisors unter die Einheiten des Dividends, denn der Divisor würde so unter den Dividend gesetzt werden: $\left.\begin{matrix}0{\cdot}0084759\\0{\cdot}00208\end{matrix}\right\}$; man erhält also

0·0084759 : 0·00208 = 4·0749519...
1559
1030
1980
1080
400
1920
·48.

Digitized by Google

5) Man dividire 415·83769 : 0·095.

Hier spricht man: 9 in 41 geht 4 Mahl, also kommt die 9 des Divisors unter die 1, nähmlich unter die Stelle der Zehner des Dividends, folglich die Einheiten des Divisors (0) um 2 Stellen weiter links, d. i. unter die Stelle der Tausende, also fängt auch der Quotient mit Tausenden an, oder es kommen 4 Stellen für die Ganzen im Quotienten. Die Rechnung wird also folgende seyn:

415·83769 : 0·095 = 4377·65...
35 8
7 37
726
619
490
15.

6) Man dividire 83479·531 durch 512.

Rechnung. 83479·531 : 512 = 163·045958984375
3227
1559
·2353
3·051
4910
3020
4600
5040
4320
2240
1920
3840
2560
· · · ·

Von der Gültigkeit des Verfahrens bey allen diesen Beyspielen kann man sich auch überzeugen, wenn man den Divisor immer in eine ganze Zahl nach (§. 69. VIII.) verwandelt.

So ist beym Beyspiel 1) 2744737·922628 : 3417.564 =
= 10^3.2744737·922628 : 10^3.3417·564 = 2744737922·628 : 3417564.

wo also 2744737 den ersten Theildividend gibt, und demnach die höchste Ziffer des gesuchten Quotienten Einheiten der zweyten Ordnung bezeichnet.

Eben so ist im Beyspiele 4) 0·0084759 : 0·00208 =
= 10^5 . 0·0084759 : 10^5 . 0·00208 = 847.59 : 208,

wo 847 den ersten Partial-Dividend gibt, und der erste Theil-Quo-

Digitized by Google

tient also Einheiten schlechtweg bezeichnet. Eben so überzeugt man sich bey den übrigen Beyspielen.

Zusatz 1.

Man sieht nun auch ein, wie man bey der Division in ganzen Zahlen, wenn diese kein Messen ist, die Rechnung in Decimalen weiter fortsetzen könne.

Zusatz 2.

Wäre eine Decimal-Zahl durch einen gemeinen Bruch zu dividiren, so verwandle man entweder den gemeinen Bruch in einen Decimal-Bruch, und verfahre dann nach der obigen Regel; oder man multiplizire den Dividend mit dem umgekehrten Divisor. So z. B. ist

$$0{\cdot}48 : \frac{3}{4} = 0{\cdot}48 . : 0{\cdot}75 = 0{\cdot}64, \text{ oder}$$

$$0{\cdot}48 : \frac{3}{4} = 0{\cdot}48 \cdot \frac{4}{3} = \frac{0{\cdot}48 \times 4}{3} = \frac{1{\cdot}92}{3} = 0{\cdot}64.$$

Vergleiche nun hiemit den §. 117. 3.

Regeln für die abgekürzte Division.

§. 120.

Es ist öfters bloß nöthig, den Quotienten bis auf eine gewisse Stelle genau zu erhalten, und in einem solchen Falle läßt sich die Rechnung gewöhnlich bedeutend abkürzen, indem man nach folgenden Regeln verfährt.

1) Vor allem untersuche man nach (§. 119), welchen Localwerth die höchste Zifferstelle des Quotienten habe.

2) Dann schneide man im Divisor von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als der Quotient haben soll, oder demselben noch mangeln; diese abgeschnittenen Ziffern bilden den abgekürzten Divisor. Ist nun der erste Partial-Quotient gefunden, so wird zu dem etwa gebliebenen Reste keine neue Ziffer aus dem Dividend herabgesetzt, sondern man kürzt den vorigen Divisor rechts um eine Ziffer ab, um den zweyten abgekürzten Divisor zu erhalten. Hat man die nächste Ziffer des Quotienten bestimmt, so kürzt man wieder den Divisor rechts

Digitized by Google

um eine Stelle ab, und fährt auf diese Art bis zu Ende mit der Division fort.

3) Damit aber der Quotient in der letzten Ziffer nicht zu unrichtig werde, so multiplizire man bey der Bestimmung der Producte aus den gefundenen Ziffern des Quotienten in die entsprechenden abgekürzten Divisoren jedes Mahl die abgeschnittene Ziffer des Divisors, um die erste Ziffer eines jeden jener Producte zu corrigiren, wie (§. 118. 4.) gelehrt worden ist.

4) Hat der Divisor nicht so viele Stellen, als im Quotienten verlangt werden, so dividire man so lange auf gewöhnliche Art, bis die Anzahl der bereits gefundenen Ziffern des Quotienten und die Anzahl der Ziffern des Divisors zusammen genommen, eine Einheit mehr beträgt, als die verlangte Anzahl der Ziffern im Quotienten ausmacht, und dann kürze man den Divisor Ziffer für Ziffer ab.

5) Will man die letzte im Quotienten verlangte Ziffer vollkommen genau haben, so suche man eine Stelle mehr, als verlangt wurden.

Beyspiele.

1) Man bestimme den Quotienten 2744737·922628 : 3417·564 mit 3 Decimalen.

Da hier die Einheiten des Divisors bey der ersten Division unter die Hunderte des Dividends zu stehen kommen, so erscheinen 3 Ziffern für die Ganzen im Quotienten, und da noch 3 Decimalen verlangt werden, so hat man in Allem 6 Stellen zu suchen, und die Rechnung steht wie folgt:

2744737·922628 : 3,4,1,7·,5,6,4 = 803·127 wie oben §. 119. Beysp. 1.
= 10686
= 433
91
23
= 1

Wir haben hier die letzte Ziffer (7) eigentlich zu groß genommen, weil 3.7 + 3 = 24 (wo 3 die Correctur ist) um 1 größer als der Dividend 23 ist. Hätten wir 6 als Quotienten genommen, so erhielten wir 3·6 + 2 = 20, wo also 20 um 3 kleiner als der Dividend 23 ist; folglich ist der vorige Fehler geringer als dieser.

Auf gewöhnliche Art würde die Rechnung so stehen:

Digitized by Google

2744737·922628 : 3417·564 = 803·127
10686 | 722
434 | 0306
92 | 27422
23 | 922948
- | - - - - - -

Was also rechts von der Verticallinie steht, ist für unsern Zweck überflüssig.

2) Man verlangt den Quotienten 48·97568 : 9018·34 mit 5 Decimalen. Da hier der Quotient erst mit Tausendteln anfängt, also zwey leere Stellen vorausgehen, so hat man nur drey Ziffern zu suchen, und zwar auf folgende Art:

48·97,568 : 9,0,1,8·34 = 5·00543 wie §. 119. Beysp. 2.
3 88
28
1

3) Der Quotient 75839·67528 : 312·809 soll bey Zehntausendteln abbrechen. Weil hier drey Stellen für die Ganzen kommen, so hat man sieben Stellen zu suchen; da aber der Divisor nur sechs Ziffern hat, so dividire man zwey Mahl auf gewöhnliche Art, nähmlich:

75839·6,7528 : 3,1,2·,8,0,9 = 242·4472
13277 8 7
765 5 1
139 8 9
14 7 7
2 2 6
·8
2.

Auch hier wäre es richtiger, wenn man für die niedrigste Ziffer des Quotienten 3 statt 2 nehmen würde (*).

4) Der Quotient 0·0085475 64 : 0·024908 soll bey Hunderttausendteln abbrechen. Hier fängt der Quotient mit Zehnteln an, also hat man fünf Stellen zu suchen, und demnach wird das erste Mahl auf gewöhnliche Art dividirt.

0·0085475,64 : 0·02,4,9,0,8 = 0·34317
10751
·788
·41
16
—1.

* Daß diese Regeln auch auf die abgekürzte Division in ganzen Zahlen anwendbar seyen, bedarf keiner speciellen Bestätigung. — Es wird übrigens gut seyn, wenn der Anfänger diese Vorschriften wirklich auf ganze Zahlen anwendet.

Digitized by Google

B. Von den Kettenbrüchen.

§. 121.

1) Ein Kettenbruch oder fortlaufender (continuirlicher) Bruch ist ein Ausdruck von der Form:

$$A+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\ldots.$$

wo auch $A=0$ seyn kann, und a, b, c,...., und a', b', c'.... gewöhnlich ganze positive Zahlen bezeichnen, was aber nicht gerade seyn muß. Die einzelnen Brüche $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$,... heißen Glieder des Kettenbruches.

Solche Ausdrücke brechen entweder irgend einmahl ab, oder sie laufen ohne Ende fort. Im ersten Falle heißen sie endliche, im andern Falle aber unendliche Kettenbrüche.

2) Bricht man bey einem Kettenbruche nach und nach beym ersten, zweyten, dritten .... Gliede ab, so erhält man der Ordnung nach folgende Werthe:

$$A, A+\frac{a}{a'}, A+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}, A+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}$$

u. s. w., welche man Theilbrüche oder Partial-Brüche, und aus gewissen Gründen, die wir später kennen lernen werden, auch Näherungsbrüche zu nennen pflegt, und zwar der Reihe nach den ersten, zweyten, dritten u. s. w. Näherungswerth.

3) Ein Kettenbruch heißt periodisch, wenn in den Zählern und Nennern der einzelnen Glieder, aus welchen der Kettenbruch besteht, eine Reihe von Zahlen immer in derselben Ordnung wiederkehrt. Z. B.

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\ldots \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{a}{a'}+\ldots$$

4) Für die Ausübung sind jene Kettenbrüche, wo die Zähler aller einzelnen Glieder $=1$ sind, die wichtigsten, weßhalb wir uns hier auf Kettenbrüche von der Form $A+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots$ beschränken.

Digitized by Google

§. 122.

Einen gemeinen Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen Kettenbruch von gleichem Werthe zu verwandeln.

Hier sind zwey Fälle zu unterscheiden, denn entweder ist der gegebene Bruch $\frac{Z}{N}$ ein ächter oder ein unächter.

1) Es sey $Z > N$. Da jeder unächte Bruch in eine gemischte Zahl aufgelöst werden kann, so setze man $\frac{Z}{N} = A + \frac{Z'}{N}$ wo $Z' < N$. Da ferner der Bruch $\frac{Z'}{N}$ seinem Werthe nach nicht geändert wird, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt, so ist auch

$$\frac{Z'}{N} = \frac{Z' : Z'}{N : Z'} = \frac{1}{N : Z'} = \frac{1}{a + \frac{R}{Z'}}, \text{ wo } R < Z';$$

und a den Quotienten als ganze Zahl bezeichnet; aus demselben Grunde ist

$$\frac{R}{Z'} = \frac{R : R}{Z' : R} = \frac{1}{Z' : R} = \frac{1}{b + \frac{R'}{R}}, \text{ wo } R' < R;$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{R' : R'}{R : R'} = \frac{1}{R : R'} = \frac{1}{c + \frac{R''}{R'}}, \text{ wo } R'' < R';$$

$$\frac{R''}{R'} = \frac{R'' : R''}{R' : R''} = \frac{1}{R' : R''} = \frac{1}{d + \frac{R'''}{R''}}, \text{ wo } R''' < R'';$$

u. s. w.

Also ist durch Substitution

$$\frac{Z}{N} = A + \frac{Z'}{N} = A + \frac{1}{a + \frac{R}{Z'}} = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b + \frac{R'}{R}} =$$

$$= A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c + \frac{R''}{R'}} = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d + \frac{R'''}{R''}} = \text{ic.}$$

Da aus dem Gange der Rechnung ersichtlich ist, daß die Zahlen, welche jedes Mahl das letzte Glied bilden, immer kleiner und kleiner werden; so ist einleuchtend, daß man endlich einen Bruch von der

Digitized by Google

Form $\frac{Z}{N} = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots + \frac{1}{u}$ erhalten müsse, wo also alle Zähler $= 1$, und alle Nenner ganze positive Zahlen sind, indem wir vorausseßten, daß die Quotienten a, b, c, d ... die möglichst größten, und die Reste Z', R, R', R'' ... immer kleiner als die entsprechenden Divisoren seyen.

Auch übersieht man bey dieser Darstellung sogleich, daß die Rechnung dieselbe sey, wie §. 94, daß man also zwischen Z und N das größte gemeinschaftliche Maß gesucht habe, und daß die Quotienten A, a, b, c, d ... der Reihe nach, wie sie gefunden wurden, die Nenner der aufeinanderfolgenden Glieder des Kettenbruches bilden. Wir haben demnach folgende praktische Regel: Man suche zwischen Zähler und Nenner des gegebenen Bruches das größte gemeinschaftliche Maß (§. 94.), und bemerke sich die Quotienten A, a, b, c, d ... u der Ordnung nach, wie sie gefunden wurden, so ist dann

$$\frac{Z}{N} = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{u}.$$

2) Ist $Z' < N$, hat man also nur den ächten Bruch $\frac{Z'}{N}$, so seßt man $A = o$, und es ist

$$\frac{Z'}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots + \frac{1}{u}.$$

* Dividirt man gleich Zähler und Nenner des unächten Bruches $\frac{Z}{N}$ durch den Zähler, so erhält man $\frac{Z}{N} = \frac{1}{o} + \frac{N}{Z} = \frac{1}{o} + \frac{1}{A} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$

also ist $\frac{1}{o} + \frac{1}{A} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots = A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$

Beyspiele. 1) Man verwandle den gemeinen Bruch $\frac{723}{319}$ in einen Kettenbruch:

Rechnung. $\frac{723}{319} = 2 + \frac{85}{319} = 2 + \frac{1}{319:85} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{64}{85}} =$

Digitized by Google

$$= 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{85:64} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{21}{64}} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{64:21} =$$

$$= 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3 + \frac{1}{21}};$$

oder kürzer

723	319	2
85	64	3
21	21	1
		3
		21

also $\frac{723}{319} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$.

2) Man soll $\frac{100}{323}$ in einen Kettenbruch verwandeln.

Rechnung.

100	323	3
8	23	4
1	7	2
		1
		7

mithin ist $\frac{100}{323} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$.

* Es ist nicht nöthig, den gegebenen gemeinen Bruch zuvor auf die kleinste Benennung zu bringen. Gesetzt wir hätten statt $\frac{100}{323}$ den gleichen Bruch $\frac{400}{1292}$; so fände man

400	1292	3
32	92	4
4	28	2
	0	1
		7

Demnach erhalten wir denselben Kettenbruch $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$.

3) Man verwandle den Decimal-Bruch 3·1415926 in einen Kettenbruch.

Es ist $3{\cdot}1415926 = 3 + \frac{1415926}{10000000}$, daher

14159 2,6	10000000	7
53074 6	= 88518	15
88 1,5 6	362	1
157 5	172	243
12 7 6	10	1
1 9 0	2	1
1 8		9
8		1
		1
		4

Digitized by Google

folglich ist $3{\cdot}1415926 =$

$$= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

§. 123.

Die Näherungswerthe eines gegebenen Kettenbruches der Ordnung nach anzugeben.

Der Kettenbruch sey $\frac{Z}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{ꝛc.}$

Bezeichnen wir die Näherungsbrüche der Reihe nach mit $\frac{Z'}{N'}$, $\frac{Z''}{N''}$, $\frac{Z'''}{N'''}$, ꝛc. $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$, so finden wir $\frac{Z'}{N'} = \frac{1}{a}$, $\frac{Z''}{N''} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{ab+1}}{b} =$

$$= \frac{b}{ab+1}.$$

$$\frac{Z'''}{N'''} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{bc+1}{c}} = \frac{1}{a} + \frac{c}{bc+1} = \frac{1}{\frac{abc+a+c}{bc+1}} =$$

$$= \frac{bc+1}{abc+a+c}.$$

$$\frac{Z^{IV}}{N^{IV}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$$

u. s. w., oder

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{Z''}{N''} = \frac{b}{ab+1},$$

$$\frac{Z'''}{N'''} = \frac{bc+1}{c(ab+1)+a},$$

$$\frac{Z^{IV}}{N^{IV}} = \frac{d(bc+1)+b}{d(abc+c+a)+(ab+1)},$$

$$\frac{Z^{V}}{N^{V}} = \frac{e(bcd+d+b)+(bc+1)}{e(abcd+cd+ad+ab+1)+(abc+a+c)}.$$

u. s. w.

Digitized by Google

Aus der Bildung dieser Theilbrüche sieht man, daß jeder Näherungsbruch, vom dritten angefangen, gefunden werde, wenn man mit dem Quotienten, der mit dem fraglichen Theilbruche einerley Zeiger hat, Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruches multiplizirt, zum Producte des Zählers den zweyten vorhergehenden Zähler, und zum Producte des Nenners den Nenner des zweyten vorhergehenden Bruches addirt. Diese Regel läßt sich allgemein durch folgende Formel bildlich darstellen, wenn man den n^{ten} Quotienten mit m bezeichnet:

$$\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} = \frac{Z^{(n-1)}\, m + Z^{(n-2)}}{N^{(n-1)}\, m + N^{(n-2)}}.$$

Ist der Kettenbruch ein endlicher, und hat er z. B. p Glieder, so ist der p^{te} Näherungsbruch der Bruch selbst, durch dessen Entwicklung der vorgelegte Kettenbruch entstanden ist.

Zusatz 1.

Für die Ausübung beobachte man zur Bestimmung der Näherungsbrüche folgende Vorschrift:

Man schreibe die Nenner der einzelnen Glieder, oder die Quotienten in derselben Ordnung, wie sie gefunden worden sind, über einer horizontalen Linie neben einander, setze unter denselben links den Hülfsbruch $\frac{0}{1}$ voraus, um die oben angegebene Regel schon beym zweyten Näherungsbruche anwenden zu können, dividire die Einheit durch den ersten Quotienten, so ist dieser der erste Theilbruch, und suche dann die folgenden Theilbrüche nach der vorhin angegebenen Regel:

Beyspiele. 1) Man bestimme die Näherungsbrüche von folgendem Kettenbruche:

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Man setze, wie folgt:

	3	2	5	4	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2.1+0}{2.3+1}$	$\frac{5.2+1}{5.7+3}$	$\frac{4.11+2}{4.38+7}$	$\frac{2.46+11}{2.159+38}$
oder	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{46}{159}$	$\frac{103}{355}$

Digitized by Google

Also ist der gegebene Kettenbruch aus dem gemeinen Bruche $\frac{103}{356}$ entstanden.

2) Man suche die Theilbrüche des Kettenbruches

$$y = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}.$$

Rechnung.

	2	3	1	4	1	5
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{19}{43}$	$\frac{23}{52}$	$\frac{134}{303}$

Also sind die Theilbrüche der Ordnung nach

$$3,\ 3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{3}{7},\ 3\tfrac{4}{9},\ 3\tfrac{19}{43},\ 3\tfrac{23}{52},\ 3\tfrac{134}{303},\ \text{oder}$$

$$3,\ \tfrac{7}{2},\ \tfrac{24}{7},\ \tfrac{31}{9},\ \tfrac{148}{43},\ \tfrac{179}{52},\ \tfrac{1043}{303}.$$

* Nehmen wir auch gleich die Ganzen (3) mit in Rechnung, so erhalten wir

	3	2	3	1	4	1	5
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{31}$	$\frac{43}{148}$	$\frac{52}{179}$	$\frac{303}{1043}$,

welche Brüche umgekehrt, nähmlich $3,\ \frac{7}{2},\ \frac{24}{7},\ \frac{31}{9},\ \frac{148}{43},\ \frac{179}{52},\ \frac{1043}{303}$ genau dieselben sind wie vorhin.

Zusatz 2.

Aus der Bildung der Theilbrüche leuchtet von selbst ein, daß die Theilbrüche immer mit größern und größern Zahlen geschrieben werden, indem a, b, c..... lauter ganze positive Zahlen sind, d. h. je größer der Zeiger eines Partial-Bruches ist, mit desto größeren Zahlen ist er geschrieben.

Zusatz 3.

Soll demnach der gemeine Bruch gefunden werden, aus welchem ein gegebener Kettenbruch entstanden ist, so bestimme man die Näherungsbrüche desselben, von welchen der letzte der gesuchte gemeine Bruch ist.

Digitized by Google

§. 124.

Die Differenz zwischen zwey auf einander folgenden Näherungsbrüchen ist immer ± 1 dividirt durch das Product der Renner.

Denn es sey

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots\ldots + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \ldots\ldots$$

so sind nach (§. 123) die Näherungsbrüche folgende:

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{Z''}{N''} = \frac{b}{ab+1},$$

$$\frac{Z'''}{N'''} = \frac{bc+1}{abc+c+a},$$

$$\frac{Z^{IV}}{N^{IV}} = \frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1},$$

. . . . . .

mithin $\frac{1}{a} - \frac{b}{ab+1} = \frac{ab+1-ab}{a(ab+1)} = \frac{+1}{N' \cdot N''}$

$$\frac{b}{ab+1} - \frac{bc+1}{abc+c+a} = \frac{ab^2c+bc+ab-a^2bc-bc-ab-1}{N'' \cdot N'''} = \frac{-1}{N'' \cdot N'''}.$$

Es seyen nun u, v, w drey auf einander folgende Quotienten, und zwar sey v der n^{te}, mithin w der $(n+1)^{te}$ und u der $(n-1)^{te}$, so ist nach unserer bisherigen Bezeichnung, und nach dem im vorigen §. aufgestellten Bildungsgesetze der Theilbrüche

$$\frac{Z^{(n+1)}}{N^{(n+1)}} = \frac{w \cdot Z^{(n)} + Z^{(n-1)}}{w \cdot N^{(n)} + N^{(n-1)}}\text{; also ist auch}$$

$$\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} - \frac{Z^{(n+1)}}{N^{(n+1)}} = \frac{Z^{(n)} \cdot N^{(n+1)} - N^{(n)}\, Z^{(n+1)}}{N^{(n)}\, N^{(n+1)}} =$$

$$= \frac{Z^{(n)} \left[w N^{(n)} + N^{(n-1)}\right] - N^{(n)} \left[w \cdot Z^{(n)} + Z^{(n-1)}\right]}{N^{(n)} \cdot N^{(n+1)}}$$

$$= \frac{Z^{(n)}\, N^{(n-1)} - N^{(n)}\, Z^{(n-1)}}{N^{(n)}\, N^{(n+1)}}\text{;}$$

Weil aber $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} = \frac{Z^{(n-1)}\, N^{(n)} - Z^{(n)}\, N^{(n-1)}}{N^{(n-1)}\, N^{(n)}}$, oder

$$-\left[\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}\right] = -\frac{Z^{(n-1)}\, N^{(n)} - Z^{(n)}\, N^{(n-1)}}{N^{(n-1)}\, N^{(n)}} =$$

$$= \frac{Z^{(n)}\, N^{(n-1)} - Z^{(n-1)}\, N^{(n)}}{N^{(n-1)}\, N^{(n)}}\text{;}$$

so ist auch durch Substitution in der vorletzten Gleichung:

$$\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} - \frac{Z^{(n+1)}}{N^{(n+1)}} = -\left[\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}\right].$$

Vergleichen wir nähmlich den Zähler dieses Bruches mit dem Zähler des obigen Bruches, welcher die Differenz zwischen dem $(n-1)^{ten}$ und dem n^{ten} Theilbruche bezeichnet, so finden wir dieselben einander gleich, aber entgegengesetzt. Also haben die Differenzen zwischen je zwey auf einander folgenden Theilbrüchen immer einerley Zähler, nur daß sie abwechselnd positiv und negativ sind, und die dazu gehörigen Nenner sind immer die Producte aus den Nennern der entsprechenden Theilbrüche. Nun haben wir aber gesehen, daß $Z' N'' - N' Z'' = +1$ und $Z'' N''' - N'' Z''' = -1$ sey, folglich ist auch vermöge des eben gelieferten Beweises $Z''' N^{IV} - Z^{IV} N''' = +1$ und $Z^{IV} N^{V} - Z^{V} N^{IV} = -1$ u. s. w. folglich ist allgemein die Differenz zwischen zwey unmittelbar auf einander folgenden Theilbrüchen gleich ± 1 dividirt durch das Product der Nenner, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Zeiger des den Minuend vorstellenden Partial-Bruches ungerade oder gerade ist.

Digitized by Google

Es ist also allgemein

$$Z^{(n)} N^{(n+1)} - Z^{(n+1)} N^{(n)} = \pm 1.$$

Zusatz 1.

Ist der gegebene Kettenbruch von der Form $A + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$. wo also A den ersten Näherungswerth bezeichnet, so ist

$$Z^{(n)} N^{(n+1)} - Z^{(n+1)} N^{(n)} = \mp 1.$$

Zusatz 2.

Es sind also die auf einander folgenden Differenzen zwischen je zwey neben einander liegenden Partial-Brüchen folgende:

$$\frac{1}{N' N''}, \frac{-1}{N'' N'''}, \frac{1}{N''' N^{IV}}, \frac{-1}{N^{IV} N^{V}}, \frac{1}{N^{V} N^{VV}}, \ldots \mp$$

$$\frac{\pm 1}{N^{(n-1)} N^{(n)}}, \frac{\mp 1}{N^{n} N^{n+1}}, \frac{\pm 1}{N^{(n+1)} N^{(n+2)}}, \ldots$$

Da aber (§. 123. Zus. 2.) die Nenner um so größer werden, einen je größern Zeiger sie erhalten, so ist einleuchtend, daß auch die Producte $N' N''$, $N'' N'''$, $N''' N^{IV}$ ... immer größer werden, und demnach jene Differenzen immer mehr und mehr abnehmen. Also sind zwey auf einander folgende Theilbrüche um so weniger von einander verschieden, je größer ihre Zeiger sind.

§. 125.

Die Partial-Brüche sind gegen den wahren Bruch abwechselnd zu groß und zu klein, ist nähmlich der wahre Bruch x ein ächter, hat also der Kettenbruch die Form $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$; so sind alle Theilbrüche mit einem ungeraden Zeiger größer, jene mit einem geraden Zeiger aber alle kleiner als der wahre Bruch.

Es sey $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \ldots$. $t = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \ldots$.

$u = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \ldots$. $v = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \ldots$. und $w = \frac{1}{e} + \ldots$; so ist

Digitized by Google

wenn wir die bisherige Bezeichnung beybehalten,

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a+t}$$ (§. 100. Zus. 2.), oder $\frac{Z'}{N'} > x$.

Weil ferner $\frac{1}{b} > \frac{1}{b+u}$, also auch $a + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{b+u}$; so ist

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}} < \frac{1}{a+\frac{1}{b+u}}$$, oder $\frac{Z''}{N''} < x$.

Eben so ist $\frac{1}{c} > \frac{1}{c+v}$, also auch $b + \frac{1}{c} > b + \frac{1}{c+v}$,

demnach $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < \frac{1}{b+\frac{1}{c+v}}$, und auch $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} < a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c+v}$

folglich $\frac{1}{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} > \frac{1}{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c+v}}$, d. i. $\frac{Z'''}{N'''} > x$.

Durch dieselben Schlüsse findet man, daß $\frac{Z^{IV}}{N^{IV}} < x$, $\frac{Z^{V}}{N^{V}} > x$,

u. s. w., und allgemein $\frac{Z^{(2n)}}{N^{(2n)}} < x$, aber $\frac{Z^{(2n+1)}}{N^{(2n+1)}} > x$ sey.

Also sind die Partial-Brüche der ungeraden Ordnung größer als der wahre Bruch, die Theilbrüche der geraden Ordnung aber kleiner als der gegebene Bruch.

Zusatz 1.

Also liegt der wahre Bruch immer zwischen zwey auf einander folgenden Theilbrüchen, und demnach muß auch der Unterschied zwischen dem wahren Bruche und irgend einem Näherungsbruche kleiner seyn als die Differenz zwischen diesem und dem nächstfolgenden oder unmittelbar vorhergehenden Partial-Bruche. Es ist nähmlich allgemein:

$$\frac{Z}{N} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} < \frac{Z^{n}}{N^{(n)}} - \frac{Z^{(n+1)}}{N^{(n+1)}}$$ und auch $\frac{Z}{N} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}} < \frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$.

Zusatz 2.

Da die Differenzen zwischen den auf einander folgenden Theilbrüchen immer kleiner werden (§. 124. Zus. 2.), und der wahre Bruch immer zwischen zwey auf einander folgenden Partial-Brüchen liegt (Zus. 1.); so müssen sich die Theilbrüche dem wahren Bruche immer

Digitized by Google

mehr und mehr nähern, und zwar die Brüche der ungeraden Ordnung durch Abnahme, jene der geraden Ordnung aber durch Zunahme, aus welchem Grunde die Partial-Brüche mit Recht Näherungsbrüche genannt werden. Hieraus leuchtet auch die Ursache des Zeichenwechsels bey den Differenzen zwischen je zwey sich aneinander anschließenden Theilbrüchen von selbst ein.

Zusatz 3.

Zähler und Nenner eines jeden Theilbruches $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$ sind relative Primzahlen. Denn wären sie es nicht, so müßten sie ein gemeinschaftliches Maß $m > 1$ haben; es müßte demnach m auch $Z^{(n)} . N^{(n+1)}$ und $Z^{(n+1)} N^{(n)}$ (§. 80.), folglich auch $Z^{(n)} N^{(n+1)} - Z^{(n+1)} N^{(n)}$ (§. 79.) messen; d. i. es wäre ± 1 (§. 124.) theilbar durch m, was absurd ist, weil $m > 1$ vorausgesetzt wurde.

§. 126.

Zwischen zwey auf einander folgende Näherungsbrüche kann kein Bruch eingeschaltet werden, der dem wahren Bruche näher läge, und zugleich einfacher ausgedrückt wäre, als einer jener Theilbrüche.

Es seyen $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ und $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$ die zwey auf einander folgenden Näherungswerthe. Gesetzt nun, es wäre ein Bruch möglich, der einfacher ausgedrückt wäre, und der zugleich dem wahren Bruche $\frac{Z}{N}$ näher läge, als einer jener Näherungsbrüche, so sey es der Bruch $\frac{p}{q}$, wo also $p > Z^{(n-1)}$ aber $< Z^{(n)}$, und $q > N^{(n-1)}$ aber $< N^{(n)}$, so müßte $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} < \frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$ seyn, weil der Bruch $\frac{p}{q}$ nothwendig zwischen beyden Theilbrüchen liegen muß, indem er näher als jeder derselben beym wahren Bruche liegen soll, und $\frac{Z}{N}$ zwischen $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ und $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$ liegt (§. 125. Zus. 1.). Nun ist aber $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} = \frac{q . Z^{(n-1)} - p . N^{(n-1)}}{q N^{(n-1)}}$; und weil p, q, $Z^{(n-1)}$ und $N^{(n-1)}$ lauter ganze Zahlen sind, so müssen auch $q . Z^{(n-1)}$ und $p N^{(n-1)}$, mithin auch

Digitized by Google

$(qZ^{(n-1)} - p.N^{(n-1)})$ ganze Zahlen seyn, und zwar ist die letztere positiv oder negativ, je nachdem $qZ^{(n-1)} >$ oder $< pN^{(n-1)}$ ist, also $qZ^{(n-1)} - pN^{(n-1)} \gtrless \pm 1$, folglich ist $\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} > \frac{\pm 1}{N^{(n-1)}q}$.

Es ist aber $\frac{\pm 1}{N^{(n-1)}q} > \frac{\pm 1}{N^{(n-1)}N^{(n)}}$, weil $q < N^{(n)}$ vermöge der Voraussetzung ist, also ist um so mehr

$$\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} > \frac{\pm 1}{N^{(n-1)}N^{(n)}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} > \frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}},$$

welches der obigen Folgerung, daß

$\frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{p}{q} < \frac{Z^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$ sey, geradezu widerspricht; mithin gibt es auch keinen Bruch $\frac{p}{q}$, der mit kleinern Zahlen geschrieben wäre, als irgend ein Näherungsbruch $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$, und der zugleich dem wahren Bruche $\frac{Z}{N}$ näher läge als $\frac{Z^{(n)}}{N^{(n)}}$.

Zusatz.

Sind Zähler und Nenner eines Bruches $\frac{Z}{N}$ sehr große Zahlen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, so läßt sich der Werth desselben doch näherungsweise bestimmen, wenn man $\frac{Z}{N}$ in einen Kettenbruch verwandelt, und dann die Näherungsbrüche bestimmt, deren jeder den Werth des Bruches $\frac{Z}{N}$ um so genauer angibt, je größer sein Zeiger ist.

* Zur Übung verwandle der Anfänger den Bruch 3·14159265 in einen Kettenbruch, und bestimme die Näherungsbrüche, welche er in Decimal-Brüche verwandeln kann, um die Änderungen derselben leichter zu übersehen.

Digitized by Google

§. 127.

Man soll von zwey ganzen Zahlen A und B solche Vielfache machen, daß die Differenz derselben nur eine Einheit beträgt.

Man betrachte A und B als Zähler und Nenner eines Bruches, verwandle diesen Bruch in einen Kettenbruch, und bestimme die Näherungsbrüche desselben, so ist der letzte nothwendig $\frac{A}{B}$. Ist nun der vorletzte Partial-Bruch $\frac{m}{n}$, so ist $\frac{m}{n} - \frac{A}{B} = \frac{mB - nA}{nB} = \frac{\pm 1}{nB}$ (§. 124.), oder $mB - nA = \pm 1$, folglich sind mB und nA die verlangten Vielfachen. — Man soll z. B. von den Zahlen 17 und 39 solche Vielfache machen, die nur um eine Einheit verschieden sind.

Rechnung.

17	39	$\frac{2}{3}$
2	5	$\frac{1}{2}$
1		$\frac{2}{2}$

mithin $\frac{17}{39} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

	2	3	2	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{17}{39}$

wovon die Näherungsbrüche , also sind 7.39 und 16.17 oder 273 und 272 die verlangten Vielfachen.

Zusatz.

Wäre verlangt worden, daß $n.17 - m.39 = +1$ werden soll, statt daß hier $m.39 - n.17 = +1$ ist; so hätte man statt des obigen Kettenbruches nur folgenden gleichgeltenden nehmen dürfen:

$$\frac{17}{39} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1};$$

Denn dann findet man:

	2	3	2	1	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{10}{23}$	$\frac{17}{39}$

wo jetzt $10.39 - 23.17 = -1$, oder $23.17 - 10.39 = 391 - 390 = +1$ ist, wie verlangt wurde. Der Grund hievon liegt darin, daß nun der vorletzte Theilbruch ein Bruch der geraden Ordnung ist, oben aber ein Bruch von ungerader Ordnung war. Wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu benehmen habe, ist für sich einleuchtend.

Digitized by Google

Sechstes Kapitel.

Von den Wurzelgrößen.

§. 128.

Gleichnahmige Wurzeln aus gleichen Zahlen sind gleich; aus ungleichen Zahlen aber ungleich.

Denn es sey 1stens $a = b$, so ist $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$; denn wäre $\sqrt[n]{a} \gtrless \sqrt[n]{b}$, so wäre auch $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \gtrless \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, d. i. es wäre $a \gtrless b$, (§. 73. Zus. 1. b), welches der Voraussetzung widerspricht.

Es sey 2tens $a > b$, so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; denn wäre $\sqrt[n]{a} \leqq \sqrt[n]{b}$; so müßte auch $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leqq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ seyn, d. i. $a \leqq b$, wider die Voraussetzung.

§. 129.

Die Wurzel aus einem Producte ist gleich dem Producte der gleichnahmigen Wurzeln aus den Factoren; die Wurzel aus einem Bruche aber ist gleich der gleichnahmigen Wurzel des Zählers dividirt durch die gleichnahmige Wurzel des Nenners.

Denn es sey $\sqrt[m]{A} = a$, und $\sqrt[m]{B} = b$, also $A = a^m$, $B = b^m$ (§. 73. Zus. 1. b.); so ist, wenn man die beyden ersten, und dann auch die beyden folgenden Gleichungen mit einander multiplizirt;

$$\sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B} = ab \text{ und } AB = a^m b^m = (ab)^m \text{ (§. 53.)},$$

also $$\sqrt[m]{AB} = ab \text{ (§. 73. Zus. 1. b.)},$$

oder $$\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B}.$$

Dividirt man aber jene Gleichungen durch einander, so erhält man

$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \frac{a}{b}$, und $\frac{A}{B} = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (§. 103. Zuſ. 3.),

und hieraus folgt $\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}$.

Zuſatz 1.

Da $\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B}$ und $\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}$, ſo iſt auch umgekehrt $\sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB}$ und $\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}$,

d. h. zwey gleichnahmige Wurzelgrößen werden mit einander multiplizirt, wenn man dem Producte aus den Größen unter dem Wurzelzeichen, dasſelbe Wurzelzeichen vorſetzt; und zwey gleichnahmige Wurzelgrößen werden durch einander dividirt, wenn man die Größen unter dem Wurzelzeichen dividirt, und aus dem gefundenen Quotienten dieſelbe Wurzel auszieht. Z. B. $\sqrt{2}\sqrt{18} = \sqrt{2.18} = \sqrt{36} = \pm 6$ (§. 74. 1. b.) und $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = \pm 2$.

Zuſatz 2.

Es iſt alſo auch $\sqrt[m]{ABCD} = \sqrt[m]{AB.CD} = \sqrt[m]{AB}\sqrt[m]{CD} =$
$= \sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B}\sqrt[m]{C}\sqrt[m]{D}$, und umgekehrt $\sqrt[m]{A}\sqrt[m]{B}\sqrt[m]{C}\sqrt[m]{D} = \sqrt[m]{ABCD}$.

Zuſatz 3.

Da $A = \sqrt[m]{A^m}$, ſo iſt auch $A\sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A^m}\sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A^m B}$,

d. h. der rationale Coefficient (§. 75. Zuſ. 2.) einer Radical-Größe wird unter das Wurzelzeichen gebracht, wenn man denſelben auf die Potenz vom Grade des Wurzel-Exponenten erhebt, und das Reſultat mit der Größe unter dem Wurzelzeichen multiplizirt.

Z. B. $5\sqrt{a} = \sqrt{5^2 a} = \sqrt{25a}$; $2\sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{2^3 m} = \sqrt[3]{8m}$ u. ſ. w.

Digitized by Google

Eben so ist auch $\frac{\sqrt[m]{A}}{B} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B^m}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B^m}}$, d. h. eine Wurzelgröße wird durch eine rationale Zahl dividirt, wenn man die Größe unter dem Wurzelzeichen durch jene rationale Zahl auf die Potenz vom Grade des Wurzel-Exponenten erhoben dividirt, und dem gefundenen Quotienten dasselbe Wurzelzeichen vorsetzt.

Z. B. $\frac{\sqrt[3]{40}}{2} = \sqrt[3]{\frac{40}{2^3}} = \sqrt[3]{\frac{40}{8}} = \sqrt[3]{5}$.

Endlich ist $\frac{A}{\sqrt[m]{B}} = \frac{\sqrt[m]{A^m}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A^m}{B}}$, d. h. eine rationale Zahl A wird durch die Wurzelgröße $\sqrt[m]{B}$ dividirt, wenn man jene Potenz von A, welche vom Grade des Wurzel-Exponenten ist, durch B, d. i. durch die Größe unter dem Wurzelzeichen dividirt, und dem gefundenen Quotienten das gegebene Wurzelzeichen vorsetzt.

Z. B. $\frac{96}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{96^4}{8}} = \sqrt[4]{\frac{96 \cdot 96^3}{8}} = \sqrt[4]{12 \cdot 96^3}$.

Zusatz 4.

Jede Wurzelgröße kann in einen Bruch von beliebigem Nenner verwandelt werden; denn es ist $\sqrt[n]{A} = \frac{x\sqrt[n]{A}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x^n A}}{x}$ (Zus. 3.)

Z. B. $\sqrt[3]{15} = \frac{10\sqrt[3]{15}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10^3 \cdot 15}}{10} = \frac{\sqrt[4]{15000}}{10}$ und

$\sqrt{7} = \frac{100\sqrt{7}}{100} = \frac{\sqrt{100^2 \cdot 7}}{100} = \frac{\sqrt{70000}}{100}$, — eben so

$\sqrt{a} = \frac{10^n\sqrt{a}}{10^n} = \frac{\sqrt{10^{2n}a}}{10^n}$.

Zusatz 5.

Es ist $\sqrt[m]{A^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{A^n}} = \frac{\sqrt[m]{1}}{\sqrt[m]{A^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{A^n}}$ (§. 73. Zus. 2.).

Z. B. $\sqrt[3]{2^{-6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$.

Digitized by Google

Zusatz 6.

Es ist also auch $\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{A} = (\sqrt[m]{A})^2 = \sqrt[m]{A.A} = \sqrt[m]{A^2}$;
$(\sqrt[m]{A})^3 = (\sqrt[m]{A})^2\ \sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{A^2}.\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{A^2.A} = \sqrt[m]{A^3}$; eben so findet man auch $(\sqrt[m]{A})^4 = \sqrt[m]{A^4}$, $(\sqrt[m]{A})^5 = \sqrt[m]{A^5}$ u. s. w., also ist allgemein $(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n}$, d. h. eine Wurzelgröße wird potenzirt, wenn man die Größe unter dem Wurzelzeichen auf die verlangte Potenz erhebt.

Also ist auch $(\sqrt[m]{A})^{-n} = \frac{1}{(\sqrt[m]{A})^n} = \frac{1}{\sqrt[m]{A^n}} = \frac{\sqrt[m]{1}}{\sqrt[m]{A^n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{A^n}}$

(Zus. 1.) $= \sqrt[m]{A^{-n}}$; demnach ist die vorige Regel auch für einen negativen Potenz-Exponenten gültig, oder es ist ganz allgemein
$(\sqrt[m]{A})^{\pm n} = \sqrt[m]{A^{\pm n}}$.

Eben so ist auch

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a^r}{b^s}}\right)^{\pm n} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^r}{b^s}\right)^{\pm n}} = \sqrt[m]{\frac{(a^r)^{\pm n}}{(b^s)^{\pm n}}} = \sqrt[m]{\frac{a^{\pm nr}}{b^{\pm ns}}}.$$

So z. B. ist
$(\sqrt[3]{7})^2 = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$, und $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{-4} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} =$
$= \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = \pm 4$.

Da $(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n}$, so sieht man, daß es einerley sey, ob man aus einer positiven Zahl A die m^{te} Wurzel auszieht, und das gefundene Resultat auf die n^{te} Potenz erhebt, oder ob man umgekehrt verfährt, d. h., die gegebene Zahl A erst potenzirt, und dann aus diesem Resultate die m^{te} Wurzel auszieht.

§. 130.

Wir wollen nun die Bedeutung des negativen Wurzel-Exponenten untersuchen. Es sey a was immer für eine positive Zahl, m aber bezeichne jede beliebige ganze Zahl, so ist, wenn wir $\sqrt[m]{a} = b$ setzen, der Erklärung der Wurzeln gemäß (§. 73) nothwendig $a = b^{-m} =$

Digitized by Google

$= \frac{1}{b^m} = \frac{1^m}{b^m} = \left(\frac{1}{b}\right)^m$, also wieder umgekehrt $\sqrt[m]{a} = \frac{1}{b}$, oder $b\sqrt[m]{a} = 1$, also $b = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$, oder wenn statt b wieder der Werth gesetzt wird, $\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}$. Hat demnach eine Radical-Größe einen negativen Wurzel-Exponenten, so heißt dieß nichts anders, als man soll die Einheit durch die gegebene Größe mit einem positiven Wurzel-Exponenten dividiren. So z. B. ist

$$\sqrt[-2]{36} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{\pm 6} = \pm \frac{1}{6}.$$

Zusatz 1.

Es ist daher $\sqrt[-m]{1} = \frac{1}{\sqrt[m]{1}} = \frac{1}{1} = 1$, so wie auch $1^{-m} = \frac{1}{1^m} = 1$.

Zusatz 2.

Weil $\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$, so ist auch $\sqrt[-m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = 1$, also

$$\sqrt[m]{a} = \frac{1}{\sqrt[-m]{a}} = \frac{\sqrt[-m]{1}}{\sqrt[-m]{a}} = \sqrt[-m]{\frac{1}{a}}.$$

Zusatz 3.

Also ist $\left(\sqrt[-m]{a}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$, und

$$\sqrt[-m]{a^{-m}} = \sqrt[-m]{\frac{1}{a^m}} = 1 : \sqrt[m]{\frac{1}{a^m}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[m]{a^m}} = 1 : \frac{1}{a} = a,$$

Es ist demnach allgemein $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$, es mag n was immer für eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnen.

Zusatz 4.

Es lassen sich demnach auch die in §. 129 aufgestellten Sätze erweitern; denn es ist

Digitized by Google

$$\sqrt[m]{ab} = \frac{1}{\sqrt[m]{ab}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b},$$

und eben so $\sqrt[m]{abcd} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{d}$; ferner

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = 1 : \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{b}}$$

$$(\text{Zuf. 2}) = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \text{ nähmlich } \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

§. 131.

Da $(b^m)^n = b^{n \cdot m}$ (§. 52.); so ist auch, wenn $b = \sqrt[m]{a}$ also $b^m = a$ gesetzt wird, $(a)^n = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{n \cdot m} = \sqrt[m]{a^{m\,n}} = \sqrt[m]{(a^n)^m}$, d. h. eine Größe bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man aus ihr die Wurzel irgend eines Grades auszieht, und sie dann wieder auf die Potenz desselben Grades erhebt.

Zusatz 1.

Setzt man $n = \frac{p}{m}$, also $n\,m = p$, wo p eine ganze Zahl bezeichnen soll, so geht die Gleichung $(b^m)^n = b^{n \cdot m}$ über in folgende: $(b^m)^{\frac{p}{m}} = b^p$, und statt der Gleichung $a^n = \sqrt[m]{a^{m\,n}}$ erhält man

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}, \text{ oder umgekehrt } \sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}};$$

d. h. wenn man den Potenz-Exponenten p durch ein Maß desselben dividirt, so ist dieß so viel, als wenn man aus der gegebenen Potenz die so vielste Wurzel auszieht, als jenes Maß anzeigt.

Ist also der Potenz-Exponent p ein Vielfaches des Wurzel-Exponenten m, so wird die m^{te} Wurzel aus a^p ausgezogen, wenn man den Potenz-Exponenten durch den Wurzel-Exponenten dividirt. So z. B. ist $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{12:3} = a^4$, denn $(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$, und $\sqrt{a^6} = a^{6:2} = a^3$.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Aus der Gleichung $(a)^n = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{n\,m}$, oder $a^n = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{m\,n}$ folgt auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$, d. h. eine Radical-Größe wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Wurzel-Exponenten mit einer ganzen Zahl n multiplizirt, und die Größe unter dem Wurzelzeichen zugleich auf die n^{te} Potenz erhebt. Umgekehrt heißt die Gleichung $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$, oder $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[mn:n]{a^{n:n}} = \sqrt[m]{a^1} = \sqrt[m]{a}$, d. h. die Wurzelgröße $\sqrt[mn]{a^n}$ wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Wurzel-Exponenten und den Potenz-Exponenten der Größe unter dem Radical-Zeichen durch dieselbe Zahl dividirt.

Zusatz 3.

Aus der Gleichung $(b^m)^{\frac{p}{m}} = b^p$ (Zus. 1.) folgt für den Fall, daß $\frac{p}{m}$ eine ganze Zahl ist, $b^m = \sqrt[m]{b^p}$.

Zusatz 4.

a) Aus der Gleichung $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$ (Zus. 2.) folgt, wenn $a = \sqrt[m]{A}$, also $a^n = A$ gesetzt wird, die neue Gleichung:

$$\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)} = \sqrt[mn]{a}.$$

Soll man demnach aus einer positiven Zahl A die n^{te}, und aus dieser wieder die m^{te} Wurzel ausziehen, so erhält man dasselbe Resultat, wenn man aus A gleich die $m\,n^{te}$ Wurzel auszieht.

Es ist z. B. $\sqrt{\left(\sqrt[3]{64}\right)} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64}$. Es ist aber $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{6:6} = \pm 2$ (Zus. 1), und auch $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = \pm 2$.

b) Umgekehrt heißt die Gleichung $\sqrt[mn]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$. Soll also aus einer positiven Zahl A die Wurzel irgend eines Grades gezogen werden, deren Exponent eine zusammengesetzte Zahl ist, so löse man die-

Digitized by Google

selbe in Factoren auf, und ziehe nach und nach die Wurzeln jener Grade aus, welche die Factoren des Wurzel-Exponenten anzeigen.

* Man zeigt hieraus leicht, daß auch $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[m]{\sqrt[np]{A}} = \sqrt[mnp]{A}$, und umgekehrt $\sqrt[mnp]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}}$ sey.

Da ferner $mn = nm$, so ist auch $\sqrt[mn]{A} = \sqrt[nm]{A}$, d. i. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}$, d. h. es kommt nicht auf die Ordnung an, in welcher die von den Factoren des Wurzel-Exponenten angedeuteten Wurzeln ausgezogen werden.

Zusatz 5.

Setzt man in der Gleichung $b^m = \sqrt[\frac{p}{m}]{b^p}$ (Zus. 3), wo $\frac{p}{m}$ eine ganze Zahl bezeichnet, $b = \sqrt[p]{a}$, also $= b^p = a$, so findet man $\left(\sqrt[p]{a}\right)^m = \sqrt[\frac{p}{m}]{a}$, d. h. wenn eine Radical-Größe potenzirt werden soll, so kann man auch den Wurzel-Exponenten durch den gegebenen Potenz-Exponenten dividiren, wenn dieser ein Maß von jenem ist. Z. B. $\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[6:2]{a} = \sqrt[3]{a}$. Nach (§. 129. Zus. 6.) findet man $\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6:2]{a^{2:2}}$ (Zus. 2.) $= \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a}$.

§. 132.

Wir haben (§. 131. Zus. 1.) gesehen, daß, wenn p theilbar ist durch m, $a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$ oder $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$ sey, und es bleibt uns noch übrig, zu zeigen, daß allgemein $a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$, oder umgekehrt $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$ sey, wenn auch p und m relative Primzahlen sind.

Da das Wurzelausziehen eine dem Potenziren gerade entgegengesetzte Rechnungs-Operation ist (§. 73. Zus. 1. a.); so muß jenes auch durch eine Rechnungs-Operation verrichtet werden, welche der zum Potenziren nöthi-

Digitized by Google

gen ebenfalls entgegengesetzt ist; nun wird aber eine Größe potenzirt, wenn man ihren Exponenten mit dem gegebenen Potenz-Exponenten multiplizirt (§. 52); also wird aus einer gegebenen Größe die Wurzel irgend eines Grades ausgezogen, wenn man den Exponenten der Größe durch den gegebenen Wurzel-Exponenten dividirt, denn die Division ist der Multiplication entgegengesetzt. Es ist also allgemein $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$. — Es bezeichnet demnach $\sqrt[m]{a^p}$ sowohl als auch $a^{\frac{p}{m}}$ nichts anderes, als man soll die Zahl a auf die p^{te} Potenz erheben, und dann die m^{te} Wurzel ausziehen, oder man soll die Zahl (Potenz) a^p in m vollkommen gleiche Factoren zerlegen, d. h. man soll eine Zahl finden, welche m Mahl als Factor gesetzt, die Zahl a^p zum Producte gibt. — Wie nun aber der Werth einer solchen Größe $a^{\frac{p}{m}}$, wenn einer möglich ist, bestimmt werden könne, werden wir erst später kennen lernen; hier genügt es uns, den Sinn solcher Ausdrücke richtig zu verstehen.

Ist $\frac{p}{m}$ eine ganze Zahl, so nennt man die Wurzelgröße $\sqrt[m]{a^p}$ oder $a^{\frac{p}{m}}$ eine rationale oder meßbare (commensurable) Zahl, im entgegengesetzten Falle aber eine irrationale, unausmeßbare (incommensurable) Zahl (§. 75. Zus. 2.).

Die irrationalen Wurzeln lassen sich also als Bruch-Potenzen, d. i. als Größen mit gebrochenen Exponenten darstellen.

Zusatz 1.

Es hat demnach die Größe $\sqrt[m]{a^p}$, wenn p eine absolute Primzahl ist, nur dann einen rationalen oder genau angebbaren Werth, wenn $m = p$ ist. Ist aber p eine zusammengesetzte Zahl, so sind aus der Größe a^p so viele rationale Wurzeln möglich, wie viele Divisoren der Exponent p enthält. Für $p = 12$ z. B. sind 5 rationale Wurzeln möglich, nähmlich die 2te, 3te, 4te, 6te und 12te, weil $12 = 2.6 = 3.4$; es ist also $\sqrt{a^{12}} = a^{12:2} = a^6$, $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{12:3} = a^4$, $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12:4} = a^3$, $\sqrt[6]{a^{12}} = a^{12:6} = a^2$ und $\sqrt[12]{a^{12}} = a^{12:12} = a^1 = a$.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Da $\frac{p}{m} = \frac{p \cdot n}{m \cdot n} = \frac{p \cdot v}{m \cdot v}$; so ist auch

$$a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p\,n}{m\,n}} \text{ und } a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p:v}{m:v}}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}, \text{ und } \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m:v]{a^{p:v}};$$

d. h. eine Wurzelgröße ändert ihren innern Werth nicht, wenn man ihren Wurzel-Exponenten und Potenz-Exponenten durch dieselbe Zahl multiplizirt oder dividirt.

Wir können also gegebene Radical-Größen, die verschiedene Wurzel-Exponenten haben, gleichnahmig machen, oder auf denselben Wurzel-Exponenten zurück führen, und andere Wurzelgrößen in ihrer einfachsten Gestalt darstellen, so nähmlich, daß Wurzel-Exponent und Potenz-Exponent relative Primzahlen werden.

Man soll z. B. die Wurzelgrößen $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^7}$ auf einerley Wurzel-Exponenten zurück führen. Man stelle die gegebenen Größen als Bruch-Potenzen dar, und verfahre mit ihren Exponenten nach (§. 100. Zus. 1.); so findet man:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2.4}{3.4}} = a^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{a^8};$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1.6}{2.6}} = a^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{a^6};$$

$$\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3.3}{4.3}} = a^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{a^9};$$

$$\sqrt[6]{a^7} = a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{7.2}{6.2}} = a^{\frac{14}{12}} = \sqrt[12]{a^{14}}.$$

Man nimmt nähmlich der Einfachheit der Rechnung wegen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Wurzel-Exponenten als den gemeinschaftlichen Radical-Exponenten.

Um $\sqrt[42]{a^{28}}$ auf die einfachste Gestalt zu bringen, setze man

$$\sqrt[42]{a^{28}} = a^{\frac{28}{42}} = a^{\frac{28:14}{42:14}} \text{ (§. 99.)} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Zusatz 3.

Es ist also auch $\sqrt[-m]{a^n} = \sqrt[-m\times-1]{a^{n\,1-1}} = \sqrt{a^{-n}}$ (vergl. §. 130.),

und $\sqrt[-m]{a^{-n}} = \sqrt[-m\times-1]{a^{-n\times-1}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Digitized by Google

Zusatz 4.

$\pm\frac{m}{n} \quad \pm\frac{m}{n}\times\pm n$

Es ist $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{p\times\pm n}} = \sqrt[n]{a^{\pm np}}$, woraus die Bedeutung des gebrochenen Wurzel-Exponenten von selbst erhellt.

Zusatz 5.

Sollen zwey Radical-Größen mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt werden, so müssen sie einerley Wurzel-Exponenten haben (§. 129. Zus. 1.); haben sie also verschiedene Wurzel-Exponenten, so mache man sie nach (Zus. 2.) erst gleichnahmig, und verfahre dann nach (§. 129. Zus. 1.).

So z. B. ist $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^{10}} \cdot \sqrt[6]{a^9} = \sqrt[6]{a^{19}}$, und

$$\sqrt[3]{a^5} : \sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12]{a^{20}} : \sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12]{a^{20} : a^7} = \sqrt[12]{a^{13}}.$$

Zusatz 6.

Es ist $\sqrt[n]{a^{mn+s}} = \sqrt[n]{a^{mn}\,a^s} = \sqrt[n]{a^{mn}} \cdot \sqrt[n]{a^s}$ (§. 129.)

$= a^{\frac{mn}{n}} \sqrt[n]{a^s} = a^m \sqrt[n]{a^s}$, wo $s < n$ seyn soll.

Man ist demnach im Stande, eine irrationale Größe, deren Potenz-Exponent größer als ihr Wurzel-Exponent ist, als ein Product aus zwey Factoren darzustellen, deren einer rational der andere aber irrational ist.

Eben so ist $\sqrt[n]{a^{mn}b^r} = \sqrt[n]{a^{mn}} \cdot \sqrt[n]{b^r} = a^m \sqrt[n]{b^r}$, wo n und r relative Primzahlen seyn sollen. Man sieht demnach, daß eine Größe unter dem Wurzelzeichen vor dasselbe als Coefficient gebracht werde, wenn man den Exponenten derselben durch den gegebenen Wurzel-Exponenten dividirt.

So z. B. ist $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{4^2.3} = 4\sqrt{3}$,

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{81.3} = \sqrt[3]{27.9} = \sqrt[3]{3^3.3^2} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}.$$

Digitized by Google

§. 133.

Jeder irrationale Bruch kann in einen andern von gleichem Werthe mit rationalem Zähler oder Nenner verwandelt werden.

1) Denn es sey $\sqrt[p]{\frac{a^m}{b^n}}$ der gegebene Bruch, wo m, n, p relative Primzahlen sind, und man soll ihn in einen andern von gleichem Werthe mit rationalem Nenner verwandeln.

Ist $n > p$, z. B. $n = vp - w$, oder $n + w = vp$, wo v und w ganze positive Zahlen bezeichnen, so setze man

$$\sqrt[p]{\frac{a^m}{b^n}} = \sqrt[p]{\frac{a^m \cdot b^w}{b^n \cdot b^w}} = \sqrt[p]{\frac{a^m\ b^w}{b^{n+w}}} = \sqrt[p]{\frac{a^m\ b^w}{b^{vp}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[p]{a^m b^w}}{\sqrt[p]{b^{vp}}} = \frac{\sqrt[p]{a^m b^w}}{b^v},$$

welcher Bruch einen rationalen Nenner, und mit dem gegebenen Bruche einerley Werth hat.

So z. B. ist $\sqrt[3]{\frac{5}{16}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 2^2}{2^4 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{\frac{20}{2^6}} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{2^{6:3}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{2^2} = \frac{\sqrt[3]{20}}{4}.$$

Ist $n < p$, so nehme man w so groß, daß $n + w = p$, also $v = 1$ werde, so ist

$$\sqrt[p]{\frac{a^m}{b^n}} = \sqrt[p]{\frac{a^m \cdot b^w}{b^n \cdot b^w}} = \sqrt[p]{\frac{a^m b^w}{b^{n+w}}} = \sqrt[p]{\frac{a^m b^w}{b^p}} =$$

$$= \frac{\sqrt[p]{a^m b^w}}{\sqrt[p]{b^p}} = \frac{\sqrt[p]{a^m b^w}}{b}.$$

So z. B. ist

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3.}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{3.2}{2^2.2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2},$$

Digitized by Google

eben so

$$\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7}{4.3}} = \sqrt{\frac{7.3}{2^2.3^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{(2.3)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{2.3} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Man hat nähmlich nur Zähler und Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen mit einer solchen Potenz des Nenners zu multipliziren, daß im Nenner eine Potenz vom Grade des Wurzel-Exponenten entstehe. Ist also der gegebene Nenner ein Product aus zwey oder mehreren Factoren, deren einer oder mehrere schon Potenzen vom verlangten Grade sind, so ergänze man der Einfachheit der Rechnung wegen nur die übrigen Factoren zu Potenzen vom verlangten Grade. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{13}{8.9.5}} = \sqrt[3]{\frac{13}{2^3.3^2.5}} = \sqrt[3]{\frac{13.3.5^2}{2^3.3^2.5.3.5^2}} = \sqrt[3]{\frac{13.3.25}{2^3.3^3.5^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{975}{(2.3.5)^3}} = \frac{\sqrt[3]{975}}{2.3.5} = \frac{\sqrt[3]{975}}{30}.$$

b) Soll der Bruch $\sqrt[p]{\frac{a^m}{b^n}}$ mit rationalem Zähler dargestellt werden, so verfahre man mit dem Bruche in Bezug auf den Zähler gerade so, wie wir vorhin in Bezug auf den Nenner verfahren sind.

So z. B. ist $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7.7}{8.7}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{56}} = \frac{\pm 7}{\sqrt{56}}$,

$$\sqrt[3]{\frac{81}{100}} = \sqrt[3]{\frac{3^4}{100}} = \sqrt[3]{\frac{3^4.3^2}{100.3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3^6}{900}} = \frac{\sqrt[3]{3^6}}{\sqrt[3]{900}} =$$

$$= \frac{3^2}{\sqrt[3]{900}} = \frac{9}{\sqrt[3]{900}}.$$

2) Hat der gegebene Bruch die Form $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, so setze man

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[mn]{a^m}}{\sqrt[mn]{b^n}} \text{ (§. 132. Zus. 2.)} = \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}},$$

und nun verfahre man wie vorhin.

Digitized by Google

So z. B. ist $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3.3]{3^3}}{\sqrt[3.3]{6^3}} = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{36}} = \sqrt[6]{\frac{27}{36}} = \sqrt[6]{\frac{3}{4}} =$

$= \sqrt[6]{\frac{3}{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{3 \cdot 2^4}{2^2 \cdot 2^4}} = \sqrt[6]{\frac{48}{2^6}} = \frac{\sqrt[6]{48}}{\sqrt[6]{2^6}} = \frac{\sqrt[6]{48}}{2}.$

3) Hat endlich der gegebene Bruch die Form $\sqrt[p]{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}}$; so setze man

$$\sqrt[p]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)} = \sqrt[p]{\left(\frac{\sqrt[mn]{a^m}}{\sqrt[mn]{b^n}}\right)} = \sqrt[p]{\sqrt[mn]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)}} = \sqrt[mnp]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)}$$

(§. 131. Zus. 4.), und verfahre dann wie im ersten Falle.

Es ist z. B.

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{32}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{32}}\right)} = \sqrt[6]{\frac{16}{32}} = \sqrt[12]{\frac{16}{32}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[12]{1}}{\sqrt[12]{2}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}, \text{ oder } = \sqrt[12]{\frac{1 \cdot 2^{11}}{2 \cdot 2^{11}}} = \sqrt[12]{\frac{2048}{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2048}}{\sqrt[12]{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2048}}{2}.$$

§. 134.

Gegebene Wurzelgrößen zu einander zu addiren und von einander abzuziehen.

Sind die gegebenen Wurzelgrößen **gleichartig**, d. h. sind die Wurzel-Exponenten und die Größen unter dem Wurzelzeichen einander gleich, so verfahre man nach §. 40 und §. 41. Sind aber die Wurzelgrößen ungleichartig, so deute man die Addition und Subtraction bloß an.

So z. B. ist $\left(4\sqrt{a} - 7\sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[4]{b}\right) + \left(5\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{ab} - 2\sqrt[4]{b}\right) =$

$$= 9\sqrt{a} - 4\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[4]{b};$$

und $\left(8\sqrt[3]{12} + 5\sqrt{7} - 4\sqrt[4]{13}\right) - \left(7\sqrt[3]{12} - 3\sqrt{7} + 2\right) =$

$$= \sqrt[3]{12} + 8\sqrt{7} - 4\sqrt[4]{13} - 2.$$

Eben so $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$.

Digitized by Google

Öfters sind die gegebenen Radical-Größen nur dem Scheine nach ungleichartig, können aber nach den (§. 129. Zus. 3. und §. 132. Zus. 6.) aufgestellten Regeln gleichartig gemacht, und dann reducirt werden. So z. B. ist.

$$2\sqrt{96} - 5\sqrt{54} + 7\sqrt{150} = 2\sqrt{16.6} - 5\sqrt{9.6} + 7\sqrt{25.6} =$$
$$= 2\sqrt{4^2.6} - 5\sqrt{3^2.6} + 7\sqrt{5^2.6} = 2.4\sqrt{6} - 5.3\sqrt{6} + 7.5\sqrt{6} =$$
$$= 8\sqrt{6} - 15\sqrt{6} + 35\sqrt{6} = 28\sqrt{6}.$$

Zusatz 1.

Die Regeln für die Multiplication und Division der Wurzelgrößen sind im §. 129 angegeben worden, und wenn die Factoren Polynome sind, so wird mit Berücksichtigung jener Regeln nach den im §. 51 angegebenen Vorschriften verfahren.

Zusatz 2.

Wenn der Nenner eines Bruches, welcher mit rationalem Nenner dargestellt werden soll, mehrgliedrig ist, und keine andern Wurzeln als Quadrat-Wurzeln enthält, so multiplizire man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit dem Nenner, indem man das Zeichen eines Gliedes in das entgegengesetzte verwandelt. So z. B. ist

1) $\frac{a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{2^2}}$ (§. 57. 3. und §. 129. Zus. 6.) $= \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} = a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

2) $\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}.(2\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{35.7} + \sqrt{35.5}}{(2\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} =$

$$= \frac{2\sqrt{5.7^2} + \sqrt{7.5^2}}{2^2\sqrt{7^2}-\sqrt{5^2}} = \frac{2.7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{4.7-5} = \frac{14\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{23}.$$

3) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$

$$= \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{7^2}-2\sqrt{7.5}+\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{7-2\sqrt{35}+5-3} =$$
$$= \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{9-2\sqrt{35}}.$$

Da hier im Nenner wieder eine Wurzelgröße erscheint, so wiederhohle man dieselbe Operation noch ein Mahl, nähmlich es ist

$$\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}{9-2\sqrt{35}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})\ (9+2\sqrt{35})}{(9-2\sqrt{35})\ (9+2\sqrt{35})} =$$

Digitized by Google

$$= \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})(9+2\sqrt{35})}{9^2-4\cdot\sqrt{35}^2} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})(9+2\sqrt{35})}{81-4\cdot 35} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})(9+2\sqrt{35})}{-59} = \frac{-3(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})(9+2\sqrt{35})}{59} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(9+2\sqrt{35})}{59}.$$

Nun ist aber

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(9+2\sqrt{35}) = \sqrt{7}+9\sqrt{3}+2\sqrt{105}-5\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{matrix} 9+2\sqrt{35} \\ 9\sqrt{5}+9\sqrt{3}-9\sqrt{7} \\ 2\sqrt{5.35}+2\sqrt{3.35}-2\sqrt{7.35} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 9\sqrt{5}+9\sqrt{3}-9\sqrt{7} \\ 2\sqrt{5^2.7}+2\sqrt{105}-2\sqrt{7^2.5} \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 9\sqrt{5}+9\sqrt{3}-9\sqrt{7} \\ 10\sqrt{7}+2\sqrt{105}-14\sqrt{5} \end{matrix}\right\} = -5\sqrt{5}+\sqrt{7}+2\sqrt{105}+9\sqrt{3},$$

mithin ist $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7}+9\sqrt{3}+2\sqrt{105}-5\sqrt{5})}{59}$.

Zusatz 3.

Wenn man die Wurzelgrößen als Potenzen mit gebrochenen Exponenten darstellt, so lassen sich alle Rechnungen mit denselben ganz auf dieselbe Weise durchführen, wie mit solchen Potenzen, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind.

So z. B. ist 1) $m\sqrt[r]{a^s} \pm n\sqrt[r]{a^s} = m\,a^{\frac{s}{r}} \pm n\,.\,a^{\frac{s}{r}} =$

$$= (m \pm n)\,a^{\frac{s}{r}} = (m \pm n)\sqrt[r]{a^s}.$$

2) $\sqrt[p]{a^m}\,.\,\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{m}{p}}\,.\,a^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{p}} = a^{\frac{m+n}{p}} = \sqrt[p]{a^{m+n}}$.

3) $\sqrt[p]{a^m} : \sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{m}{p}} : a^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{m}{p}-\frac{n}{p}} = a^{\frac{m-n}{p}} = \sqrt[p]{a^{m-n}}$.

4) $\left(\sqrt[p]{a^m}\right)^n = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^n = a^{\frac{m}{p}.n} = a^{\frac{mn}{p}} = \sqrt[p]{a^{mn}}$.

5) $\sqrt[p]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)} = \sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}:p} = a^{\frac{n}{mp}} = \sqrt[mp]{a^n}$.

6) $\left(\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{a^m}\right)}\right)^n = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a^{mn}}} = \sqrt[pq]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{pq}} =$

$$= a^{\frac{m}{q}\cdot\frac{n}{p}} = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}.$$

Aus der Übereinstimmung dieser Rechnungs-Resultate sieht man, daß die (§. 132) aufgestellte Regel den früher erwiesenen Sätzen nicht

Digitized by Google

widerspreche, und also jene Erweiterung des (§. 131. Zus. 1.) aufgestellten Satzes wirklich zulässig sey.

§. 135.

Wenn A irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet, und es fällt der Werth der Wurzelgröße $\sqrt[n]{A}$ zwischen zwey auf einander folgende ganze Zahlen a und $a+1$; so kann der Werth von $\sqrt[n]{A}$ weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch, also durch keine Zahl vollkommen genau angegeben werden (Vergl. §. 75.).

Denn da vermöge der Voraussetzung $\sqrt[n]{A} > a$ und $< a+1$, so soll z. B. $\sqrt[n]{A} = a + \frac{r}{p} = \frac{ap+r}{p} = \frac{s}{p}$ seyn, indem man jene gemischte Zahl auf den kürzesten Ausdruck gebracht denkt, wo also s und p relative Primzahlen seyn müssen. Wäre nun $\frac{s}{p}$ der wahre Werth von $\sqrt[n]{A}$; so müßte $\left(\frac{s}{p}\right)^n = \frac{s^n}{p^n} = A =$ einer ganzen Zahl seyn, welches unmöglich ist (§. 103. Zus. 4).

Zusatz 1.

Also kann eine Wurzel, die zwischen zwey nur um eine Einheit unterschiedenen Zahlen liegt, d. i. die Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz nie vollkommen genau angegeben werden, und deßhalb heißen solche Wurzeln auch *unausrechenbare*, *incommensurable*, oder *irrationale* Zahlen.

Obgleich aber der Werth irrationaler Wurzeln durch keine rationale Zahl genau dargestellt werden kann, so läßt sich dennoch in allen Fällen eine solche rationale Zahl auffinden, die vom wahren Werthe der gegebenen irrationalen Wurzel nur um eine Größe abweicht, die kleiner als jede angebbare Zahl ist, oder man kann sich jenem Werthe ohne Ende, d. i. so sehr man will, nähern.

Denn ist z. B. $\sqrt[n]{A}$ irrational, so ist auch, weil $\sqrt[n]{A} = \frac{10^m \sqrt[n]{A}}{10^m} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} A}}{10^m}$, (§. 129. Zus. 4.), der Zähler $\sqrt[n]{10^{mn} A}$ irrational. Man setze also $\sqrt[n]{10^{mn} A} = a + \frac{r}{p}$ wo a was immer für eine ganze

Digitized by Google

positive Zahl, und $\frac{r}{p}$ einen ächten, zur kürzesten Benennung gebrachten Bruch bezeichnet. Aus der Gleichung $\sqrt[n]{10^{mn} A} = a + \frac{r}{p}$ folgt $10^m \sqrt[n]{A} = a + \frac{r}{p}$, oder wenn man beyde Ausdrücke durch 10^m dividirt $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m} + \frac{r}{p \cdot 10^m}$; da nun der Voraussetzung gemäß $\frac{r}{p} < 1$, so ist auch $\frac{r}{p \cdot 10^m} < \frac{1}{10^m}$. Nimmt man also an, daß $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m}$ näherungsweise sey, so begeht man einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{10^m}$, und da man für m jede beliebige ganze Zahl annehmen kann, so klein als man nur immer will.

Will man demnach den Werth von $\sqrt[n]{A}$ bis auf m Decimalen genau haben, so multiplizire man nur A mit 10^{mn}, d. i. man hänge der Zahl mn Nullen an, und ziehe dann die verlangte Wurzel aus, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Zusatz 2.

Also ist auch jede Wurzel aus einem Bruche $\frac{a}{b}$, er mag ein ächter oder unächter seyn, wieder ein Bruch. Denn wäre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = c$ gleich einer ganzen Zahl, so müßte $c^n = \frac{a}{b}$ seyn, welches unmöglich ist. (§. 103. Zus. 4.).

§. 136.

Aus jeder gegebenen Zahl, sie sey ein vollkommenes oder unvollkommenes Quadrat, die Quadratwurzel auszuziehen; oder doch eine rationale Zahl zu finden, deren Unterschied von dem wahren Werthe der Wurzel kleiner als jede gegebene Zahl ist.

1) Wie aus ganzen Zahlen die Quadratwurzel gefunden werde, ist schon (§. 76) gezeigt worden; nur bleibt hier noch nachzuweisen, wie man mit dem Reste zu verfahren habe, wenn die gegebenen Zahlen keine vollkommene Quadratzahlen sind.

Digitized by Google

Hat man die Wurzel als ganze Zahl bestimmt, so hänge man dem nach §. 76. II. gefundenen Reste eine beliebige Classe von Nullen an, nachdem man zwischen diesen und dem Reste den Decimal-Punct gesetzt hat (§. 35.), und suche nach der (§. 76.) angegebenen Regel die folgenden Ziffern der verlangten Wurzel, die natürlich als Decimal-Ziffern erscheinen; und deren Anzahl so groß ist, als die Anzahl der Classen von Nullen, welche man dem Reste angehängt hat.

Beyspiele.

1) $\sqrt{7{,}48} = \sqrt{7{,}48{\cdot}000000\ldots.} = 27{\cdot}3495\ldots.$

$34{\cdot}8 : 4_7$

$190.0 : 543$

$2710.0 : 546_4$

$52440.0 : 5468_9$

$321990.0 : 54698$

. . . . . .

2) $\sqrt{13} = 3{\cdot}605{,}551\ldots.$

$4{\cdot}00 : 66$

$= 40{,}0 : 7{\cdot}2$

$4000{,}0 : 7205$

$39750{,}0 : 7210{,}5$

$369750{,}0 : 721105$

$= 919750{,}0 : 721110.$

Wir haben nähmlich dem (§. 76. II.) gefundenen Reste 19 im ersten Beyspiele zwey Nullen als Decimalen angehängt, und so erhielten wir $19{\cdot}00$, wo $19{\cdot}0$ nach den bereits bekannten Regeln den Dividend und $2.27 = 54$ den Divisor bildet. Nun ist aber $19{\cdot}0 : 54 = 0{\cdot}3$ (§. 119.), also ist $0{\cdot}3$ die nächste Ziffer der verlangten Wurzel. Auf dieselbe Art überzeugt man sich auch von der richtigen Bestimmung der folgenden gefundenen Wurzelziffern.

Wir haben also hier die Wurzel auf 4 Decimalen bestimmt; will man sich aber auf die letzte Ziffer 5 noch verlassen, so muß man noch eine Ziffer mehr suchen, um die letzte beybehaltene Ziffer nöthigenfalls corrigiren zu können (§. 114. Zus. 2.).

2) Ist die gegebene Zahl ein Decimal-Bruch, so theile man die Ganzen von der Rechten gegen die Linke (wie §. 76) in Classen ein, die Decimal-Stellen aber von der Linken gegen die Rechte, weil (nach §. 117. Zus.) jede Decimal-Ziffer im Quadrate zwey Decimal-Ziffern gibt. Käme also bey dieser Eintheilung auf die letzte Classe rechts nur eine Decimal-Ziffer zu stehen, welches immer der Fall ist, sobald die Anzahl der Decimal-Ziffern ungerade ist, so müßte man die noch

Digitized by Google

fehlende Stelle durch eine Null ergänzen, wodurch die gegebene Zahl ihrem Werthe nach nicht geändert wird, (§. 107. Zus. 2.) Hierauf verfahre man gerade so, als wenn die gegebene Zahl eine ganze Zahl wäre, und schneide in der gefundenen Wurzel für die Ganzen so viele Ziffern ab, wie viele Classen die Ganzen der gegebenen Zahl gegeben haben. — Soll man z. B. aus der Zahl 8745·376925 die Quadratwurzel suchen, so steht die Rechnung wie folgt:

$$\sqrt{87|45{\cdot}37|69|25} = 93{\cdot}516$$

6 4,5 : 183
96·37 : 1865
3126,9 : 18701
125682,5 : 187026
134669.

Hier wurden 3 Decimal-Ziffern in der Wurzel gefunden; ist man aber mit diesem Grade der Genauigkeit noch nicht zufrieden, so hänge man dem Reste 134669 noch eine Classe von Nullen an, und verfahre wie in 1) so lange, bis man die gewünschte Anzahl von Decimalen gefunden hat.

3) Hat man aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu suchen, so dürfte man nur aus dem Zähler und dann auch aus dem Nenner die Quadratwurzel ziehen, und das erste Resultat durch das zweyte dividiren (§. 129.). Da aber diese Methode für die Ausübung zu beschwerlich ist, so verwandle man nach §. 133 den gegebenen Bruch in einen andern von gleichem Werthe mit rationalem Nenner, und dividire dann die Quadratwurzel aus dem Zähler durch den gefundenen rationalen Nenner, oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimal-Bruch von gleichem Werthe (§. 114), und verfahre dann nach Nro. 2. Diese letztere Methode ist für die Ausübung am zweckmäßigsten. Folgende Beyspiele mögen das Gesagte erläutern.

1) Es ist $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

und weil $\sqrt{3} = 1{\cdot}73205\ldots.$

2·0,0 : 27
110,0 : 343
710,0 : 3462
1760,0 : 3464
176000,0 : 346405
27975
. . . . .

so ist $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{\cdot}73205\ldots.}{2} = 0{\cdot}86602\ldots.$

Digitized by Google

2) Es ist $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2{\cdot}44948\ldots}{3} =$

$= 0{\cdot}81649\ldots.$

denn $\sqrt{6} = 2{\cdot}44948\ldots$

2·0,0 : 44
240,0 : 484
4640,0 : 4889
23990,0 : 48984
439640,0 : 48988

3) Endlich ist $\sqrt{2\frac{41}{48}} = \sqrt{\frac{137}{48}} = \sqrt{\frac{137}{2^4 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{137 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}} =$

$= \frac{\sqrt{411}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{411}}{12} = \frac{20{\cdot}27313\ldots}{12} = 1{\cdot}68942\ldots$

Denn $\sqrt{411} = 20{\cdot}27313\ldots.$

* 11 : 4
110,0 : 402
2960,0 : 4047
12710,0 : 40543
54710,0 : 405461
1416390,0 : 405462

oder besser $\sqrt{2\frac{41}{48}} = \sqrt{2{\cdot}85416} =$

$= \sqrt{2{\cdot}85|41|66|66|66|} \ldots. = 1{\cdot}68942\ldots$ wie vorhin.

18,5 : 26
294,1 : 328
3176,6 : 3369
14456,6 : 33784
* 94306,6 : 33788.

* Ist also der gegebene Decimal-Bruch periodisch, so dürfen nicht Nullen, sondern es müssen immer zwey auf einander folgende Ziffern der Periode zum jedesmahligen Reste herabgesetzt werden. Sollte man z. B. aus dem periodischen Bruche $0{\cdot}57\dot{8}4\dot{7}5$, wo die Ziffern 475 die Periode bilden, die Quadratwurzel suchen, so muß man rechnen wie folgt:

$\sqrt{0.57|84|75|47|54|75|\ldots} = 0{\cdot}760575\ldots.$

88,4 : 146
* 87,5 : 152
8754,7 : 15205
115225,4 : 152107
* 8750575 : 152114.

Digitized by Google

Zusatz.

Die irrationalen Wurzeln können nie periodische Decimal-Brüche werden; denn wäre eine irrationale Wurzel durch einen periodischen Decimal-Bruch angebbar, so würde, weil nach §. 115 jeder periodische Decimal-Bruch in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe verwandelt werden kann, die gesuchte Wurzel sich ebenfalls durch denselben gemeinen Bruch angeben lassen, folglich wäre sie gegen unsere Voraussetzung rational (§. 135. Zus. 1.).

§. 137.

1) Da man jede Zahl N als ein Product aus zwey Factoren a und b betrachten kann, von welchen der eine a ganz willkürlich angenommen werden darf, indem man den andern b durch Division bestimmen kann; so läßt sich noch ein anderes oft vortheilhaftes Verfahren, die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl zu bestimmen, ableiten. Ist nähmlich

$$N = ab, \text{ also } b = \frac{N}{a};$$

so ist, wenn $a = b$ gefunden wird, a oder $b = \sqrt{N}$ (§. 73).

Sind aber a und b ungleich, und z. B. $a > b$; so muß $\sqrt{N}$ immer zwischen a und b liegen, d. h. es muß $a > \sqrt{N} > b$ seyn. Denn da $a > b$ vorausgesetzt wurde, so ist auch $ab > b^2$, und $a^2 > ab$, oder weil $ab = N$ ist, $N > b^2$ und $N < a^2$; also auch $a > \sqrt{N}$ und $b < \sqrt{N}$.

2) Will man demnach die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl durch Näherung bestimmen, so darf man nur für a und b solche Werthe auffinden, welche bis auf die verlangte Gränze, d. i. bis auf die verlangte Decimal-Stelle genau übereinstimmen; denn da $\sqrt{N}$ zwischen a und b liegen muß (1), so muß nothwendig der Werth von $\sqrt{N}$ bis auf jene bezeichnete Gränze mit a und b übereintreffen, und kann demnach für die gesuchte Wurzel selbst genommen werden. Wie man aber die Factoren a und b bis auf die verlangte Gränze übereinstimmend erhalten könne, lehrt folgende Betrachtung.

3) Nimmt man eine zwischen a und b gelegene Zahl a' als Factor der Zahl N, welche ebenfalls zwischen ihren Factoren a und b liegt (1); so muß auch der andere Factor $b' = N : a'$ zwischen a und b enthalten seyn. Denn es sey $a > b$ und $a' < a$, aber $a' > b$; so ist $a'b' < ab'$, aber $a'b' > bb'$, und weil $N = a'b'$ seyn soll, so ist auch $N < ab'$

Digitized by Google

und $N > bb'$, oder, weil $N = ab$, $ab < ab'$ und $ab > bb'$, d. i. wenn man den ersten Ausdruck durch a, den zweyten aber durch b dividirt, $b < b'$ und $a > b'$, d. h. es liegt auch b' zwischen a und b.

Wollte man wieder eine zwischen a' und b' liegende Zahl a'' als Factor von N annehmen, so müßte auch der zugehörige zweyte Factor $b'' = N : a''$ zwischen a' und b' liegen. Fährt man auf diese Art fort, so ist klar, daß die Gränzen, zwischen welchen $\sqrt{N}$ liegt, immer näher und näher an einander rücken, weil $\sqrt{N}$ immer zwischen zwey solchen zusammen gehörigen Factoren liegen muß (1); man muß daher die angezeigte Rechnung so lange fortsetzen, bis man zwey zusammen gehörige Factoren $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$ von N findet, welche einander entweder vollkommen gleich sind, oder doch als Decimal-Brüche dargestellt, in so vielen Decimal-Stellen übereinstimmen, mit wie vielen Decimal-Ziffern $\sqrt{N}$ verlangt wird. — Übrigens ist es bey der Bestimmung des Factors a am zweckmäßigsten, einen solchen Werth von a anzunehmen, der nicht gar zu weit von $\sqrt{N}$ entfernt ist; die folgenden Factoren $a', a'', a''', \ldots a^{(n)}$ müssen immer so gewählt werden, daß sie jedes Mahl zwischen den beyden vorhergehenden zusammen gehörigen Factoren enthalten sind; man thut daher am besten, wenn man für jedes $a^{(n)}$ die halbe Summe der vorhergehenden zusammen gehörigen Factoren $a^{(n-1)}$ und $b^{(n-1)}$ annimmt, wodurch folgende Werthe erhalten werden.

$$a, \qquad b = N : a \qquad\qquad N = ab;$$

$$a' = \frac{a+b}{2}, \quad b' = N : a' = \frac{2N}{a+b} = \frac{2ab'}{a+b}, \quad N = a'b';$$

$$a'' = \frac{a'+b'}{2}, \quad b'' = N : a'' = \frac{2N}{a'+b'} = \frac{2a'b'}{a'+b'}, \quad N = a''b'';$$

. . . . . .

$$a^{(n)} = \frac{a^{(n-1)}+b^{(n-1)}}{2}, \quad b^{(n)} = N : a^{(n)} = \frac{2a^{(n-1)}\,b^{(n-1)}}{a^{(n-1)}+b^{(n-1)}},$$

$$N = a^{(n-1)}\,b^{(n-1)};$$

$$a^{(n+1)} = \frac{a^{(n)}+b^{(n)}}{2}, \qquad b^{(n+1)} = N : a^{(n+1)} = \frac{2a^{(n)}b^{(n)}}{a^{(n)}+b^{(n)}}, \quad N = a^{(n)}b^{(n)}.$$

4) Suchen wir den Unterschied zwischen den beyden zusammen gehörigen Factoren $a^{(n+1)}$ und $b^{(n+1)}$; so finden wir

$$a^{(n+1)} - b^{(n+1)} = \frac{a^{(n)}+b^{(n)}}{2} - \frac{2a^{(n)}\,b^{(n)}}{a^{(n)}+b^{(n)}} = \frac{(a^{(n)}+b^{(n)})^2 - 4a^{(n)}b^{(n)}}{2(a^{(n)}+b^{(n)})} =$$

$$= \frac{[a^{(n)} - b^{(n)}]^2}{2[a^{(n)}+b^{(n)}]},$$

Digitized by Google

d. h. es ist der Unterschied zweyer zusammen gehöriger Factoren immer gleich dem Quadrate des Unterschiedes der beyden unmittelbar vorhergehenden Factoren, dividirt durch die doppelte Summe derselben. Es läßt sich demnach der Unterschied zweyer Factoren immer im voraus bestimmen, ohne sie selbst noch berechnet zu haben.

5) Weil $[a^{(n)} - b^{(n)}]^2$ immer positiv ist, so ist auch

$a^{(n+1)} - b^{(n+1)} = \frac{[a^{(n)} - b^{(n)}]^2}{2[a^{(n)} + b^{(n)}]}$ stets positiv, mithin $a^{(n+1)} > b^{(n+1)}$, und hieraus folgt, daß $a^{(n+1)} > \sqrt{N}$ und $b^{(n+1)} < \sqrt{N}$ sey.

Da nun $a^{(n+1)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2} > \sqrt{N}$; so ist $a^{(n)} + b^{(n)} > 2\sqrt{N}$, mithin auch $2.(a^{(n)} + b^{(n)}) > 4\sqrt{N}$, und wenn wir $4\sqrt{N} > 1$, also $\sqrt{N} > \frac{1}{4}$, und $N > \frac{1}{16}$ annehmen; so ist

$\frac{[a^{(n)} - b^{(n)}]^2}{2[a^{(n)} + b^{(n)}]} < [a^{(n)} - b^{(n)}]^2$, d. i. $a^{(n+1)} - b^{(n+1)} < [a^{(n)} - b^{(n)}]^2$.

Stimmen demnach die Factoren $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$ in den ersten m Decimal-Stellen überein; so ist $a^{(n)} - b^{(n)} < \frac{1}{10^m}$, mithin

$a^{(n+1)} - b^{(n+1)} < \left(\frac{1}{10^m}\right)^2 = \frac{1}{10^{2m}}$; d. h. das folgende Paar zusammen gehöriger Factoren stimmt dann wenigstens in den 2 m ersten Decimal-Ziffern überein. Wir wollen diese Methode durch einige Beyspiele erläutern.

Beyspiel. Man soll $\sqrt{29}$ mit 8 Decimal-Stellen angeben.

Setzt man $a = 5$, so erhält man nach (Nro. 3) folgende Werthe:

$a = 5$ $\qquad b = \frac{29}{5} = 5{\cdot}8$

$a' = \frac{27}{5} = 5{\cdot}4$ $\qquad b' = \frac{145}{27} = 5{\cdot}370370\ldots$

$a'' = \frac{727}{135} = 5{\cdot}385185185\ldots$ $\qquad b'' = \frac{3015}{727} = 5{\cdot}385144429\ldots$

$a''' = \frac{528527}{98145} = 5.385164807\ldots$

also $a'' - b'' = 0{\cdot}0000407\ldots < 0{\cdot}00005 = \frac{5}{10^5}$, mithin nach (Nro. 5)

$$a''' - b''' < (a'' - b'')^2 = \left(\frac{5}{10^5}\right)^2 = \frac{25}{10^{10}} = \frac{25}{10^8 . 10^2} =$$

$$= \frac{25}{10^8 . 100} = \frac{1}{10^8 . 4} < \frac{1}{10^8},$$ d. i. es ist

Digitized by Google

$a''' - b''' < \frac{1}{10^8}$, daher können wir, weil $a''' = 5{\cdot}38516480\dot{7}$ ist, $\sqrt{29} = 5{\cdot}38516481$ als den wahren Werth annehmen.

Beyspiel 2. Man soll $\sqrt{35}$ mit 10 Decimalen bestimmen.

Setzt man $a = 6$; so erhält man folgende Werthe:

$a = 6$ $\qquad b = \frac{35}{6} = 5{\cdot}8\dot{3}$

$a' = \frac{71}{12} = 5{\cdot}91\dot{6}$ $\qquad b' = \frac{420}{71} = 5{\cdot}91549\ldots$

$a'' = \frac{10081}{1704} = 5{\cdot}916079812\ldots$ $\qquad b'' = \frac{59640}{10081} = 5{\cdot}916079754\ldots$

$a''' = \frac{203253121}{34356048} = 5{\cdot}91607978309\ldots$

Hier ist $a'' - b'' = 0{\cdot}000000058\ldots < 0{\cdot}0000001 = \frac{1}{10^7}$, mithin $a''' - b''' < \left(\frac{1}{10^7}\right)^2 = \frac{1}{10^{14}}$, d. i. es müßten a''' und b''' wenigstens in den 14 ersten Decimal-Stellen übereinstimmen, folglich können wir $a''' = \sqrt{N} = \sqrt{35} = 5{\cdot}91607978309\ldots$ setzen, oder weil nur 10 Decimalen verlangt wurden, $\sqrt{35} = 5{\cdot}9160797831$.

Daß hier die abgekürzte Division (§. 120) vorzügliche Anwendung finde, darf kaum erinnert werden. Auch ist klar, daß man den Werth für jedes b nur so weit zu berechnen hat, bis man eine Verschiedenheit zwischen ihm und dem correspondirenden a bemerkt, und da sich aus der Differenz zwischen zwey solchen zusammengehörigen Werthen jedes Mahl beurtheilen läßt, wie weit die beyden folgenden zusammengehörigen Werthe übereinstimmen werden, so kann man leicht die abgekürzte Division darnach einrichten. Daß wir in den obigen Beyspielen b''' nicht zu berechnen brauchten, ist einleuchtend, weil nach der angegebenen Beurtheilung des Grades der Genauigkeit im Resultate a''' und b''' schon in mehreren Stellen übereinstimmen mußten, als in der gesuchten Wurzel verlangt wurden.

§. 138.

Aus einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel zu ziehen, oder doch für dieselbe einen Näherungswerth zu finden, der dem wahren Werthe so nahe kommt, als man nur immer will.

1) Ist die gegebene Zahl eine ganze Zahl, so wird die Kubikwurzel aus derselben nach der im §. 77 angegebenen Methode gefunden,

Digitized by Google

und zwar entweder vollkommen genau oder bloß als ganze Zahl, je nachdem die gegebene Zahl ein vollkommener Kubus ist oder nicht. Wir haben also hier noch zu zeigen, wie man mit dem Reste zu verfahren habe, der, nachdem man die Kubikwurzel als ganze Zahl bestimmt hat, übrig bleibt. Man denke sich nähmlich der gegebenen Zahl so viele Classen von Nullen, welche natürlich lauter Decimalen bezeichnen, angehängt, als erforderlich sind, um die gesuchte Wurzel, bis auf die verlangte Stelle genau zu erhalten, und setze die Rechnung (§. 77) so fort, wie in ganzen Zahlen. Soll z. B. die dritte Wurzel aus der Zahl 580697 mit 4 Decimalen angegeben werden, so steht die Rechnung wie folgt:

$$\sqrt[3]{580|697} = 83{\cdot}4285....$$

$8^3 = 512$

$686{,}97 : 192 \ (= 3.8^2)$

$-\left\{\begin{array}{l}576\\216\\127\end{array}\right.$

$8910{\cdot}0{,}00 : 20667 \ (= 3.83^2)$

$\left\{\begin{array}{l}82668..\\3984.\\64\end{array}\right.$

$603{\cdot}2960{,}00 : 2086668$

$-\left\{\begin{array}{l}4173336\\100088\end{array}\right.$

$185{\cdot}8623120{,}00 : 208766892$

$-\left\{\begin{array}{l}16701351 36\\1601664\\512\end{array}\right.$

$18{\cdot}832781248 0{,}00 : 33402702912.$

Nachdem die verlangte Wurzel (83) als ganze Zahl ausgezogen war, fanden wir den Rest 8910, welchem wir eine Classe von Nullen als Decimalen anhängten, wodurch die Zahl 8910·0 als Dividend erhalten wurde, die Zahl $3.83^2 = 20667$ aber als Divisor. Nun ist $8910{\cdot}0 : 20667 = 0{\cdot}4...$, also ist 0·4 die folgende Ziffer in der Wurzel, welche im Kubus $3.83^2.0{\cdot}4 + 3.83.(0{\cdot}4)^2 + (0{\cdot}4)^3 = 8306{\cdot}704$ gibt; diese Zahl vom vorigen Reste 8910·000 abgezogen, gibt den neuen Rest $603{\cdot}296 = 603{\cdot}296000$, der durch $3.(83{\cdot}4)^2 = 20866{\cdot}68$ dividirt den Quotienten 0·02 gibt; also ist 2 die nächst niedrigere Wurzelziffer.

Digitized by Google

Diese Wurzelnote gibt im Kubus

$3.(83{\cdot}4)^2.(0{\cdot}02)+3(83{\cdot}4)(0{\cdot}02)^2+(0{\cdot}02)^3=417{\cdot}433688$,

welche vom letzten Reste abgezogen, den Rest

$185{\cdot}862312 = 185{\cdot}86231200$

läßt. Es ist demnach 185·86231 20 der neue Dividend und $3.(83{\cdot}42)^2=$ $=20876{\cdot}6892$ der zugehörige Divisor; der Quotient wird $=0{\cdot}008$ gefunden, mithin ist 8 die folgende Wurzelnote, und diese gibt im Kubus $3.(83{\cdot}42)^2.(0{\cdot}008)+3(83{\cdot}42).(0{\cdot}008)^2+(0{\cdot}008)^3=$ $=167{\cdot}029530752$, welche Zahl vom letzten Reste abgezogen, die Differenz $18{\cdot}832781248=18{\cdot}8327812480$ als neuen Dividend gibt, welcher durch $3.(83{\cdot}428)^2=33402702912$ dividirt den Quotienten 0·0005 als letzte gesuchte Wurzelziffer gibt.

Wir sehen demnach, daß wir dem jedesmahligen Reste eine Classe von Nullen anhängen dürfen, und dann wie in ganzen Zahlen verfahren können.

2) Ist die gegebene Zahl ein Decimal-Bruch, so theilt man die Ziffern der Ganzen, wie gewöhnlich von der Rechten gegen die Linke, die Decimal-Ziffern aber von der Linken gegen die Rechte in Classen von 3 zu 3 Ziffern ein, um die letzte Classe rechts in den Decimalen nöthigen Falls durch Nullen ergänzen zu können, weil jede Decimal-Ziffer im Kubus 3 Stellen gibt (§. 117. Zus.), und dann verfahre man wie vorhin.

So z. B. ist $\sqrt[3]{501{\cdot}515|625}=8{\cdot}25$

$8^3=512$

$49{\cdot}5,15:192$

$-\left\{\begin{array}{r}384\\96\\8\end{array}\right.$

$10{\cdot}1476,25:201{\cdot}72$

$-\left\{\begin{array}{r}10\,0860\\6150\\125\end{array}\right.$

Eben so findet man auch

$\sqrt[3]{0{\cdot}150|568|768}=0{\cdot}532$

-125

$255,68:75$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
\quad 255{,}68 : 75 \\
- \left\{ \begin{array}{l} 225 \\ \;\;135 \\ \;\;\;\;27 \end{array} \right. \\
\hline
\quad 16917{,}68 : 8427 \\
- \left\{ \begin{array}{l} 16854 \\ \;\;\;\;636 \\ \;\;\;\;\;\;\;8 \end{array} \right. \\
\hline
\quad \ldots\ldots
\end{array}
$$

Endlich ist $\sqrt[3]{0{\cdot}00089} = \sqrt[3]{0{\cdot}000\,|890|} = 0{\cdot}09619\ldots$

$$
\begin{array}{l}
\quad 9^2 = 729 \\
\hline
\quad 1610{,}00 : 243 \\
- \left\{ \begin{array}{l} 1458 \\ \;\;972 \\ \;\;\;216 \end{array} \right. \\
\hline
\quad 52640{,}00 : 27648 \\
- \left\{ \begin{array}{l} 27648 \\ \;\;\;288 \\ \;\;\;\;\;\;1 \end{array} \right. \\
\hline
\quad 24963190{,}00 : 2770563 \\
- \left\{ \begin{array}{l} 24935067 \\ \;\;\;233523 \\ \;\;\;\;\;\;\;729 \end{array} \right. \\
\hline
\quad -476341.
\end{array}
$$

3) Ist die gegebene Zahl ein gemeiner Bruch, so dividirt man entweder die dritte Wurzel aus dem Zähler durch die Kubikwurzel aus dem Nenner (§. 129), oder man macht den Nenner des gegebenen Bruches rational (§. 133), und dividirt die Kubikwurzel aus dem so erhaltenen neuen Zähler durch den rationalen Nenner; oder endlich, man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimal-Bruch (§. 114), und ziehe dann aus diesem die dritte Wurzel. Diese letzte Methode ist gewöhnlich die einfachste und zweckmäßigste.

Beyspiele.

1) Es ist $\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} = \frac{1{\cdot}7099759}{2} = 0{\cdot}8549879\ldots$

2) $\sqrt[3]{8\frac{4}{7}} = \sqrt[3]{\frac{60}{7}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3{\cdot}9148676\ldots}{1{\cdot}9129312\ldots} = 2{\cdot}046\ldots$

Digitized by Google

oder $\sqrt[3]{8\frac{4}{7}} = \sqrt[3]{\frac{60}{7}} = \sqrt[3]{\frac{60 \cdot 7^2}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{60.49}}{7} = \frac{\sqrt[3]{2940}}{7} =$

$$= \frac{14{\cdot}3257\ldots}{7} = 2{\cdot}0465\ldots$$

oder $\sqrt[3]{8\,\frac{4}{7}} = \sqrt[3]{8{\cdot}571428571428\ldots} = 2{\cdot}046\ldots$

§. 139.

1) Da nach §. 74. c. jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl unmöglich (imaginär) ist; so ist die allgemeine Form der unmöglichen Wurzeln $\sqrt[2n]{-a}$.

2) Jede unmögliche Wurzel ist entweder von der Form $\sqrt[2^m]{-a}$, oder läßt sich auf diese Form bringen. Denn da $\sqrt[2n]{-b}$ die allgemeine Form der unmöglichen Wurzeln ist, so können nur zwey Fälle Statt finden, nähmlich: es ist $2n$ entweder eine Potenz von 2, z. B. $2n = 2^m$, wo m jede beliebige ganze positive Zahl bezeichnen kann, und dann ist unsere Behauptung für sich klar; oder es ist $2n$ ein Product aus einer Potenz von 2 in irgend eine ungerade Zahl p, z. B. $2n = 2^m \cdot p$,

und dann ist $\sqrt[2n]{-b} = \sqrt[2^m \cdot p]{-b} = \sqrt[2^m]{\sqrt[p]{-b}}$ (§. 131. Zus. 4.) $= \sqrt[2^m]{-a}$,

wenn $\sqrt[p]{-b} = -a$ (§. 74. 2. b.) gesetzt wird, also wieder von eben derselben Form.

3) Jede unmögliche Größe läßt sich demnach auch auf die Form $A\sqrt[2^m]{-1}$ bringen, wo A was immer für eine mögliche (reelle) positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl bezeichnen mag. Denn es ist $\sqrt[2^m]{-a} = \sqrt[2^m]{a(-1)} = \sqrt[2^m]{a}\sqrt[2^m]{-1}$ (§. 129) wo also $\sqrt[2^m]{a}$ eine reelle positive oder negative rationale oder irrationale Zahl ausdrückt, die wir durch A bezeichnen wollen. Es ist demnach $\sqrt[2^m]{-a} = A \cdot \sqrt[2^m]{-1}$.

Digitized by Google

§. 140.

Die Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ als die Summe oder die Differenz zweyer irrationalen Zahlen, oder einer rationalen und einer irrationalen Zahl darzustellen.

Setzen wir, daß $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ jene beyden gesuchten Zahlen seyen, so ist

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, mithin $A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 =$
$= (\sqrt{x})^2 \pm 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x \pm 2\sqrt{xy} + y = x + y \pm 2\sqrt{xy}$,
und wenn wir den rationalen Theil auf der einen Seite dem rationalen Theile auf der andern Seite der Gleichung gleich setzen, und eben so den irrationalen Theil links gleich dem irrationalen Theile rechts, so erhalten wir die Gleichungen:

$A = x + y$, also auch $A^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
und $\sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$, also auch $B = (2\sqrt{xy})^2 = 4.xy$;
mithin $A^2 - B = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$,
also $\sqrt{A^2 - B} = x - y$,
und weil $A = x + y$;
so ist $A + \sqrt{A^2 - B} = 2x$,
demnach $\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2} = x$, und $\sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} = \sqrt{x}$;
und $A - \sqrt{A^2 - B} = 2y$,
demnach $\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2} = y$, und $\sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} = \sqrt{y}$;
folglich ist $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}$;
d. i. $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}$.

Wenn nun $A^2 - B$ ein vollkommenes Quadrat ist, z. B. $A^2 - B = A^2 - (\sqrt{B})^2 = M^2$, also $\sqrt{A^2 - B} = M$ eine rationale Zahl ist, so wird der Ausdruck $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ einfacher gegeben, denn es ist dann

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + M}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - M}{2}}.$$

So z. B. kann $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$ einfacher ausgedrückt werden, weil $A^2 = 7^2 = 49$, und $B = 13$, also $A^2 - B = M^2 = 49 - 13 = 36$,

Digitized by Google

und $M = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{36} = 6$ ist; es ist nähmlich

$$\sqrt{7+\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{13.2}{4}} + \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{26}+\sqrt{2}}{2}.$$

Eben so läßt sich auch $\sqrt{13-2\sqrt{22}}$ einfacher darstellen; denn hier ist

$A = 13$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{22} = \sqrt{2^2.22} = \sqrt{88}$, also $B = 88$,

und $A^2 - B = M^2 = 13^2 - 88 = 169 - 88 = 81 = 9^2$, also $M = 9$,

folglich $\sqrt{13-2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{13+9}{2}} - \sqrt{\frac{13-9}{2}} = \sqrt{11} - \sqrt{2}$.

Zusatz 1.

Ist B negativ, z. B. $B = -b^2$, also $-B = b^2$; so geht die obige Formel über in folgende:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{-b^2}} = \sqrt{A \pm b\sqrt{-1}} \text{ (§. 139. 3.)} =$$

$$= \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}},$$

Das erste Glied $\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}}$ ist immer möglich (reell), das zweyte Glied $\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}}$ aber ist immer unmöglich, indem $A < \sqrt{A^2+b^2}$ ist. Da nun

$$\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} \times -1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

ist, so läßt sich jene Formel auch so darstellen:

$$\sqrt{A \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}+A}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Zusatz 2.

Setzen wir die reelle Größe $\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}+A}{2}} = p$ und

$\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} = q$; so erhalten wir $\sqrt{A \pm b\sqrt{-1}} = p \pm q\sqrt{-1}$, auf welche Form jede unmögliche Größe gebracht werden kann, wovon man sich auf folgende Art überzeugt:

Nach §. 139. 3. ist jede imaginäre Größe in der Form $A\sqrt[2^m]{-1}$

enthalten; nun ist aber $\sqrt[2^m]{-1} = \sqrt[2.2^{m-1}]{-1} = \sqrt[2^{m-1}]{\sqrt{-1}}$ (§. 131. Zus. 4.) $= \sqrt[2^{m-1}]{0+\sqrt{-1}} = \sqrt[2^{m-2}]{\sqrt{0+\sqrt{-1}}}$, und nach (Zus. 1.) ist $\sqrt{0+\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(0+1)}+0}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(0+1)}+0}{2}} \cdot \sqrt{-1} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{-1})$, d. h. $\sqrt{0+\sqrt{-1}}$ läßt sich auf die Form $p'+q'\sqrt{-1}$ bringen; also ist $\sqrt[2^m]{-1} = \sqrt[2^{m-2}]{p'+q'\sqrt{-1}}$. Auf dieselbe Art erhält man ferner $\sqrt[2^{m-2}]{p'+q'\sqrt{-1}} = \sqrt[2^{m-3}]{\sqrt{p'+q'\sqrt{-1}}} = \sqrt[2^{m-3}]{p''+q''\sqrt{-1}} =$

$= \sqrt[2^{m-4}]{\sqrt{p''+q''\sqrt{-1}}} = \sqrt[2^{m-4}]{p'''+q'''\sqrt{-1}} =$ &c.

Fährt man mit der Zerlegung auf diese Art fort, so kommt man gewiß einmal auf den Ausdruck $\sqrt[2^{m-m}]{p+q\sqrt{-1}} = \sqrt[2^0]{p+q\sqrt{-1}} =$

$= \sqrt[1]{p+q\sqrt{-1}} = p+q\sqrt{-1}$, folglich ist auch $\sqrt[2^m]{-1} = p+q\sqrt{-1}$,

und $A \cdot \sqrt[2^m]{-1} = A(p+q\sqrt{-1}) = Ap + Aq\sqrt{-1} = P+Q\sqrt{-1}$, wenn $Ap = P$ und $Aq = Q$ gesetzt wird, d. i. jede unmögliche Größe ist von der Form $P+Q\sqrt{-1}$, wo P und Q reelle positive oder negative Größen sind.

Zusatz 3.

Sollen demnach unmögliche Größen addirt oder subtrahirt, multiplizirt oder dividirt werden, oder ist eine imaginäre Größe zu potenziren, oder soll aus ihr die Wurzel irgend eines Grades ausgezogen werden, so bringe man sie nach Zusatz 2 erst auf die Form $P+Q\sqrt{-1}$, und verfahre dann nach (§. 134 und §. 134 Zus. 1.), indem man dabey folgende Vorschriften beobachtet:

Digitized by Google

1) Es ist $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = -1$,

$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1}) = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = -1 \times -1 = +1$

$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = +1 \cdot \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$

. . . . . .

allgemein $(\sqrt{-1})^{4n} = [(\sqrt{-1})^4]^n = (+1)^n = +1^n = +1$;

$(\sqrt{-1})^{4m+2} = (\sqrt{-1})^{4m} \cdot (\sqrt{-1})^2 = +1 \times -1 = -1$;

d. h. jede gerade Potenz von $\sqrt{-1}$ ist eine mögliche Größe, und zwar positiv oder negativ, je nachdem der Potenz-Exponent durch 4 oder bloß durch 2 theilbar ist, oder je nachdem der Potenz-Exponent durch 2 dividirt, einen geraden oder ungeraden Quotienten gibt.

Ferner ist

$(\sqrt{-1})^{4n+1} = (\sqrt{-1})^{4n} \cdot (\sqrt{-1}) = +1 \cdot \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^{4n+3} = (\sqrt{-1})^{4n} \cdot (\sqrt{-1})^3 = +1 \times -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$,

d. h. jede ungerade Potenz von $\sqrt{-1}$ ist selbst wieder eine unmögliche Größe, und zwar entweder positiv oder negativ, je nachdem der Potenz-Exponent durch 4 dividirt, 1 oder 3 zum Reste läßt.

2) Es ist also

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2 = \\ = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c} = -\sqrt{ab} \cdot \sqrt{-c} = -\sqrt{ab}\sqrt{c}\sqrt{-1} = \\ = -\sqrt{abc}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c} \cdot \sqrt{-d} = (\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}) \cdot (\sqrt{-c} \cdot \sqrt{-d}) = \\ = -\sqrt{ab} \times -\sqrt{cd} = +\sqrt{abcd} \text{ u. s. w.}$$

3) $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}$,

$$\text{also } \frac{1}{-\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}.$$

Zur Übung mag folgende Aufgabe dienen:

Man soll den Bruch $\frac{3+2\sqrt{-1}}{2-3\sqrt{-1}}$ in einen andern Bruch von gleichem Werthe verwandeln, dessen Nenner eine mögliche rationale Zahl ist.

Es ist

$$\frac{3+2\sqrt{-1}}{2-3\sqrt{-1}} = \frac{(3+2\sqrt{-1})\,(2+3\sqrt{-1})}{(2-3\sqrt{-1})\,(2+3\sqrt{-1})} = \frac{6+4\sqrt{-1}+9\sqrt{-1}+6(\sqrt{-1})^2}{2^2-(3\sqrt{-1})^2} = \\ = \frac{6+13\sqrt{-1}+6\times-1}{4-(9\times-1)} = \frac{13\sqrt{-1}}{4+9} = \frac{\sqrt{-1}}{1} = \sqrt{-1}.$$

Digitized by Google

Siebentes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln mehrgliederiger Größen.

§. 141.

Eine zweygliederige Größe (Binom) zu irgend einer Potenz, deren Exponent eine ganze positive Zahl ist, zu erheben.

Es sey das Binom $a+b$ zur n^{ten} Potenz zu erheben, oder $(a+b)^n$ zu entwickeln, wo n jede beliebige ganze positive Zahl bezeichnet.

I. Da $(a+b)^n = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n(1+x)^n$,

wenn man Kürze halber $\frac{b}{a} = x$ setzt, so sieht man ein, daß es sich nur um die Entwicklung der n^{ten} Potenz eines Binoms von der Form $(1+x)$ handelt. Nun findet man aber, indem man jede schon entwickelte Potenz nochmahls mit der Wurzel $(1+x)$ multiplizirt:

$$(1+x)^1 = 1+x$$
$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1+2x+x^2$$
$$(1+x)^3 = (1+x)^2(1+x) = 1+3x+3x^2+x^3$$
$$(1+x)^4 = (1+x)^3(1+x) = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$
$$(1+x)^5 = (1+x)^4(1+x) = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$
$$(1+x)^6 = (1+x)^5(1+x) = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$
$$(1+x)^7 = (1+x)^6(1+x) = 1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$$
. . . . . .

Wir sehen hier 1), daß bey allen Entwicklungen das erste Glied 1 oder x^0 sey, daß der Exponent von x in jedem folgenden Gliede um 1 größer werde, als der Exponent von x im nächst vorhergehenden Gliede, und so fortwachse, bis er endlich im letzten Gliede dem gegebenen Potenz-Exponenten gleich werde. Bezeichnen wir nun die Coefficienten, deren gegenseitige Beziehung (Relation) wir noch nicht kennen, der Ordnung nach, vom zweyten Gliede angefangen, mit $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$; so erhalten wir

Digitized by Google

A) $(1+x)^n = 1 + \overset{1}{C}x + \overset{2}{C}x^2 + \overset{3}{C}x^3 + \overset{4}{C}x^4 + \ldots + \overset{p}{C}x^p + \ldots + \overset{n-1}{C}x^{n-1} + \overset{n}{C}x^n.$

2) Da diesem Bildungsgesetze gemäß in jedem Gliede der Exponent von x um 1 kleiner ist als der zugehörige Zeiger des Gliedes, so ist klar, daß die Entwicklung von $(1+x)^n$ nothwendig $(n+1)$ Glieder haben müsse, weil der Exponent von x im letzten Gliede $= n$ ist.

Ist demnach n eine gerade Zahl, z. B. $n = 2m$, so hat die entwickelte Potenz $(2m+1)$ Glieder, d. i. eine ungerade Anzahl von Gliedern; ist aber n eine ungerade Zahl, z. B. $n = 2m+1$, so hat die Entwicklung $2m+2 = 2(m+1)$ Glieder, also eine gerade Anzahl von Gliedern. Im ersten Falle ist demnach ein mittleres Glied vorhanden, im andern Falle aber finden zwey mittlere Glieder Statt.

3) Betrachten wir die Coefficienten in den obigen Entwicklungen mit Aufmerksamkeit, so sehen wir, a) daß der Coefficient des ersten Gliedes immer 1 sey, und daß die Coefficienten der folgenden Glieder immer größer werden bis zum mittleren oder dem ersten mittleren Gliede, dann aber in umgekehrter Ordnung nach demselben Gesetze abnehmen.

b) Ist nur ein mittleres Glied vorhanden, so hat dieses den größten Coefficienten, und sind zwey mittlere Glieder vorhanden, so haben diese gleiche Coefficienten, die zugleich die größten in der ganzen Reihe sind; überhaupt aber sind zwey Coefficienten, die von der Mitte der Reihe, oder von den beyden äußern Gliedern (dem ersten und letzten) gleich weit abstehen, einander gleich.

c) Betrachten wir die Art und Weise, wie die Coefficienten einer Potenz aus denen der nächst vorhergehenden Potenz gebildet werden, so bemerken wir sogleich, daß der Coefficient eines bestimmten Gliedes, z. B. des p^{ten}, beständig die Summe der Coefficienten des p^{ten} und $(p-1)^{ten}$ Gliedes in der nächst niedrigern Potenz sey. So z. B. ist der zweyte Coefficient in der siebenten Potenz gleich der Summe des ersten und zweyten Coefficienten in der sechsten Potenz, nähmlich, $7 = 1+6$, der dritte Coefficient der siebenten Potenz gleich der Summe des zweyten und dritten Coefficienten in der sechsten Potenz, nähmlich $21 = 6+15$; eben so ist $35 = 15+20$, u. s. f. Wenn wir die Coefficienten wie in Nro. 1. bezeichnen, und die Potenz, zu welcher sie gehören, durch einen dem Coefficienten oben zur Linken gesetzten Zeiger andeuten, so daß also $\overset{n}{C}_p$ den p^{ten} Coefficienten in der n^{ten}

Potenz bezeichnet; so können wir das Gesetz, nach welchem die Coefficienten einer Potenz aus denen der nächst niedrigeren Potenz gebildet werden, allgemein durch folgende Formel darstellen:

$$\overset{n}{C}_{p} = \overset{n-1}{C}_{p-1} + \overset{n-1}{C}_{p}.$$

II. Setzen wir statt x wieder seinen Werth $\frac{b}{a}$, so geht die Gleichung A) über in

$$(1+x)^n = \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \overset{1}{C}\cdot\frac{b}{a} + \overset{2}{C}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \overset{3}{C}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \overset{4}{C}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \ldots$$

$$+ \overset{p}{C}\cdot\frac{b^p}{a^p} + \ldots + \overset{n-1}{C}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} + \overset{n}{C}\cdot\frac{b^n}{a^n};$$

also B) $$a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = (a+b)^n = a^n + \overset{1}{C}\cdot a^{n-1}b + \overset{2}{C}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \overset{3}{C}a^{n-3}b^3 + \overset{4}{C}\cdot a^{n-4}b^4 + \ldots + \overset{p}{C}a^{n-p}b^p + \ldots$$

$$+ \overset{n-1}{C}ab^{n-1} + \overset{n}{C}b^n.$$

Wir sehen hier, daß in allen Gliedern die Summe der Exponenten von a und b dieselbe sey, nähmlich = n. Im ersten Gliede ist der Exponent von a immer n, und nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede o wird; der Exponent von b aber ist im ersten Gliede o, und wächst in jedem folgenden Gliede um 1, bis er im letzten Gliede dem Potenz-Exponenten gleich wird.

III. Nach den in I. 3. aufgestellten Sätzen müßte immer die $(n-1)^{te}$ Potenz gegeben seyn, um die Coefficienten der n^{ten} Potenz bestimmen zu können, und man müßte demnach zur Bildung irgend einer Potenz, z. B. der 30sten, alle vorhergehenden (29) entwickeln, was für die Ausübung äußerst beschwerlich wäre. Folgende Betrachtung soll uns zu dem allgemeinen Gesetze leiten, nach welchem die Coefficienten irgend einer Potenz unabhängig von den Coefficienten der nächst vorhergehenden Potenz gebildet werden können.

Lassen wir wieder $\overset{n}{C}_{p}$ den p^{ten} Coefficienten, vom zweyten Gliede an gerechnet, bedeuten, so daß also n und p jede beliebige ganze positive Zahl bezeichnen; so finden wir mit Rücksicht auf das in I) für die sieben ersten auf einander folgenden Potenzen aufgestellte Schema:

Digitized by Google

$$\begin{array}{|l|l|l|l|}
\hline
{}^{1}_{1}C = 1 & {}^{2}_{2}C = 1 = \frac{2.1}{1.2} & {}^{3}_{3}C = 1 = \frac{3.2.1}{1.2.3} & {}^{4}_{4}C = 1 = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \\
{}^{2}_{1}C = 2 & {}^{3}_{2}C = 3 = \frac{3.2}{1.2} & {}^{4}_{3}C = 4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} & {}^{5}_{4}C = 5 = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} \\
{}^{3}_{1}C = 3 & {}^{4}_{2}C = 6 = \frac{4.3}{1.2} & {}^{5}_{3}C = 10 = \frac{5.4.3}{1.2.3} & {}^{6}_{4}C = 15 = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} \\
{}^{4}_{1}C = 4 & {}^{5}_{2}C = 10 = \frac{5.4}{1.2} & {}^{6}_{3}C = 20 = \frac{6.5.4}{1.2.3} & {}^{7}_{4}C = 35 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \\
\hline
\end{array}$$

u. s. w.; wir schließen demnach, daß allgemein

$${}^{n}_{1}C = n \qquad {}^{n}_{2}C = \frac{n(n-1)}{1.2} \qquad {}^{n}_{3}C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \qquad {}^{n}_{4}C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

u. s. w., und folgern aus diesen allgemeinen Ausdrücken, daß

$${}^{n}_{p}C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-(p-1)]}{1.2.3.4.5\ldots.(p-1)p} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots.(p-1)p}$$

sey. Sollen diese allgemeinen Ausdrücke wahr seyn, so muß die Summe von je zwey auf einander folgenden Coefficienten, z. B. die Summe des $(p-1)^{ten}$ und p^{ten}, den p^{ten} Coefficienten in der nächst höhern Potenz $(a+b)^{n+1}$ geben (Nro. I. 3. c.), und also dem Resultate gleich seyn, welches gefunden wird, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke für ${}^{n}_{p}C$ statt n nun n + 1 substituirt. Nun ist aber

$${}^{n}_{p-1}C + {}^{n}_{p}C = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1.2.3.4\ldots.(p-2)(p-1)} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-p+2)(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots.(p-1)\cdot p},$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3\ldots.(p-2)(p-1)} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3\ldots.(p-1)} \cdot \frac{n-p+1}{p} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3\ldots.(p-2)(p-1)} \left(1 + \frac{n-p+1}{p}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3\ldots.(p-2)(p-1)} \left(\frac{p+n-p+1}{p}\right),$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3\ldots.(p-2)(p-1)} \cdot \frac{(n+1)}{p} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+2)}{1.2.3.4\ldots.(p-2)(p-1)p},$$

Digitized by Google

und, wenn man in der Formel

$$\overset{n}{C}_{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)\,p}$$

ſtatt n jetzt $n+1$ ſetzt,

$$\overset{n+1}{C}_{p} = \frac{(n+1)\,n(n-1)\,(n-2\,\ldots\,(n-p+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(p-1)\,p},$$

alſo iſt auch $\overset{n}{C}_{p-1} + \overset{n}{C}_{p} = \overset{n+1}{C}_{p}$, folglich ſind obige Ausdrücke allgemein gültig.

Da alſo $\overset{n}{C}_{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)\,p}$; ſo ſieht man, daß nicht allein alle Coefficienten einer jeden Potenz unabhängig von den Coefficienten der nächſt vorhergehenden Potenz, ſondern auch jeder Coefficient unabhängig von allen übrigen Coefficienten derſelben Potenz beſtimmt werden könne. Denn jeder Coefficient erſcheint auf dieſe Art in der Form eines Bruches, deſſen Zähler und Nenner Producte aus gleich vielen Factoren ſind, und zwar iſt der erſte Factor des Zählers jedes Mahl der Potenz-Exponent, der zweyte Factor iſt um 1 kleiner, und ſo iſt jeder folgende Factor um 1 kleiner als der unmittelbar vorhergehende, der erſte Factor des Nenners aber iſt immer 1, der folgende 2, der nächſte 3, und ſo jeder folgende um 1 größer als der unmittelbar vorhergehende; der letzte Factor im Nenner aber iſt immer um 1 kleiner als der Zeiger des fraglichen Gliedes in der Reihe, vom erſten Gliede angerechnet, und der letzte Factor des Zählers iſt ſtets der Potenz-Exponent um den vorletzten Factor des Nenners vermindert. Die Anzahl der Factoren im Zähler ſowohl als im Nenner iſt demnach um 1 kleiner als der Zeiger des fraglichen Gliedes (vom erſten Gliede angerechnet).

So z. B. iſt der neunte Coefficient in der 15ten Potenz vom Binome $a+b$, d. i. der Coefficient des 10ten Gliedes, vom erſten angerechnet,

$$\overset{15}{C}_{9} = \frac{15\,.\,14\,.\,13\,.\,12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8} = 6435.$$

Es iſt demnach allgemein:

C) $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$

$$a^{n-3}b^3 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{n-4}b^4 + \ldots.$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)\,p}a^{n-p}b^p + \ldots. + n\,a\,b^{n-1} + b^n.$$

Digitized by Google

Diese Formel, welche das Gesetz ausdrückt, nach welchem jedes beliebige Binom auf jede beliebige Potenz erhoben werden kann, nennt man die Binomial-Formel, für deren Erfinder der berühmte englische Mathematiker Newton gehalten wird.

Zusatz 1.

Es ist $\overset{n}{C}_{p-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-2)(p-1)}$,

mithin $\overset{n}{C}_{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-2)(p-1)p} =$

$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-2)(p-1)} \cdot \frac{n-p+1}{p}$,

d. i. $\overset{n}{C}_{p} = \overset{n}{C}_{p-1} \cdot \frac{n-p+1}{p}$, und wenn wir die vollständigen Glieder vom ersten angerechnet, auf ähnliche Art bezeichnen, wie die Coefficienten, so ist $\overset{n}{G}_{p} = \overset{n}{C}_{p-1} \cdot a^{n-p+1} b^{p-1}$, und $\overset{n}{G}_{p+1} = \overset{n}{C}_{p} a^{n-p} b^{p} =$

$= \left(\frac{n-p+1}{p} \cdot \overset{n}{C}_{p-1}\right) \cdot \left(a^{n-p+1} b^{p-1} \cdot \frac{b}{a}\right)$. Es wird demnach jeder Coefficient in der Reihe gefunden, wenn man den Coefficienten des nächst vorhergehenden Gliedes mit dem Exponenten des ersten Theiles (a) in demselben Gliede multiplizirt, und das Product durch den Zeiger eben dieses Gliedes dividirt.

Zusatz 2.

Ist der zweyte Theil (b) des gegebenen Binoms negativ, so wechseln bloß die Zeichen in der Reihe, die Glieder der Reihe selbst aber bleiben ungeändert.

Zusatz 3.

Ist $n = 2m$ also $m = \frac{n}{2}$, so ist das mittlere Glied

$$\overset{2m}{G}_{m+1} = \pm \overset{2m}{C}_{m} a^{2m-m} b^{m} = \pm \overset{n}{C}_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}},$$

Digitized by Google

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade ist; ist aber $n = 2m + 1$, mithin $m = \frac{n+1}{2}$ also ungerade, so sind zwey mittlere Glieder vorhanden, deren erstes den Zeiger $m + 1 = \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}$ hat, das zweyte mittlere Glied aber hat den Zeiger $m + 2 = \frac{n+3}{2} + 1 = \frac{n+5}{2}$; also ist

$$\overset{n}{G}_{m+1} = \overset{n}{G}_{\frac{n+1}{2}} = \pm \overset{n}{C}_{\frac{n-1}{2}} \cdot a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= \pm \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}, \text{ und}$$

$$\overset{n}{G}_{m+2} = \overset{n}{G}_{\frac{n+3}{2}} = \mp \overset{n}{C}_{\frac{n+1}{2}} \cdot a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \mp \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n durch 4 dividirt den Rest 1 oder 3 läßt.

* Zwischen den Binomial-Coefficienten finden mehrere merkwürdige Relationen Statt, die aber hier des diesem Buche vorgezeichneten Zweckes halber nicht erörtert werden können.

Zusatz 4.

Die Formel $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \ldots\ldots$ ist auch noch gültig, wenn n keine ganze positive, sondern was immer für eine andere Zahl ist, wofür aber nur in der höheren Mathematik ein strenger Beweis geführt werden kann. Hier mag es genügen, die Formen anzugeben, welche die obige Formel erhält, wenn für n specielle Werthe gesetzt werden.

Digitized by Google

1) Setzen wir $-n$ statt n, so erhalten wir

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n} = a^{-n} - n\,a^{-n-1}\,b + \frac{-n(-n-1)}{1\cdot 2}\,a^{-n-2}\,b^2 +$$
$$+ \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{-n-3}\,b^3 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,a^{-n-4}\,b^4 + \ldots.$$
$$= a^{-n} - n\,a^{-n-1}\,b + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\,a^{-n-2}\,b^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{-n-3}\,b^3 +$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,a^{-n-4}\,b^4 - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^{-n-5}\,b^5 + \ldots$$
$$= a^{-n}\left[1 - n\frac{b}{a} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\,\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{b^3}{a^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{b^5}{a^5} + \ldots.\right].$$

Wenn n eine ganze positive Zahl ist, so muß die Reihe ein Mahl abbrechen, weil man denn doch auf ein Glied kommen muß, wo ein Factor des Zählers im Coefficienten $= 0$ wird, indem p immer größer wird. Hier aber werden die Factoren des Zählers in jedem Coeficienten immer größer, folglich kann man auch nie Null als Factor erhalten, d. i. die Reihe geht für einen negativen Werth des Potenz-Exponenten ohne Ende fort.

2) Bezeichnet n irgend einen positiven oder negativen Bruch, ist z. B. $n = \frac{p}{m}$; so erhalten wir durch bloße Substitution

$$(a+b)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(a+b)^p} = a^{\frac{p}{m}} + \frac{p}{m}\,a^{\frac{p}{m}-1}\,b +$$
$$+ \frac{\frac{p}{m}\left(\frac{p}{m}-1\right)}{1\cdot 2}\,a^{\frac{p}{m}-2}\,b^2 + \frac{\frac{p}{m}\left(\frac{p}{m}-1\right)\left(\frac{p}{m}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{\frac{p}{m}-3}\,b^3 +$$
$$+ \frac{\frac{p}{m}\left(\frac{p}{m}-1\right)\left(\frac{p}{m}-2\right)\left(\frac{p}{m}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,a^{\frac{p}{m}-4}\,b^4 + \ldots$$
$$= a^{\frac{p}{m}}\left[1 + \frac{p}{m}\cdot\frac{b}{a} + \frac{p(p-m)}{1\cdot 2\cdot m^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{p(p-m)(p-2m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p-m)(p-2m)(p-3m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot m^4}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \ldots.\right],$$
$$= \sqrt[m]{a^p}\left[1 + \frac{p}{m}\cdot\frac{b}{a} - \frac{p(m-p)}{1\cdot 2\cdot m^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{p(m-p)(2m-p)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^3}\cdot\frac{b^3}{a^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{p(m-p)(2m-p)(3m-p)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot m^4}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \ldots.\right].$$

Digitized by Google

Da hier p kein Vielfaches von m seyn soll, wie wir voraussetzen, so kann auch der Unterschied zwischen irgend einem Vielfachen vom m und p nie Null werden; also geht auch hier die Reihe ins Unendliche fort.

3) Setzen wir in der letzten Reihe $a = A^m$, also $a^p = A^{mp}$ und $\sqrt[m]{a^p} = A^p$, und $b = \pm x$, mithin $\frac{b}{a} = \frac{\pm x}{A^m}$, so erhalten wir durch Substitution

$$(A^m \pm x)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(A^m \pm x)^p} = A^p \left[1 + \frac{p}{m}\frac{\pm x}{A^m} - \right.$$
$$- \frac{p(m-p)}{1.2.m^2} \cdot \frac{x^2}{A^{2m}} + \frac{p(m-p)(2m-p)}{1.2.3.m^3} \cdot \frac{\pm x^3}{A^{3m}} -$$
$$\left. - \frac{p(m-p)(2m-p)(3m-p)}{1.2.3.4.m^4} \cdot \frac{x^4}{A^{4m}} + \ldots \right],$$
$$= A^p \left[1 \pm \frac{p}{m} \cdot \frac{x}{A^m} - \frac{p(m-p)}{1.2.m^2} \cdot \frac{x^2}{A^{2m}} \pm \frac{p(m-p)(pm-p)}{1.2.3.m^3} \cdot \frac{x^3}{A^{3m}} - \right.$$
$$\left. - \frac{p(m-p)(2m-p)(3m-p)}{1.2.3.4.m^4} \cdot \frac{x^4}{A^{4m}} \pm \ldots \right],$$

Für $m = 2$ und $p = 1$ geht diese Formel über in folgende:

$$A) \quad \sqrt{A^2 \pm x} = A \left[1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{A^2} - \frac{1}{2.2^2} \cdot \frac{x^2}{A^4} \pm \right.$$
$$\pm \frac{1.3}{2.3.2^3} \cdot \frac{x^3}{A^6} - \frac{1.3.5}{2.3.4.2^4} \cdot \frac{x^4}{A^8} \pm \frac{1.3.5.7}{2.3.4.5.2^5} \cdot \frac{x^5}{A^{10}} -$$
$$\left. - \frac{1.3.5.7.9}{2.3.4.5.6.2^6} \cdot \frac{x^6}{A^{12}} \pm \ldots \right],$$
$$= A \pm \frac{x}{2A} - \frac{x^2}{2^3A^3} \pm \frac{x^3}{2^4.A^5} - \frac{5.x^4}{2^7.A^7} \pm \frac{7.x^5}{2^8A^9} - \frac{3.7.x^6}{2^{10}.A^{11}} \pm \ldots\ldots$$

Ist x gegen A sehr klein, so nimmt diese Reihe so schnell ab, daß man nur einige Glieder derselben zu entwickeln braucht, um die Quadratwurzel aus $(A^2 \pm x) = N$ näherungsweise auf mehrere Decimal-Stellen genau zu erhalten. Zur Erläuterung diene folgendes Beyspiel:

Um nach dieser Formel die Quadratwurzel aus der Zahl 143 mit 7 Decimalen genau zu berechnen, setze man

$\sqrt{143} = \sqrt{144-1} = \sqrt{12^2-1}$, mithin $A = 12$ und $x = 1$, folglich ist

$$\sqrt{143} = \sqrt{12^2-1} = 12 - \frac{1}{2.12} - \frac{1}{2^3.12^3} - \frac{1}{2^4.12^5} - \frac{5}{2^7.12^7} - \ldots$$
$$= 12 - \left(\frac{1}{2.12} + \frac{1}{2^3.12^3} + \frac{1}{2^4.12^5} + \ldots\right).$$

Digitized by Google

Nun ist $\frac{1}{2.12} = 0{\cdot}04166666\ldots$

$\frac{1}{2^3.12^3} = 0{\cdot}00007233\ldots$

$\frac{1}{2^4.12^5} = 0{\cdot}00000025\ldots$, das folgende Glied gibt erst in der neunten Decimal-Stelle eine bedeutende Ziffer, also ist

Summe $= 0{\cdot}04173924$,

und $\sqrt{143} = 12 - 0{\cdot}04173924\ldots = 11{\cdot}95826076\ldots = 11{\cdot}9582608$.

Für $p=1$ und $m=3$ geht die obige allgemeine Formel über in die folgende:

$$B)\quad \sqrt[3]{(A^3 \pm x)} = A\left[1 \pm \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{A^3} - \frac{1}{3^2}\cdot\frac{x^2}{A^6} \pm \frac{5}{3^4}\cdot\frac{x^3}{A^9} - \right.$$
$$\left. - \frac{2.5}{3^5}\cdot\frac{x^4}{A^{12}} \pm \frac{2.11}{3^6}\cdot\frac{x^5}{A^{15}} - \ldots\ldots\right],$$
$$= A \pm \frac{x}{3A^2} - \frac{x^2}{3^2.A^5} \pm \frac{5.x^3}{3^3.A^8} - \frac{2.5.x^4}{3^5.A^{11}} \pm \frac{2.11.x^5}{3^6.A^{14}} - \ldots\ldots$$

Je kleiner nun x gegen A ist, desto schneller convergirt diese Reihe, d. h. desto schneller nimmt die Reihe ab, und desto weniger Glieder braucht man demnach zu entwickeln, um die Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl bis auf eine bestimmte Decimal-Stelle genau zu erhalten. Um z. B. $\sqrt{513}$ mit 7 Decimalen nach dieser Formel zu berechnen, setze man $A = 8$, also $A^3 = 8^3 = 512$, mithin $x = 1$, so erhält man:

$$\sqrt[3]{513} = \sqrt[3]{8^3+1} = 8 + \frac{1}{3.8^2} - \frac{1}{3^2.8^5} + \frac{5}{3^4.8^8} - \frac{2.5.}{3^5.8^{11}} + \ldots.$$
$$= 8 + \frac{1}{3.8^2} + \frac{5}{3^4.8^8} + \ldots - \left(\frac{1}{3^2.8^5} + \frac{2.5}{3^5.8^{11}} + \ldots\right).$$

Nun ist $\frac{1}{3.8^2} = 0{\cdot}00520833\ldots$; $\frac{1}{3^2.8^5} = 0{\cdot}00000339\ldots$

$\frac{5}{3^4.8^8} = 0{\cdot}00000003\ldots$, das nächste Glied gibt in der achten Decimal-Stelle nichts mehr,

also Summe $= 8{\cdot}00520836\ldots$

$-\frac{1}{3^2 8^5} = -\ 0{\cdot}00000339\ldots$

mithin $\sqrt{513} = 8{\cdot}00520497 = 8{\cdot}0052050$.

Digitized by Google

Zusatz 5.

Mit Hülfe der Binomial-Formel läßt sich auch jede mehrgliedrige Größe auf was immer für eine Potenz erheben. Es sey z. B. $(a+b+c+d+\ldots)^n$ zu entwickeln. Man setze Kürze halber

$$\left.\begin{array}{l} A = a+b+c+d+\ldots \\ B = b+c+d+\ldots \\ C = c+d+\ldots \\ D = d+\ldots \end{array}\right\} \text{ so ist } A = a+B = a+b+C = a+b+c+D = \text{ꝛc., mithin}$$

$$A^n = (a+b+c+d+..)^n = (a+B)^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} B + \frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2} a^{n-2} B^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{n-3} B^3 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,\,(p-1)\,p} a^{n-p} B^p + \ldots$$

In dieser Formel kommen lauter Potenzen von B mit ganzen positiven Exponenten vor, welche auf dieselbe Art nach der Binomial-Formel entwickelt werden können, und dann in der letzten Reihe substituirt werden müssen.

Es ist nähmlich

$$B^p = (b+C)^p = b^p + p\,.\,b^{p-1} C + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} b^{p-2} C^2 + \ldots$$

$$+ \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\,(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(q-1)\,q} b^{p-q} C^q + \ldots.$$

$$C^q = (c+D)^q = c^q + q\,.\,c^{q-1} D + \frac{q(q-1)}{1\,.\,2} c^{q-2} D^2 + \ldots$$

$$+ \frac{q\,(q-1)\,(q-2)\ldots\,(q-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,\,(r-1)\,r} c^{q-r} D^r + \ldots. \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 6.

Wenn $\sqrt[m]{N}$ zwischen a und $a+1$ fällt, wo a was immer für eine ganze positive Zahl bezeichnet; so läßt sich für $\sqrt[m]{N}$ eine Näherungsformel auf folgende Art bestimmen.

Man setze $\sqrt[m]{N} = a+x$, wo $x<1$; so folgt hieraus

$$N = (a+x)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} a^{m-2}\,x^2 +$$

$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{m-3}\,x^3 + \ldots..$$

Weil nun die höhern Potenzen von x immer kleiner und kleiner werden, so kann man dieselben ohne bedeutenden Fehler vernachläßigen,

Digitized by Google

und zwar um so eher, da wir ohnehin nur einen Näherungswerth suchen; wir setzen nähmlich näherungsweise $N = a^m + m a^{m-1} x$, mithin $N - a^m = m a^{m-1} x$, und $x = \frac{N - a^m}{m a^{m-1}}$, welcher Werth in der Gleichung $\sqrt[m]{N} = a + x$ substituirt folgende gibt:

$$\sqrt[m]{N} = a + \frac{N - a^m}{m a^{m-1}} = \frac{m a^m + N - a^m}{m a^{m-1}} = \frac{N + (m-1) a^m}{m a^{m-1}}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \left[\frac{N}{a^{m-1}} + (m-1) a \right].$$

Diese Formel wird den Werth von $\sqrt[m]{N}$ um so genauer geben, wenn a selbst schon einen Näherungswerth bezeichnet, d. h. wenn a den Werth von $\sqrt[m]{N}$ schon auf einige Decimal-Stellen genau ausdrückt.

Für $m = 2$ erhalten wir eine Näherungsformel für die Quadratwurzeln, nähmlich $\sqrt{N} = \frac{1}{2} \left[\frac{N}{a} + a \right]$, und für $m = 3$ wird $\sqrt[3]{N} = \frac{1}{3} \left[\frac{N}{a^2} + 2a \right]$, welche Formeln der Anfänger sich leicht in die gewöhnliche Wortsprache übersetzen kann.

Die obige Formel $\sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \left[\frac{N}{a^{m-1}} + (m-1) a \right]$ enthält im Allgemeinen die vom Herrn Prof. Kuar kürzlich bekannt gemachte Methode, von welcher der §. 137 ein besonderer Fall ist.

Digitized by Google

Zweyte Abtheilung,

enthält

das Rechnen in benannten Zahlen, die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen nebst ihren Anwendungen, das Nöthigste aus der Lehre von den Logarithmen, die Gleichungen des ersten und zweyten Grades, und die Lehre von den Progressionen sammt der Anwendung derselben auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

Digitized by Google

Digitized by Google

Achtes Kapitel.

Von der Rechnung mit benannten Zahlen.

§. 142.

1) Jede Zahl, bey welcher nebst ihrer Größe auch noch die Eigenschaft der Einheit, auf welche sie bezogen wird, bestimmt ist, heißt eine benannte Zahl (§. 4.). So z. B. sind 3 Thaler, 4 Gulden, 5 Pfund, 6 Ellen u. s. w. benannte Zahlen.

Die benannten Zahlen werden also immer auf bestimmte Einheiten bezogen, welches bey den unbenannten Zahlen der Fall nicht ist.

2) Man theilt die Einheiten, auf welche die benannten Zahlen bezogen werden, im bürgerlichen Leben in Einheiten von höherer und niedrigerer Art, Ordnung oder Benennung ein; so ist z. B.

ein Thaler = 30 Groschen = 90 Kreuzer,
ein Gulden = 20 Groschen = 60 Kreuzer,
ein Zentner = 100 Pfund,
ein Pfund = 32 Loth,
ein Loth = 4 Quentchen,
eine Klafter = 6 Fuß oder Schuh,
ein Fuß = 12 Zoll,
ein Zoll = 12 Linien,
u. s. w.

Also sind die Einheiten einer höheren Ordnung lauter Vielfache der Einheiten der entsprechenden niedrigern Art.

3) Eine benannte Zahl, die bloß Einheiten von einerley Art enthält, wie z. B. 5 Ducaten, heißt eine einfache benannte Zahl; eine Größe aber, worin Einheiten von verschiedener Art, also von höheren und niedrigeren Benennungen (aber von einerley Gattung) vorkommen, wie z. B. 18 Zentner, 47 Pfund, 23 Loth, 3 Quentchen, heißt eine zusammengesetzte benannte Zahl, oder auch eine mehrnahmige Zahl.

8 Pfund, 12 Ellen, 13 Kreuzer sind also keine mehrnahmige

Digitized by Google

Zahl, weil die einzelnen Theile verschiedenen Gattungen von Größen angehören.

4) Zahlen oder Einheiten einer niedrigern Ordnung auf Einheiten von höherer Benennung bringen, z. B. Kreuzer auf Gulden, Lothe auf Pfunde, u. s. w. heißt zurückführen oder reduciren. Das umgekehrte Verfahren, nähmlich die Verwandlung der Einheiten höherer Benennung in Einheiten der niedrigern Ordnung nennt man auflösen oder resolviren. Daß die Reduction durch Division, die Auflösung aber durch Multiplication verrichtet werden müsse, leuchtet schon aus (Nro. 2) ein.

Die Zahlen, welche angeben, wie viel Einheiten einer niedrigern Benennung eine Einheit der höhern Art machen, nennt man Reductions- oder Auflösungszahlen. Um in benannten Zahlen rechnen zu können, ist es nöthig, diese Reductions-Zahlen zu kennen, weßhalb wir diejenigen, welche sich auf die in unserem Vaterlande üblichen Maße, Gewichte und Münzen beziehen, hier kurz angeben wollen.

I. Vom Längenmaße.

§. 143.

Zur Bestimmung der Längen bedient man sich der Klafter, des Fußes u. s. w., der Elle und der Meile.

Die Klafter wird in 6 Fuß oder Schuh eingetheilt, der bürgerliche Fuß (Werkschuh) in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Puncte oder Skrupel. — Diese Eintheilung nennt man das Duodecimal-Maß.

Der geometrische Fuß wird in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien u. s. w. eingetheilt, obgleich der geometrische Fuß mit dem Werkschuh einerley absolute Länge hat. Diese Eintheilung nennt man das Decimal-Maß.

Statt zu schreiben: a Klafter, b Fuß, c Zoll, d Linien, e Punkte, setzt man kurz: a^{o}, b^{I}, c^{II}, d^{III}, e^{IV}. Bezeichnet eine dieser Größen einen Decimal-Bruch, so setzt man das für die Benennung angenommene Zeichen rechts über die Ziffer der primitiven Einheiten. Statt 38·459 Klafter z. B. schreibt man also $38^{o}\,459$, und statt 0·85 Fuß setzt man $0^{I}\cdot 85$.

Die Wiener Elle wird eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$ Ellen.

Digitized by Google

Es sind 1000 Wiener Ellen = 2465 Wiener Fuß, also 1 Wiener Elle = 2·465 Wien. Fuß.

Die österreichische Postmeile hat 4000 Wiener Klafter, und 14·646 solche Meilen gehen auf einen Grad des Meridians.

Die Faust, wornach die Höhe der Pferde gemessen wird, hat 4 Wiener Zoll.

Zusatz.

Der	Böhmische	Fuß ist	= 0·93767	Wiener	Fuß
»	Mährische	» »	= 0·93617	»	»
»	Schlesische	» »	= 0·91550	»	»
»	Tyroler	» »	= 1·05700	»	»
»	Mantuaner	» »	= 1·47152	»	»
»	Krakauer	» »	= 1·12754	»	»
»	Nürnberger	Stadtfuß	= 0·96127	»	»
»	»	Artill. »	= 0·92650	»	»

Die Oberösterreichische Elle ist = 1·02637 Wien. Ellen, und die Wiener Elle ist = 0·97430 Oberöstr. Ellen.

II. Vom Flächenmaße.

§. 144.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes bedient man sich eines Quadrates als Einheit, d. i. einer ebenen Fläche, die von vier gleichen Linien (Seiten) so eingeschlossen wird, daß die von ihnen gebildeten Winkel einander gleich sind. Je nachdem nun jede der einschließenden Seiten eine Klafter, einen Schuh, einen Zoll u. s. w. lang ist, heißt jene Fläche eine Quadratklafter, ein Quadratfuß, Quadratzoll u. s. w. Man bezeichnet diese Einheiten der Ordnung nach mit $\square^{\circ}$, $\square'$, $\square''$, $\square'''$ u. s. w.

Die Quadratklafter enthält 6.6=36 Quadratschuh, der Quadratfuß 12.12=144 Quadratzoll, der Quadratzoll 144 Quadratlinien u. s. w.

Nach dem Decimal-Maße aber ist $1\ \square' = 100\ \square''$, $1\ \square'' = 100\ \square'''$, $1\ \square''' = 100\ \square^{IV}$, u. s. w. Eine Quadratmeile enthält 16000000 $(=4000^2)\ \square^{\circ}$.

Ein Österreichisches Joch ist = 1600 $\square^{\circ}$, folglich 10,000 Joch = 1 Quadratmeile.

Digitized by Google

Zusatz.

Im bürgerlichen Leben theilt man oft die Quadratklafter in 6 gleiche Theile, und nennt jeden solchen Theil einen Quadratklafterschuh oder Riemenschuh. Dieser ist also eine vierseitige ebene Fläche (Figur), welche 1° lang und 1′ breit oder hoch ist, und enthält demnach 6□′.

Theilt man einen Quadratklafterschuh in 12 gleiche Theile, deren jeder 1° lang und 1″ breit ist, so nennt man sie Quadratklafterzolle. Eben so wird auch der Quadratklafterzoll in 12 Quadratklafterlinien, die Quadratklafterlinie in 12 Quadratklafterpuncte, u. s. f. eingetheilt. Theilt man den Quadratschuh in 12 gleiche Theile, deren jeder einen Schuh lang und einen Zoll hoch ist, so nennt man jeden solchen Theil einen Schuhzoll, welcher auf dieselbe Art in 12 Schuhlinien eingetheilt wird, u. s. w.

III. Vom Körpermaße.

§. 145.

1) Zur Bestimmung der Größe eines Körpers (des Kubikinhaltes) bedient man sich eines Würfels (Cubus), d. i. eines Körpers, dessen Länge, Breite (Dicke) und Höhe einander gleich sind, oder wie man sich kürzer auszudrücken pflegt: dessen drey Abmessungen (Dimensionen) einander gleich sind. — Der Würfel ist von 6 gleichen Quadraten eingeschlossen.

Je nachdem eine Abmessung des Würfels eine Meile, eine Klafter, ein Schuh oder ein Zoll u. s. w. ist, heißt der Würfel selbst eine Kubikmeile, eine Kubikklafter, ein Kubikfuß oder ein Kubikzoll u. s. w.

Die Kubikmeile, deren man sich bey der Bestimmung der größten Körper, z. B. der Himmelskörper bedient, enthält $4000^3 =$
$= 64000000000$ Kubikklafter.

Eine Kubikklafter ist $(= 6^3) = 216$ Kubikfuß,
ein Kubikfuß » $(= 12^3) = 1728$ Kubikzoll,
ein Kubikzoll » $(= 12^3) = 1728$ Kubiklinien,
u. s. w.

Nach der zehntheiligen Eintheilung (Decimal-Maß) aber ist
ein Kubikfuß $(= 10^3) = 1000$ Kubikzoll,
ein Kubikzoll $(= 10^3) = 1000$ Kubiklinien, u. s. w.

Digitized by Google

Man theilt auch die Kubikklafter in 6 Kubikklafterschuh, einen Kubikklafterschuh in 12 Kubikklafterzoll, einen Kubikklafterzoll in 12 Kubikklafterlinien, u. s. w. Der Kubikklafterschuh ist also ein Körper, der 1° lang, 1° breit, und 1′ hoch ist, oder dessen Grundfläche 1 □°, und dessen Höhe 1′ beträgt. — Dieses Maß nennt man das Schichtenmaß.

2) Zum Körpermaße gehört auch das sogenannte Hohlmaß, mit welchem das Getreide oder überhaupt trockne Waaren und die Flüssigkeiten gemessen werden.

Das größte Maß, mit welchem das Getreide gemessen wird, ist die Muth, welche in 30 Metzen getheilt wird. Man theilt die Metze in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ ab, und das Achtel in 4 große Maßel, ein großes Maßel in 2 kleine Maßel, und das kleine Maßel in 2 Becher.

Der Kalk wird mit Mittel gemessen, welches $2\frac{1}{2}$ Metzen beträgt. Der Muid Kalk hält in der Gegend um Wien 30 Metzen oder 60 Kubikschuh; ein Eimer Kalk = 2 Kubikfuß.

Die Kohlen werden mit Stibich gemessen; ein Stibich ist = 2 Metzen.

Für die Flüssigkeiten hat man folgende Maße:

Das Fuder = 32 Eimern,
der Dreyling = 30 Eimern,
das Faß = 10 Eimern,
der Eimer = 40 Maß, die Maß = 2 Halben, die Halbe = 2 Seiteln, das Seitel = 2 Pfiffen; 3 Pfiff machen ein großes Seitel.

Zusatz.

Die Wiener Metze ist = 1·9471 Wiener Kubikfuß,
der Wiener Eimer ist = 1·792 » »

IV. Vom Gewichte.

§. 146.

Viele Körper werden durch das Gewicht bestimmt. Die Art und Weise wie dieß möglich sey, werden wir später kennen lernen. In Wien sind folgende fünf Gewichte üblich:

A) Das Mark- oder Münzgewicht, auch Valvations-Gewicht genannt, welches man beym Münzwesen, beym Abwägen

Digitized by Google

des Silbers und der davon verfertigten Sachen gebraucht. Das Valvations-Gewicht dient zur Regulirung der übrigen Gewichte. Das Wiener Münz- und Silberwaarengewicht ist die Mark von 16 Loth = 64 Quentchen = 256 Pfennigen = 4824 Mändel Gewichts-Grän = 65536 Richtpfennigen, und wiegt so schwer als $80^{2}/_{5}$ Ducaten.

5 Wiener Mark sind = 6 Köllnischen Mark.

B) Das Goldwaaren- und Ducatengewicht ist der Ducaten, wovon $80^{2}/_{5}$ auf die Wiener, und 67 auf die Köllnische Mark gehen. Der Ducaten wird in 60 Grän getheilt, und wiegt $815\frac{25}{101}$ Wiener Richtpf. = 815·124378... Wien. Richtpf.

C) Das Apotheker-Gewicht. Das Apothekerpfund wird in 12 Unzen getheilt (deren jede 2 Loth vom Wiener Handelsgewicht beträgt). Die Unze wird in 8 Drachmen, eine Drachme in 3 Skrupel, und eine Skrupel in 20 Grän getheilt.

D) Das Juwelengewicht. Als Einheit dieses Gewichtes dient der Karat, welcher 48·25 Wiener Richtpfennige Münzgewicht wiegt, und in 4 Grän getheilt wird.

E) Das Handelsgewicht, auch Krämergewicht genannt, welches gewöhnlich im Handel gebraucht wird. Hievon hat ein Zentner 100 Pfund, das Pfund hat 32 Loth, das Loth 4 Quintel oder Quentchen, und das Quentchen theilt man noch in 4 Sechszehntel oder 60 Grän. Das Chokolade-Pfund hält nur 28 Loth vom Handelsgewichte.

Der Saum Stahl zu (à) 2 Lagel hält 250 Pfund (℔). Eine Bürde Stahl wiegt 100 ℔. — 1 Stein hält 20 Pfund, 1 Karch aber 400 Pfund, und 1 Meiler 1000 Pfund.

Zusatz 1.

Die Köllnische Mark, deren man sich zum Ausmünzungsgewicht des Goldes und Silbers in Deutschland allgemein bedient, enthält 1 Mark à 8 Unzen = 16 Loth = 24 Karat = 64 Quentchen = 256 Pfennigen = 288 Grän = 512 Heller = 4352 Eßchen = 65536 Richtpfennigen.

Beym Probiren des Goldes theilt man die sogenannte verjüngte oder symbolische Mark in 24 Karat, und den Karat in 12 Grän; beym Probiren des Silbers aber wird die Mark in 16 Loth, und das Loth in 18 Grän getheilt. Eine verjüngte Mark beträgt 1 Pfennig oder 256 Richtpfennige des obigen Markgewichtes.

Digitized by Google

Die Kölln. Mark wiegt 4867·358 Holländiſche As, und man vergleicht gewöhnlich 61 Köllniſche Mark mit 58 Mark Holländiſchem Trois-Gewicht.

Die Wiener Mark wiegt 5840·83 Holl. As, und daher iſt die verjüngte Mark oder 1 Mark Gold- und Silber-Prüfungsgewicht = 22·817 Holl. As.

1 Mark Holl. Trois-Gewicht = 8 Unz. = 160 Engels = 640 Fierling = 1280 Troiskn = 2560 Deurskn = 5120 Aſen. Dieſe Mark iſt = 689850 Kölln. Richtpf.

Zuſatz 2.

Das Pfund Wien. Handelsgewicht iſt = 130774 Richtpfenn. = 11665·11 Holl. As. Alſo machen 2 Mark ſehr nahe 1 Pfund.

V. Vom Zeitmaße.

§. 147.

Im gemeinen Leben nimmt man bey Berechnungen gewiſſer Größen, z. B. der Zinſen, den Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen an.

Das mathematiſche Jahr hat 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 49 Secunden, und wird in 52 Wochen, oder in 12 Monate eingetheilt; die Woche hat 7 Tage, der Tag 24 Stunden, die Stunde 60 Minuten, die Minute 60 Secunden, die Secunde 60 Terzen. Würde das Sonnenjahr (die Zeit, innerhalb welcher die Erde ihre Bahn um die Sonne durchläuft) gerade 365 Tage, 6 Stunden haben; ſo wäre es hinlänglich, alle 4 Jahre einen Tag einzuſchalten, d. i. das vierte Jahr immer um einen Tag zu vermehren, wie es wirklich geſchieht. Ein ſolches Jahr von 366 Tagen nennt man Schaltjahr, jenes von 365 Tagen aber ein gemeines Jahr. — Im gemeinen Jahre hat der Februar 28, im Schaltjahre aber 29 Tage. Der April, Juny, September und November haben 30 Tage, der Januar, März, May, Julius, Auguſt, October und December aber haben 31 Tage.

Wenn man das Sonnenjahr gleich 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Minuten, 49 Secunden ſetzt, ſo begeht man einen Fehler, der in 100000 Jahren kaum einen Tag beträgt.

Der Tag bezeichnet die Zeit, binnen welcher ſich die Erde um ihre Achſe dreht.

Digitized by Google

Eine Lunation, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, beträgt 29 Tage, 12 Stunden, 44 Minuten, 3 Secunden.

Statt a Stunden, b Minuten, c Secunden, d Terzen, schreibt man kurz: a^h, b', c'', d''', oder a^o, b', c'', d'''.

VI. Von der Geldrechnung.

§. 148.

Das Zusammenschmelzen des Goldes und Silbers oder Kupfers, oder des Silbers und Kupfers, nennt man legiren oder beschicken.

Gold und Silber nennt man fein, wenn es keinen Zusatz von schlechterem Metalle hat. Die Mark fein bezeichnet daher eine Mark Goldes oder Silbers ohne Zusatz, die rauhe Mark aber eine Mark Gold oder Silber mit Zusatz. Die rauhe Mark heißt z. B. 12löthig oder 18karätig, wenn sie 12 Loth feines Silber und 4 Loth Zusatz, oder wenn sie 18 Karat feines Gold und 6 Karat Zusatz enthält.

Aus dem legirten oder beschickten edleren Metalle werden die Münzen geprägt. Das absolute Gewicht einer Münze heißt ihr Schrot, und ihr Gehalt an reinem Gold oder Silber ihr Korn. Durch den Münzfuß wird sowohl Schrot und Korn als auch der Kaufwerth einer Münze bestimmt. Der Münzfuß ist demnach die gesetzliche Regel, wie viel Stücke einer bestimmten Münzsorte auf die Mark fein gerechnet werden.

Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze verbürgt. Die Bildseite heißt die Hauptseite (avers); die Schrift- oder Wappenseite aber heißt die Rückseite (revers).

Die Prüfung der Münzen durch richtig legirte Probir- und Streichnadeln heißt Valvation.

Es gibt reelle, gangbare (ausgeprägte oder wirklich cursirende) und fingirte oder Rechnungsmünzen. Diese sind ein Maßstab des Kaufwerthes aller Dinge, also auch der geprägten Münzen. Solche Rechnungsmünzen sind z. B. in England das Pfund Sterling, in Deutschland der Reichsthaler.

Der Münzfuß war immer veränderlich. Für uns sind folgende die merkwürdigsten:

A) Im Golde.

1) Der rheinische Goldguldenfuß, 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat, 6 Grän Goldes und 3 Karat Silber. Nach diesem Fuße sind in Baiern die Carolinen und die Max'or geprägt.

Digitized by Google

Der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine kölnische Mark von 23 Karat, 8 Grän Gold und 2 Grän Silber.

B) Im Silber.

1) Nach dem alten Reichsfuße (auf dem Reichstage zu Augsburg im Jahre 1566 bestimmt) gingen 8 Reichsthaler auf die rauhe und 9 auf die feine Mark Silbers. Ein solcher Thaler heißt nach seinem Gewichte Uncialis, wie die jetzigen Speciesthaler.

2) Im Jahre 1596 prägte man 12 fl. 30 kr. aus der Mark fein, im Jahre 1623 aber 13 fl. 30 kr.

3) Im Jahre 1667 wurde zu Zinna im Magdeburgischen von Sachsen und Brandenburg der Zinnische Fuß eingeführt, nach welchem $10^1/_2$ Thaler auf die feine Mark gingen.

4) Im Jahre 1690 wurde in Sachsen, Brandenburg und Braunschweig der Leipziger Fuß eingeführt, nach welchem 12 Thaler auf die feine Mark Silbers gingen. Er wurde im Jahre 1733 zum allgemeinen Reichsfuße erhoben, ist aber jetzt nur noch in Churbraunschweig, im Hannöverischen und Schwedisch-Pommern im Gebrauche.

5) Im Jahre 1750 wurde in den Preußischen Staaten der Graumannische, oder 21 fl. Fuß angenommen, und 1764 erneuert. Nach ihm kommen 14 Reichsthaler auf die feine Mark.

6) Im Jahre 1753 wurde in Österreich, Baiern, und dann auch in Sachsen und Braunschweig der Conventions- oder 20 fl. Fuß eingeführt, nach welchem die feine Mark $13^1/_3$ Thaler enthält. Nach diesem Fuße beträgt, wenn man den Ducaten à 2 Thaler, 20 Gr., 8 Pf. rechnet, eine Mark fein Gold 188 Thlr., 17 Gr., 6 Pf. = 283 fl. 6 kr. $^{34}/_{71}$ Pf.

7) Nach dem neuern Reichs- oder sogenannten 24 fl. Fuß kommen auf die feine Mark 16 Reichsthlr. = 24 fl. rh. = 10 Conv. Thlr.

In Österreich ist noch der 20 fl. oder der Conventions-Fuß gültig. — Der vollwichtige Ducaten wird zu 4 fl. 30 kr. C. M. gerechnet, der Thaler zu 1 fl. 30 kr., 1 fl. à 60 kr. oder à 20 Groschen, 1 Gr. à 3 kr., 1 kr. à 2 halbe kr. oder à 4 Pfenn., 1 Pfenn. à 2 Heller. Im Umlaufe sind in Silber: Zwanziger (20 kr. Stücke), Zehner (10 kr. Stücke), Fünf- und Drey-Kreuzer-Stücke. Kreuzer und halbe Kreuzer sind in Kupfer ausgeprägt.

Digitized by Google

Vom metrischen Systeme und Vergleichung desselben mit dem alten französischen.

§. 149.

Das neue und gesetzliche Maß-, Gewichts- und Münz-System der Franzosen, welches man auch das natürliche System zu nennen pflegt, heißt metrisches System, weil alle Maße vom Meter (mètre) abhängen, welcher als Einheit des Längenmaßes angenommen ist. Diesem Systeme liegen folgende Maß-Einheiten zu Grunde:

1) Die Einheit des Längenmaßes heißt Meter (mètre);
2) Die Einheit des Flächenmaßes heißt are;
3) Die Einheit des Körpermaßes heißt stère;
4) Die Einheit des Hohlmaßes heißt litre;
5) Die Einheit des Gewichtes heißt gramme;
6) Die Münzeinheit wird Franc genannt;
7) Die Einheit des Winkelmaßes heißt Grad (degré), und endlich
8) Die Einheit des Zeitmaßes ist die Stunde.

Mit diesem neuen Maß- und Gewichts-System ist durchaus die Bequemlichkeit des decadischen Zahlen-Systems verbunden, wie aus dem Folgenden erhellen wird:

Um $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... der genannten Maß-Einheiten auszudrücken, setzt man den Benennungen jener Einheiten die lateinischen Worte déci (Zehntel), centi (Hundertel), milli (Tausentel) vor. So bezeichnet z. B. décimètre $^1/_{10}$ mètre, centilitre $^1/_{100}$ litre, milligramme $^1/_{1000}$ gramme u. s. f. Um aber das Zehn-, Hundert-, Tausendfache jener Einheiten zu bezeichnen, setzt man ihren Benennungen die griechischen Worte déca (10), hecto (100), kilo (1000), myria (10,000), vor. So z. B. ist 1 décagramme = 10 grammes, 1 hectolitre = 100 litres, 1 kilomètre = 1000 mètres, und 1 myriare = 10000 ares.

a. Vom Längenmaße.

Der Meter ist der zehnmillionste Theil des Erd-Meridianquadranten, oder des Abstandes des Poles vom Äquator, und ist die Einheit des Längenmaßes. (Eine Länge von 2 Meter heißt Toise, welche man in 6 Fuß, den Fuß in 12 Zoll, und den Zoll in 12 Linien theilt. Dieses Maß und seine Eintheilung wird in Frankreich geduldet.)

Digitized by Google

Der Gebrauch eines Maßstabes von 12 Decimetern ist erlaubt, und heißt Elle, welche in $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$,.... getheilt wird. 12 mètres machen 10 metrische Ellen. Eine alte Elle ist = 1·18845 mètres.

Der Decameter, oder 10 Meter ist die Länge der Meßkette.

Die Entfernungen der Orte von einander werden durch den Kilometer (1000 mètres) bestimmt, und dieser beträgt beynahe $^1/_4$ Postmeile. Größere Entfernungen werden durch den Myriameter (10,000 mètres) gemessen, und dieser beträgt ungefähr $2^1/_2$ Postmeile, welche Entfernung man schlechtweg Post nennt. Der Umfang der Erde beträgt 9000 gemeine französische Meilen, deren 25 auf einen Grad gehen. Weil der Meter ·0000001 des Meridianquadranten beträgt; so ist die Länge des ganzen Meridians, oder Umfanges der Erde = 40000000 mètres = 4000 myriamètres = 9000 Meilen, also 4 Myriameter = 9 Meilen, und 1 Myriameter = $2^1/_4$ Meile, deren 25 auf den Grad gehen.

Die gemeine französische Meile ist weit größer, als die Postmeile. Eine Postmeile ist = 2000 alte Toisen, und die Meile, deren 25 auf einen Grad gehen, ist = 2280·33 Toisen, nach dem definitiven Meter. Die Seemeile, deren 20 auf einen Grad gehen, beträgt 2850·41 Toisen. Der alte königliche Fuß von 12 Zoll à 12 Linien, ist = $^1/_6$ der alten Toise; = 0·32484 mètres, und 1 mètre = 3′, 11‴ 296 des alten Maßes, = 443·295936 Par. Linien, = 3·078444 Fuß genau.

Eine alte Meile ist 4·4444 Kilometer.
Eine alte Seemeile 5·5556 Kilometer.
Eine alte Toise 1·94904 Meter.

b. Vom Flächenmaße.

Die Einheit des Flächenmaßes ist die Are, oder der quadrirte Decameter, d. i. ein Quadrat, dessen jede Seite = 10 Meter. — Also ist die Are = 100 □ Meter.

Die Centiare ist der quadrirte Meter; die hectare ist der quadrirte hectomètre (ein Quadrat, dessen jede Seite = 1 hectomètre = 100 mètres), welcher der metrische Morgen oder Joch (l'arpent métrique) ist.

40 hectares machen 117 alte Pariser Morgen, den Morgen à 100 □ Ruthen (Toises), also 40 ares = 117 Par. □ Ruthen.

Digitized by Google

19 □ mètres = 5 □ Toises des alten Maßes;

1 Are = 26·3244929476 □ Toises des alten Maßes;

= 947·682 alt Par. Quadratfuß;

also 1 □ mètre = 0·2632449295 alte □ Toises = 9·47682 alte □ Fuß.

1 alt Par. Morgen von 48400 Par. □ Fuß ist = 51·072 ares = 0·51072 hectares = 0·341887 hectares de Paris.

1 alte königl. Quadratruthe von 484 Par. □ Fuß = 0·51072 ares = 51·072 □ mètres.

1 alt Par. Quadratfuß ist = 0·00105520656 ares = 0·105520656 □ mètres.

1 alte Par. Quadrattoise ist = 3·798744 □ mètres.

c. Vom Körpermaße.

Der Ster (Stère) oder der kubirte Meter (ein Würfel, dessen jede Dimension = 1 mètre) dient zum Ausmessen größerer Körper, z. B. des Holzes. Die Eintheilungen des Sters sind nicht gebräuchlich.

96 Stères machen 25 Par. Klafter Holz.

1 Stère = 29·1738519 alte Par. Kubikfuß.

1 alter Par. Kubikfuß = 34·2772701 Milliſter = 0·03427727 Stères.

1 alte Par. Kubiktoise = 7·40389 Kub. mètres.

Der Litre (pinte) ist die Einheit des Hohlmaßes zu trockenen und flüssigen Waaren, und ist ein Würfel, dessen jede Seite einen Decimeter ($^1/_{10}$ mètre) beträgt. Der Litre ist also = $^1/_{1000}$ mètre cube = 1 Millistère = 1·07374688 alte Par. Wein-Pintes.

= 50·412416 alte Par. Kubikzoll.

Zur Erleichterung des Verkehrs wird auch die Eintheilung des Liters in $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ geduldet.

Der einfache und der doppelte Decaliter (10 Litres = 1 Centistère) dient als Getreidemaß. Vorzüglich gebraucht man den Hectoliter (100 Litres) zum Messen trockener und flüssiger Waaren. Man theilt im gemeinen Leben den Hectolitre in $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$.

Man nennt den $^1/_4$ Hectolitre double boisseau, $^2/_3$ Hectolitre also boisseau, und $^1/_{16}$ Hectolitre demiboisseau u. s. w.

Der Kilolitre und Myrialitre werden nur bey der Ausmessung sehr großer Körper gebraucht.

Digitized by Google

d. Vom Gewichte.

Die Einheit des Gewichtes heißt Gramme, und ist das absolute Gewicht des destillirten Wassers (im Zustande seiner größten Verdichtung), dessen Raumesinhalt einen kubirten Centimeter oder einen Milliliter beträgt. Also wiegt ein Liter desselben Wassers ein Kilogramme (1000 Grammes). Das Kilogramme ist das metrische Pfund, und ein halbes Kilogramme ist das gemeine (bürgerliche) Pfund.

Das Pfund (livre) wird in 16 Unzen, 1 Unze in 8 Gros (Quentchen), 1 Gros in 72 Grains (Gran) getheilt. Übrigens ist diese Eintheilung des Gewichtes nicht gesetzlich, sondern wird in Frankreich bloß geduldet.

Das Gramme beträgt beyläufig 19 Grain, das Decigramme ist etwas kleiner als 2 Gran. Das Milligramme ($^1/_{1000}$ Gramm) wird gewöhnlich zur Vergleichung der fremden Gewichte gebraucht.

Hundert Kilogrammes oder zehn Myriagramme machen 1 metrischen Zentner (Quintal), und $^1/_2$ metrischer Zentner (oder 50 Kilogrammes) ist ein gemeiner Zentner. Das Kilogramme oder das metrische Pfund ist = 10 Hectogrammes (Onces, Unzen) = 100 Décagrammes (Gros, Quentchen) = 1000 Grammes (oder Deniers) = 10000 Décigrammes (Grains) = 100000 Centigrammes = 1000000 Milligrammes.

Der Millier oder Tonneau de mer ist = 1000000 Grammes = 1000 Kilogrammes = 10 Quintaux (Zentner).

Es ist 1 Kilogramme = 2·042876 alt Par. Pfd. Markgewicht,
= 4·085752 alt Par. Markgewicht,
1 Gramme = 18·827150 Grains alt Par. Markgewicht.

1 Pfd. alt Par. Markgewicht von 9216 alt franz. Grains = = 489·505866 Grammes.

1 Mark alt Par. Markgewicht von 4608 alt. franz. Grains = = 244·752933 Grammes.

1 Karat Juwelengewicht von 4 franz. Grains = 2·044913 Milligrammes.

Ein Grain Markgewicht alt franz. = 53·114783 7 Milligramm.

Bey dem neu französischen Probiergewicht zum Gold und Silber beym Münzwesen wird die Einheit oder das Ganze (Gramme) in Décimes, Centimes und Millimes, oder in 10, 100 und 1000 gleiche Theile getheilt.

Digitized by Google

Bey dem alt franz. Gold- und Silber-Probegewicht wird das Ganze oder 1 Mark zu 24 Karat (à 32 gleiche Theile) fein Gold, und zu 12 Deniers (à 24 Grains) fein Silber vertheilt. Es ist 1 Décime neu franz. Probe = 2·4 Karat alt franz. Probe in Gold,

= 1 Denier 4·8 Grains alt franz. Probe in Silber,

= 2 Karat 4·8 Grän kölnische Probe in Gold,

= 1 Loth 10·8 Grän kölln. Probe in Silber.

Es ist 1 Gramme = 280·242 kölnische Richtpf.

1 Kilogramme = 280·242 » »

Das alte franz. Troygewicht, oder Poids de Marc, wird auf folgende Art vertheilt:

1 Livre (Pfund) = 2 Marcs = 16 Onces (Unzen) = 128 Gros (Quentchen),

= 384 Deniers = 9216 Grains = 221184 Primes.

Man setzt 70 Kilogrammes = 143 livres (poids de marc),

11 Hectogrammes = 36 Onces
13 Décagrammes = 34 Gros
14 Grammes = 11 Deniers
8 Décigrammes = 15 Grains

} des alten Markgewichtes.

c. Von den Münzen.

Die Münzeinheit ist eine Silbermünze, franc d'argent genannt, welcher 5 Grammes (oder 1401 kölln. Richtpf. = 104 holl. Aß) wiegt, aber nur 4·5 Grammes fein Silber enthält. Man theilt ihn in 10 Décimes oder 100 Centimes. Ehemahls rechnete man nach livres zu 20 sols à 12 deniers tourn. Nach den Bestimmungen der franz. Regierung ist 1 franc = 1 livre, 3 deniers, oder 80 francs = 81 livres.

Man rechnet 52·2315 francs auf 1 kölln. Mark fein Silber

und 52·92825 livres » » » » »

Man hat auch 2 Franken- und 5 Frankenstücke von Silber, ferner 40 Frankenstücke und 20 Frankenstücke von Gold; erstere wiegen 12·8 Grammes, und halten 11·52 Grammes fein Gold, letztere betragen die Hälfte.

Das 40 Frankenstück ist also = 9 Reichsthaler, 17 Groschen, 3 Pf. in Passier-Pistolen à 5 Rthlr. = 15 fl., 3·66 kr. in Ducaten à 4 fl. 30 kr. Conv. M.

Digitized by Google

Das 20 Frankenstück = 4 Rthlr. 20 Groschen $7^1/_2$ Pf. in Passier-Pistolen à 5 Rthlr. = 7 fl. 31 83 kr. Conv. M.

Es ist 1 Silberfrank = 23 kr. 0·35 Pf. = 23·0875 kr. C. M.

Vergleichung des österreichischen Maß-, Gewichts- und Münz-Systemes mit dem metrischen und dem alten französischen Systeme.

§. 150.

Längenmaß.

1 deutsche oder geographische Meile = 7·407407 Kilomètres,

1 österreichische Meile von 4000 Kl. = 7·58645192 Kilomètres,
14·646 österr. Meilen = 1 Grad des Meridians.

1 Wiener Elle ist = 0·7791918 mètres = 345·41257 Par. Lin.

1 » Fuß » = 0·31610216 » = 140·1268 » »

1 alte Par. Elle (Aune) = 526·8333 Par. Linien. = 1·52523 Wiener Ellen.

1 alt Par. Fuß (pied du Roi) = 144 Par. Linien = 1·0276406 Wiener Fuß.

1 mètre = 3·078444 alt Par. Fuß = 1·283381 Wien. Ellen.
= 3·163534186 Wien. Fuß.

Flächenmaß.

1 österr. Joch = 1600 Wien. □° = 54543·115 alt Par. Quadratfuß
= 57·5542527 Ares.

1 österr. □ Klafter = 3·5971408 □ mètres (mètres carrés).
= 34·089446875 alt Par. □ Fuß.

1 österr. □ Fuß = 0·099920578 □ mètres.
= 0·94692908 alt Par. □ Fuß.

1 Arpent royal (100 □ perches à 22 Fuß) = 48400 alt Par. □ Fuß = 1419·79 Wien. □ Klaftern.

1 □ Ruthe (perche royale carrée) = 484 Par. □ Fuß
= 51·072 ares
= 14·1979 Wien. □ Klaft.
= 0·51072 ares,
= 51·072 □ mètres.

1 alt Par. □ Fuß = 1·05604215 Wien. □ Fuß.
= 0·105520656 mètres carrés.

Digitized by Google

1 Are = 26·32449 □ Toises = 947·682 alt Par. □ Fuß = 27·799857 Wien. □ Klafter = 1000·794852 Wien. □ Fuß.

Körpermaß.

1 Wiener Kubikklafter = 216 Wien. Kubikfuß =
= 0·921473 alt Par. Kubiktoisen
= 199·038159 alt Par. Kubikfuß
= 6822·383976 Litres.

1 Wiener Kubikfuß = 1728 Wiener Kubikzoll =
= 0·92147296 alt Par Kubikfuß
= 31·585111 Litres.

1 Wiener Metze = 1·9471 Wiener Kubikfuß =
= 3100·3344 alt Par. Kubikzoll
= 1·7942 alt Par. Kubikfuß
= 61·49937 Litres.

1 Wiener Eimer = 1·792 Wiener Kubikfuß =
= 2853·368 alt Par. Kubikzoll
= 56·600524 Litres.

1 Wiener Maß = 77·4144 Wiener Kubikzoll =
= 71·3342 alt Par. Kubikzoll
= 1·4150131 Litres.

1 Par. Kubikfuß = 1728 Par. Kubikzoll =
= 1·085235 Wien. Kubikfuß
= 34·2772701 Litres (décimètres cubes).

1 Litre oder 1 Millistère oder 1 Décimètre cube =
= 50·412416 alt Par. Kubikzoll
= 54·709322 Wien. Kubikzoll.

Es ist 1 Boisseau = 655·78 alt Par. Kubikzoll = 0 211519 Wiener Metzen.

Der Quart oder Pot (Maß) = 2 Pintes = 93·9 Par. Kubikzoll = 101·90357 Wien. Kubikzoll.

1 Muid (288 Pintes) Wein auf der Mutter (sur la lië) = = 13521·6 Par. Kubikzoll = 4·7388 Wien. Eimer.

1 Muid (288 Pintes) abgeklärt = 13146 Par. Kubikzoll = = 4·607 Wien. Eimer.

Digitized by Google

Gewicht.

1 Wiener Pfund Handelsgewicht = 10546·63 alt Par. Grains = 560·18207 Grammes.

1 Wiener Pfund Apothekergewicht = 7909·97 alt Par. Grains = 420·13656 Grammes.

1 Wiener Mark Markgewicht = 5285·332 alt Par. Grains = 280·72929 Grammes.

1 Kölln. Mark Markgewicht = 4404·4437 alt Par. Grains = 233·94108 Grammes.

1 alt Par. Pfund Markgewicht = 9216 alt Par. Grains = 489·505866 Grammes = 10184·6 Holl. As = 0·8738 Wien. Pfund H. G.

1 alt Par. Pfund Seidengewicht = 8640 alt Par. Grains = 458·9116 Grammes = 9548·1 Holl. As = 0 8192 Wien. Pfd.

1 Gramme = 18·82715 alt Par. Grains = 13·709828184 Wiener Apoth. Gran,

= 233 4490978 Richtpfenn. der Wiener Mark
= 280·1389175 Richtpfenn. der Kölln. Mark in Wien
= 20·805916757 Holl. Trois-As.

1 Kilogramme = 1000 Grammes =

= 2·042876 Par. Pfd Markgewicht
= 2·179068 » » Seidengewicht
= 1·785133879 Wiener Pfund Hand. Gewicht
= 3·562150542 » Mark Münzgewicht
= 2·38017851 » Pfund Apothekergewicht
= 4·274580651 » Mark Kölln. in Wien.

* Wer sich eine genauere und umfassendere Kenntniß von den Maßen, Münzen und Gewichten in den verschiedenen Ländern der civilisirten Welt verschaffen will, der muß solche Werke zur Hand nehmen, die sich ausschließend mit diesem Gegenstande befassen. Unter der großen Menge von solchen Schriften dürfte wohl Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde für Banquiers und Kaufleute von H. dem ältern, Wien 1809, das vorzüglichste und interessanteste seyn.

§. 151.

Eine gegebene benannte Zahl aufzulösen.

Man multiplizire die aufzulösende Zahl mit der gehörigen Reductions-Zahl der nächst niedrigern, oder sogleich der niedrigsten Ein-

Digitized by Google

heiten, in welche die gegebene Zahl verwandelt werden soll. — Ist aber die zu resolvirende Größe mehrnahmig, so multiplizire man die Einheiten der höchsten Benennung mit der Reductions-Zahl der nächst niedrigern Ordnung, indem man zum Producte die gegebenen Einheiten derselben Ordnung addirt.

Beyspiele.

1) Wie viele Grane enthält das Apothekerpfund?

Rechnung. 1 ℔ A. G. = 1 × 12 = 12 Unzen
12 Unz. = 12 × 8 = 96 Drachmen
96 Dr. = 96 × 3 = 288 Skrupeln
288 Skr. = 288 × 20 = 5760 Gran.

2) Man verwandle 2 Zentner, 37 ℔, 20 Loth, 2 Quentchen in Quentchen.

Rechnung. 2 Zentr., 37 ℔, 20 Loth, 2 Qtl. = 30418 Quentch.
× 100
200 ℔ + 37 ℔ = 237 ℔
237.32 (=8.4) + 20
× 8
1896
× 4
7584 + 20 = 7604 Loth
× 4
30416 + 2 = 30418 Quentch.

Wir werden in der Folge die Einheiten der niedrigern Benennungen bey der Multiplication jedes Mahl gleich mit einzählen. Ist die Auflösezahl zweyziffrig, wie z. B. 32 in unserem Beyspiele, und man multiplizirt mit Factoren (8.4=32), so dürfen die Einheiten der nächst niedrigern Benennung (hier 20 Loth) erst bey der Multiplication mit dem zweyten Factor eingezählt werden, weil diese sonst mit jenem Factor multiplizirt würden, was offenbar falsch wäre. Es steht demnach die vorige Rechnung kürzer also:

2 Zentr., 37 ℔, 20 Loth, 2 Qtl. = 30418 Qtl.
× 100
237 ℔
× 8
1896
× 4 + 20
7604 Loth
× 4 + 2
30418 Qtl.

Digitized by Google

3) Man verwandle 43 Gulden (fl), 35 Kreuzer (kr. oder xr.), 3 Pfennige in Pfennige.

43 fl. 35 kr. 3 Pf. = 10463 Pf.
——— × 60 + 35
2615 kr.
——— × 4 + 3
10463 Pf.

4) Man verwandle 49 Pfund (Livres), 13 Schilling, 8 Deniers (Pences) Sterling in Deniers.

Da in England 1 Pfund (Livre) = 20 Schilling = 20 . 12 = = 240 Deniers (Pences), so sind

49 Pfd. 13 Sch. 8 D. = 11924 D.
——— × 20 + 13
993 Sch.
——— × 12 + 8
11924 D.

§. 152.

Eine gegebene benannte Zahl zu reduciren.

1) Um eine benannte Zahl zu reduciren, dividire man die gegebenen Einheiten der niedrigsten Benennung durch die Reductions-Zahl der nächst höheren Ordnung. Der Rest hat die Benennung des Dividends, der Quotient aber erhält die nächst höhere Benennung. Mit diesem Quotienten wird auf dieselbe Art die Reduction weiter fortgesetzt.

Beyspiele.

1) Wie viel Gulden, Kreuzer und Pfennige machen 37849 Pfennige?

Rechnung. 37849 Pf. : 4 = 9462 kr. 1 Pf. = 157 fl. 42 kr. 1 Pf.
9462 kr. : 60 = 157 fl. 42 kr.
34
46
42 kr.

2) Man reducire 47856938 □‴ nach dem Decimal-Maße auf Einheiten der höheren Benennungen.

Es sind 47856938 □‴ = 478569 □″ + 38 □‴ =
= 4785 □′ 69 □″ 38 □‴, und weil

$4785\ \square' = \left(\frac{4785}{36}\right)\square^{\circ} = 132\ \square^{\circ} + 33\ \square'$; so erhält man

47856938 □‴ = 132 □° 33 □′ 69 □″ 38 □‴.

Digitized by Google

Nach dem Duodecimal-Maße (zwölftheiligen) findet man:

$47856938\,\square''' = (47856938 : 144)\,\square'' = 332339\,\square'' + 122\,\square'''$

$= 465$

$= 336$

$= 489$

$= 573$

1418

122

$332339\,\square'' = (332339 : 144)\,\square' = 2307\,\square' + 131\,\square''$

$= 443$

$= 1139$

131

$2307\,\square' = (2307 : 36)\,\square^{\circ} = 64\,\square^{\circ} + 3\,\square'$

147

$= 3$

Mithin sind $47856938\,\square'''$ Zwölfth. Maßes $= 64\,\square^{\circ}\ 3\,\square'\ 131\,\square''\ 122\,\square'''$.

2) Soll die ganze gegebene Zahl auf Einheiten einer und derselben höheren Ordnung zurück gebracht werden, so verfährt man zwar auf dieselbe Art, aber man läßt die Reste nicht, wie vorhin, stehen, sondern entwickelt am zweckmäßigsten den Quotienten in Decimalen weiter.

Beyspiel. Man reducire 841536 Pfennige auf die Benennung Thaler.

Rechnung. 841536 Pf. $= (841536 : 4)$ fr. $= 210384$ fr.

$= (210384 : 90)$ Thlr. $= 2337{\cdot}6$ Thlr.

30

33

68

$5{\cdot}4$

3) Hat man eine mehrnahmige Zahl auf Einheiten einer höhern oder der höchsten Benennung zu reduciren; so ziehe man eine Verticallinie, schreibe zur Rechten die gegebenen Zahlen, von der niedrigsten Benennung angefangen, der Ordnung nach unter einander, links aber setze man ihnen die gehörigen Reductions-Zahlen bey, dividire die Zahl unter der niedrigsten Benennung durch die daneben stehende Reductions-Zahl, und hänge den in Decimalen gefundenen Quotienten der Zahl unter der nächst höhern Benennung an. Die so gefundene Zahl

Digitized by Google

dividirt man nun durch die dabey stehende Reductions-Zahl, hängt den Quotienten wieder der nächst folgenden Zahl als Decimal-Bruch an, und fährt auf diese Art bis zur verlangten höchsten Benennung fort.

Hat die Zahl der niedrigsten Benennung einen gemeinen Bruch bey sich, so verwandle man diesen gleich in einen Decimal-Bruch.

Beyspiele.

1) Man reducire 57 fl. 39 kr. 3 Pf. auf die Benennung Gulden.

Ansatz.		Rechnung.	
Red. Zahl		4	3
4	3 Pf.	60	39·75
60	39 kr.		57·6625 fl.
	57 fl.		

Man erhielt nähmlich zuerst 3 Pf. = 0·75 kr., dann (39+0·75) kr. = 39·75 kr. = 0·6625 fl., mithin sind 57 fl. 39 kr. 3 Pf. = = 57·6625 fl.

2) Man reducire 8 Zntr. 79 ℔, 23 Lth. $2\frac{1}{2}$ Qtl. auf die Benennung Zntr., oder man verwandle die gegebene mehrnahmige Zahl in einen Zentner-Decimal-Bruch.

Ansatz.		Rechnung.	
4	2·5 Qtl.	4	2·5
32 = 8.4	23 Loth	32 = 8.4	23·625 (:8), 2·953125 (:4
100	79 ℔	100	79·738281 25
	8 Zntr.		8·7973828125 Zentner.

Nähmlich es sind 8 Zntr. 79 ℔, 23 Loth, $2\frac{1}{2}$ Qtl. = 8·7973828125 Zntr.

* Wie weit man bey diesen Divisionen in Decimalen zu gehen habe, muß in der Ausübung jedes Mahl aus der Natur der Aufgabe ausgemittelt werden, wobey man jedoch darauf Rücksicht zu nehmen hat, ob der Quotient schon das Resultat der ganzen Rechnung sey, oder ob dieser noch mit andern gegebenen Größen arithmetische Verbindungen einzugehen habe. — Bezeichnet ein solcher Quotient z. B. Gulden, und ist er schon das Rechnungs-Resultat, so ist es hinreichend, denselben mit drey Decimalen anzugeben, weil 0·001 fl. < $\frac{1}{4}$ Pf., oder < $\frac{1}{2}$ Heller, und also nicht mehr zahlbar ist, indem man keine so kleinen Münzen hat. Wäre aber jener Decimal-Bruch nicht das End-Resultat, und müßte er etwa noch mit der Zahl 3780 z. B. multiplizirt werden, dann muß er auch schärfer, d. i. mit mehreren Decimalen bestimmt werden.

Digitized by Google

§. 153.

Benannte Zahlen, die sich auf Einheiten von einerley Art beziehen, zu addiren.

Man setze die gegebenen Summanden so unter einander, daß die gleichnahmigen Theile unter einander zu stehen kommen. Dann beginne man die Addition bey der niedrigsten Benennung. Enthält diese Summe schon Einheiten der nächst höheren Benennung, so ziehe man diese durch die Reduction (§. 152.) heraus, und addire sie zur Summe der Einheiten der nächst höhern Sorte, den Rest setze man aber gerade unter die addirten Größen, mit welchen er dieselbe Benennung hat. Auf diese Art setze man das Verfahren bis zur höchsten oder letzten Benennung fort. Sind bey der niedrigsten Benennung auch Brüche angehängt, so addirt man diese zuerst nach (§. 101), zieht die Ganzen heraus, und addirt diese zu den Ganzen derselben Benennung, nachdem man zuvor die Bruchtheile angemerkt hat.

Beyspiel 1.

3	Zntr.	87	℔,	13	Loth,	2	Qtl.
4	»	23	»	24	»	3	»
17	»	48	»	8	»	—	»
9	»	57	»	—	»	1	»
20	»	83	»	31	»	3	»
6	»	9	»	14	»	2	»
62	»	9	»	28	»	3	»

Beyspiel 2.

53	fl.	48	kr.	$3^1/_2$ Pf.
197	»	24	»	$2^3/_4$ »
82	»	53	»	$1^1/_4$ »
415	»	—	»	3 »
219	»	12	»	$-^1/_2$ »
51	»	47	»	$2^1/_4$ »
1020	fl.	7	kr.	$1^1/_4$ Pf.

Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens erhellt von selbst.

§. 154.

Benannte Zahlen zu subtrahiren.

1) Man ordne, wie bey der Addition, den Minuend und Subtrahend, und ziehe die einzelnen Sorten des letztern von den gleichnahmigen Sorten des erstern der Ordnung nach ab, indem man bey der niedrigsten Benennung anfängt.

Digitized by Google

2) Ist bey einer Sorte der Minuend kleiner als der Subtrahend, so borge man bey der nächst höhern Sorte eine Einheit, welche in Theile der niedrigern Benennung verwandelt, zu den schon vorhandenen Einheiten addirt wird.

3) Fehlen im Minuend mehrere auf einander folgende Ordnungen; so borgt man eine Einheit von der höchsten Benennung, und vertheilt diese so auf die niedrigen Sorten, daß man überall abziehen kann, wie aus den nachfolgenden Beyspielen ersichtlich ist.

Beyspiele. 1) Es hat jemand 4867 Thlr. Vermögen und 1985 Thlr. Schulden. Wie viel bleibt ihm nach Tilgung seiner Schulden übrig?

Antwort: 4867 Thlr. — 1985 Thlr. = 2882 Thlr.

2) Es bezog jemand 3527 fl. an Interessen, wovon er 2168 fl. 36 kr. ausgab; wie viel blieb ihm noch übrig?

Rechnung.

$$\left.\begin{array}{r} 3527 \text{ fl.} \\ -2168 \text{ » } 36 \text{ kr.} \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 3526 \text{ fl. } 60 \text{ kr.} \\ -2168 \text{ » } 36 \text{ » } \end{array}$$

Rest = 1358 fl. 24 kr.

In der Folge werden wir in Gedanken von der Größe unter der nächst höhern Benennung eine Einheit entlehnen, und dieß durch einen über die Stelle der Einheiten gesetzten Punct bezeichnen; auch werden wir jene entlehnte Einheit, in Einheiten der niedrigern Benennung aufgelöst, zu den gegebenen Einheiten derselben Art nur hinzu addirt denken, ohne die Summe selbst anzusetzen. Die vorige Rechnung wird also kürzer so stehen:

$$\begin{array}{r} 3527 \text{ fl.} \\ -2168 \text{ » } 36 \text{ kr.} \\ \hline 1358 \text{ fl. } 24 \text{ kr.} \end{array}$$

3) Ein Kaufmann bezog 47 Zntr. 58 ℔, 17 Loth, 2 Qtl. von irgend einer Waare, von welcher er 38 Zntr. 87 ℔, 25 Loth, 3 Qtl. absetzte; wie viel ist ihm also übrig geblieben?

Rechnung. 47 Zntr. 58 ℔, 17 Loth, 2 Qtl.

— 38 » 87 » 25 » 3 »

Rest = 8 Zntr. 70 ℔, 23 Loth, 3 Qtl.

Zur Übung verwandle man die beyden gegebenen Größen in Einheiten der höchsten oder niedrigsten Benennung, und resolvire oder reducire die gefundene Differenz wieder, welche mit der nach der ersten Methode gefundenen genau übereinstimmen muß.

Digitized by Google

§. 155.

Benannte Zahlen zu multipliziren.

Die Multiplication benannter Zahlen kann auf dreyerley Art verrichtet werden.

1) Man resolvirt entweder den Multiplicand in Einheiten der niedrigsten Benennung (§. 151.), und multiplizirt dann diesen veränderten Multiplicand mit dem Multiplicator, der aber ebenfalls auf dieselbe Benennung gebracht werden muß, wenn er eine benannte Zahl seyn sollte.

2) Oder man reducirt beyde Factoren auf die höchste Benennung, und multiplizirt die erhaltenen Resultate mit einander. Das Product, welches mit dem Multiplicand gleiche Benennung hat, wird dann (nach §. 152.) wieder reducirt oder resolvirt, je nachdem man nach 1) oder 2) verfahren ist.

3) Oder man verfährt endlich nach §. 44.

Beyspiel 1. Man multiplizire 37 fl. 45 kr. 3 Pf. mit 6.

Rechnung. Nach Nro. 1 ist (37 fl. 45 kr. 3 Pf.) × 6 = = 9063 Pf. × 6 = 54378 Pf. = 226 fl. 34 kr. 2 Pf.

Nach Nro. 2 ist (37 fl. 45 kr. 3 Pf.) × 6 = 37·7625 fl. × 6 = 226·575 fl. = 226 fl. 34·5 kr. = 226 fl. 34 kr. 2 Pf. wie vorhin.

Nach Nro. 3 aber erhält man:

37 fl. 45 kr. 3 Pf.
6

222 fl. 270 kr. 18 Pf. = 226 fl. 34 kr. 2 Pf.

Wenn man nach der letzten Methode verfährt, so beginnt man die Multiplication immer bey der niedrigsten Benennung, zieht aus dem jedes Mahl gefundenen Producte die Einheiten der nächst höhern Ordnung gleich heraus, und addirt sie gleich zu dem nächsten Producte, welches sich auf Einheiten der nächst höhern Ordnung bezieht.

Beyspiel 2. Es erspare sich jemand monathlich 15 Thaler 48 kr. 3 Pf.; wie viel hat er sich wohl in einem Jahre erspart?

Da das Jahr 12 Monathe hat, so muß er sich offenbar 12 Mahl so viel erspart haben, als in einem Monathe, folglich hat man die monathlich ersparte Summe mit 12 zu multipliziren. Man erhält demnach nach Nro. 3

15 Thlr. 48 kr. 3 Pf.
× 12

189 Thlr. 45 kr. —

Digitized by Google

Anmerkung. 1) Man darf nicht die irrige Meinung haben, als wäre in dem letzten Beyspiele der Multiplicand mit 12 Monathen multiplizirt worden, wodurch man im Resultate Thaler und Kreuzer erhalten habe, denn diese Vorstellungsart wäre offenbar Unsinn. Aus dem Begriffe der Multiplication (§. 42.) folgt von selbst, daß der Multiplicator immer als unbenannte (stumme) Zahl betrachtet werden müsse, und daß das Product mit dem Multiplicand von einerley Art seyn, oder sich auf dieselbe Einheit beziehen müsse.

2) Es ist ferner zu bemerken, daß das Product aus zwey Zahlen, die sich auf einerley Längenmaß beziehen, eine Zahl sey, die ausdrückt, wie groß eine Fläche in demselben Quadratmaße ist, und daß das Product aus zwey Zahlen, deren eine ein Quadratmaß und deren andere ein Längenmaß von derselben Art bestimmt, eine Zahl sey, welche einen Kubik-Inhalt in demselben Maße angibt. — Hieraus folgt zugleich, daß das Product aus 3, sich auf dasselbe Längenmaß beziehenden Factoren einen körperlichen Inhalt in demselben Maße bezeichne.

Diese Sätze pflegt man kürzer so auszudrücken:

Längenmaß mit Längenmaß multiplizirt, gibt einen Flächeninhalt;

Flächenmaß mit Längenmaß multiplizirt, oder umgekehrt, gibt einen Kubik-Inhalt, und drey Längenmaße mit einander multiplizirt, bestimmen auch einen Kubik-Inhalt.

Die Richtigkeit dieser Sätze beruht auf geometrischen Gründen, die wir also erst später kennen lernen werden.

3) Da jeder Dividend als ein Product aus zwey Factoren betrachtet wird, deren einer der Divisor, und der andere der Quotient ist (§. 63. Zus. 3.), so folgt, daß der eine Factor immer als eine stumme Zahl anzusehen sey, und daß der andere Factor mit dem Dividende von einerley Art seyn müsse.

Es folgt ferner, daß Körpermaß durch Längenmaß dividirt Flächenmaß, durch Flächenmaß dividirt aber Längenmaß zum Quotienten geben müsse, so wie Flächenmaß durch Längenmaß dividirt nothwendig Längenmaß zum Quotienten gibt.

So z. B. sind

$37' \times 10' = 370\,\square'$; $18^\circ \times 7^\circ = 126\,\square^\circ$;

$52^\circ \times 3' = 52^\circ . (\frac{1}{7})^\circ = (\frac{52}{7})\,\square^\circ = 26\,\square^\circ$;

oder $52^\circ \times 3' = 312' . 3' = 936\,\square' = (936 : 36)\,\square^\circ = 26\,\square^\circ$;

$8' \times 4' \times 7' = 32\,\square' \times 7' = 224$ Kubikfuß;

$83\,\square^\circ \times 9' = 747$ Kbf.;

$748\,\square' : 4' = (748 : 4)' = 187'$;

654 Kbf. : $6\,\square' = (654 : 6)' = 109'$;

720 Kbf. : $12' = (720 : 12)\,\square' = 60\,\square'$.

Digitized by Google

Zusatz.

In praktischen Fällen findet immer die Multiplication Statt, wenn aus dem Werthe der Einheit der Werth einer Menge (Quantität) gesucht wird.

Beyspiele. 1) Was kosten 25 Ellen von irgend einem Stoffe, wenn die Elle 3 fl. 20 kr. kostet? — 25 Ellen kosten offenbar 25 Mahl so viel als 1 Elle, mithin ist die gesuchte Größe

$$x = (3 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}) \cdot 25 = 83 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

2) Was kosten 7 ℔, 28 Loth, 3 Qtl. von irgend einer Waare, wenn das Loth mit 8 kr. $2^1/_2$ Pf. bezahlt wird?

Man verwandle 7 ℔, 28 Loth, 3 Qtl. in Lothe, 8 kr. $2^1/_2$ Pf. in Kreuzer, und multiplizire beyde Resultate mit einander.

Rechnung. 7 ℔, 28 Loth, 3 Qtl.

$\times 32 +$

252 Loth, 3 Qtl.

$: 4$

252·75 Loth,

8 kr. $2^1/_2$ Pf. = 8 kr. 2·5 Pf. = 8·625 kr.

also ist die gesuchte Zahl $x = (252{\cdot}75 \times 8{\cdot}625)$ kr.

63 1875

151 650

$x = 2179{\cdot}96875$ kr.

$: 60$

36 fl. 19·96875 kr.

$\times 4$

3·87500 Pf.

$x = 36$ fl. 19 kr. 3·875 Pf.

Man hat hier geschlossen, daß, weil 1 Loth 8·625 kr. kostet, die 252·75 Loth offenbar 252·75 Mahl so viel Kreuzer kosten, als 1 Loth, und daß demnach das Product $252{\cdot}75 \times 8{\cdot}625$ die gesuchte Zahl bezeichne, und also Kreuzer ausdrücken müsse. — Bey der Multiplication haben wir zuerst mit 25, dann mit 6 und endlich mit 8 multiplizirt, aber das letzte Theilproduct am gehörigen Orte gleich eingezählt.

Da man aber beym ersten Blicke schon sieht, daß Gulden im Resultate zum Vorscheine kommen werden, so ist es zweckmäßiger in diesem Falle, den Multiplicand (8·625 kr.) gleich auf die Benennung fl. zu reduciren. Die Rechnung würde demnach also stehen:

Digitized by Google

4 | 25 Pf.
60 | 8·625 kr.
| 0·14375 fl.

mithin $x = (252{\cdot}75 \times 0{\cdot}14375)$ fl.

28750
359375...
36·3328125 fl.
× 60
19·96875.. kr.
× 4
3·875.. Pf.

d. i. $x = 36$ fl. 19 kr. 3·875 Pf. wie vorhin.

Wir haben hier zuerst mit 2, dann mit 25 multiplizirt, und das dritte Theilproduct, nähmlich das 75fache des Multiplicands, oder das Dreyfache von (25.0·14375) gleich am gehörigen Orte einaddirt.

Das Gulden bezeichnende Product wurde oben mit 7 Decimal-Ziffern gefunden, allein es ist hinreichend, das Resultat mit 3 Decimalen anzugeben. Die Rechnung würde also kürzer so gestellt:

252·75. × 0·14375
573 41.
252 75
101 10
7 58
1 76
13
36·3 32 fl.
× 60
19·92. kr.
× 4
3·68 Pf.

daher $x = 36$ fl. 19 kr. 3·68 Pf.

Der Fehler beträgt hier also (3·875 — 3·68) Pf. = 0·195 Pf. < 0·2 Pf.; folglich ein Fehler, der im bürgerlichen Leben = 0 gesetzt werden kann.

3) Wie viel betragen $^5/_8$ Ducaten in Conv. Münze, wenn der Ducaten (#) zu 4 fl. 30 kr. gerechnet wird?

Digitized by Google

Da 1 Ducat = 4 fl. 30 kr. = 4·5 fl.; so sind $^5/_8$ Ducat. = = 4·5 fl. $^5/_8 = \frac{22·5}{8}$ fl. = 2·8125 fl. = 2 fl. + 0·8125 fl. = = 2 fl. + (0·8125 × 60) kr. = 2 fl. 48·75.. kr. = 2 fl. 48$^3/_4$ kr. = = 2 fl. 48 kr. 3 Pf.

§. 156.

Benannte Zahlen zu dividiren.

a) Ist der Dividend eine einfache benannte Zahl, der Divisor aber eine unbenannte Zahl, so dividire man die gegebene benannte Zahl, als wenn sie eine unbenannte wäre, durch den gegebenen Divisor, und beziehe den gefundenen Quotienten auf dieselbe Einheit, worauf sich der Dividend bezieht. So z. B. sind 360 fl. : 12 = 30 fl., denn 30 fl. × 12 = 360 fl. Eben so sind 863 ℔ : 5 = 172·6 ℔, denn 172·6 ℔ × 5 = 863 ℔.

b) Ist aber der Dividend eine zusammengesetzte benannte Zahl, und der Divisor eine stumme Zahl, so reducire man den Dividend entweder auf Einheiten der höchsten Benennung, oder man resolvire ihn in Einheiten der niedrigsten Benennung, und dividire das so gefundene Resultat durch den gegebenen Divisor nach a). — Eine andere Verfahrungsart ist folgende: Man dividire durch den gegebenen Divisor jeden Theil des Dividends, indem man die Division bey der höchsten Benennung beginnt, und den jedes Mahl gebliebenen Rest in Einheiten der nächst niedrigern Benennung aufgelöst, zu den gegebenen Einheiten derselben Art addirt, welche Summe den neuen Partial-Dividend gibt.

Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele:

1) Man soll 57 fl. 42 kr. 3 Pf. unter 5 Personen vertheilen, wie viel bekommt ein jeder?

Rechnung.

4	3 Pf.
	kr.
60	42 75
	fl.
	57.7125

also x = 57·7125 fl. : 5 = 11·5425 fl.

× 60

32·55.. kr.

× 4

2·2. Pf.

Digitized by Google

oder x = 11 fl. 32 kr. 2·2 Pf.

oder 57 fl. 42 kr. 3 Pf.
——— × 60 + 42
3462 kr.
——— × 4 + 3
13851 Pf.

also x = 13851 Pf. : 5 = 2770·2 Pf.
——— : 4
692 kr. 2·2 Pf.
——— : 60
11 fl. 32 kr.

mithin x = 11 fl. 32 kr. 2·2 Pf., wie vorhin.

Oder endlich 57 fl. 42 kr. 3 Pf.
(2 fl. = 120 kr.) + 42 kr. = 162 kr.
2 kr. = 8 Pf.
——— : 5
11 fl. 32 kr. 2·2 Pf.

2) Eine Wiese hält 7 Joch 845 □° 18 □′, und soll unter 3 Brüder getheilt werden, wie groß wird jeder Theil seyn?

7 Joch 845 □° 18 □′
Rest (1 J. = 1600 □°) + 845 = 2445
——— : 3
x = 2 Joch 815 □° 6 □′

c) Wenn der Dividend und der Divisor zugleich benannte Zahlen sind, so bringe man beyde Größen auf einerley Benennung, und dividire wie in unbenannten Zahlen. In diesem Falle heißt also dividiren nichts anderes, als untersuchen, wie oft der Divisor gesetzt werden müsse, um den Dividend zu erhalten, und der Quotient ist dann nothwendig eine unbenannte Zahl.

Hier muß man sich an das (§. 155. Anm. 3.) Gesagte erinnern.

Beyspiel 1. Man dividire 48 Thaler durch 6 Thaler, d. h. man untersuche, wie oft 6 Thaler genommen werden müssen, um 48 Thaler zu erhalten.

Es ist 48 : 6 = 8, mithin auch 48 Thlr. : 6 Thlr. = 8, denn 6 Thlr. × 8 = 48 Thlr.

Beyspiel 2. Man dividire 8 Zntr. 53 ℔, 24 Loth, 3 Qtl. durch 2 Zntr. 74 ℔, 20 Loth, 2 Qtl.

Digitized by Google

Rechnung.	4	3 Otl.
		Lth.
32 = 8.4		24·75
	: 8	3·19375
	: 4	℔
	100	53·7984375
		Zntr.
		8·537984375

	4	2 Otl.
		Lth.
32 = 8.4		20·5
	: 8	2·5625
	: 4	℔
	100	74·640625
		Zntr.
		2·74640625,

Zntr. Zntr.

also $x = 8{\cdot}537984375 : 2{\cdot}74640625$, und da 0·000001 Zntr. beynahe nur $^1/_{80}$ Otl. beträgt, so ist es mehr als hinreichend, im Quotienten 6 Decimalen zu suchen. Wir rechnen also nach §. 120 auf folgende Art:

$x = 8{\cdot}537984{,}375 : 2{\cdot}{,}7{,}4{,}6{,}4{,}0{,}6{,}25 = 3{\cdot}108784$

298765
24124
2153
231
12
1

d. h. 2 Zntr. 74 ℔, 20 Loth, 2 Otl. müssen 3·108784 Mahl genommen werden, um 8 Zntr. 53 ℔, 24 Loth, 3 Otl. zu erhalten.

Beyspiel 3. Man dividire 197 □° 27 □′ 84 □″ Decimal-Maß durch 12° 5′ 6″ Decim. Maßes, d. h. womit müssen 12° 5′ 6″ zehntheiligen Längenmaßes multiplizirt werden, um 197 □° 27 □′ 84 □″ zehnth. Flächenmaßes zu erhalten?

Rechnung. Es sind 197 □° 27 □′ 84 □″ = 711984 □″

$\times 36$

591

7119 □′ = 711900 □″

Die □° werden nähmlich durch die Multiplication mit 36 in □′ verwandelt; wir multiplizirten demnach 197 mit 3, dann das Product 591 durch 2 (weil 6 = 3.2), und zählten die gegebenen 27 □′ und das erste Partial-Product gleich ein.

Ferner sind 12° 5′ 6″ = 77′ 6″ = 776″, folglich finden wir $x = 711984 \square'' : 776'' = (711984 : 776)'' = 917''{\cdot}505.. = 917''{\cdot}5$ sehr nahe

1358
5824
3920
4000,

oder x = 917″ 5‴ Decimal-Maß = 91′ 7″ 5‴ = 15° 1′ 7″ 5‴ zehntheiligen Längenmaßes.

Zusatz 1.

Die Division findet in praktischen Fällen immer Statt, wenn aus dem gegebenen Werthe W einer Quantität A der Werth x der Einheit gesucht wird; der Werth W der gegebenen Menge A wird immer der Dividend, die Menge selbst aber der Divisor. Es ist nähmlich $x = \frac{W}{A}$. — Auch hier muß die Natur der Aufgabe den Grad der Genauigkeit bestimmen.

Beyspiel 1. Wenn 298 ℔, 29 Loth, 3½ Qtl. mit 543 fl. 36 kr. 2 Pf. bezahlt werden, wie hoch kommt das Pfund zu stehen?

Da hier der Werth eines Pfundes gesucht wird, so verwandle man die gegebene Quantität in Pfunde, und weil, wie leicht einzusehen ist, im Resultate Gulden kommen müssen; so reducire man den gegebenen Werth auf die Benennung Gulden. Da jedoch der Quotient W:A hier nur eine Stelle für die Ganzen erhalten kann, und mit 4 Decimalen das Gulden bezeichnende Resultat in größter Schärfe bestimmt ist, so hat man bey der Division hier überhaupt 5 Ziffern zu suchen, und deßhalb wird es mehr als hinreichend seyn, die beyden gegebenen Größen W und A auf 3 Decimalen zu reduciren.

Rechnung.

4	3·5 Qtl.	4	2 Pf.	
	Loth		kr.	
32 = 8.4	29·875	60	36·5	
: 8	3·734..		543·608... = W	
: 4	℔			
	298·933... = A			

also $x = \frac{W}{A} = 543{\cdot}60,8 : 2,9,8{\cdot}9,3,3 = 1{\cdot}8185$ fl. = 1 fl. 49 kr. 0.44 Pf.

244 67
·553
254
16
1

——— × 60
49·11.. kr.
— × 4
·44 Pf.

Zusatz 2.

Soll aber aus dem Werthe W einer gegebenen Größe A der Werth x einer andern gegebenen Quantität a gesucht werden; so suche

Digitized by Google

man (nach Zus. 1.) zuvor den Werth der Einheit, welcher durch den Ausdruck $\frac{W}{A}$ bestimmt wird, und multiplizire diesen mit der Größe a, deren Werth gesucht wird. Es ist nähmlich

$$x = \frac{W}{A} \cdot a = \frac{W \cdot a}{A}.$$

Beyspiel 1. Wenn 48 Ellen von irgend einem Zeuge mit 73 Thlr. 54 kr. bezahlt werden, wie hoch kommen 5 Ellen von eben diesem Zeuge? Nun frage man sich: Wenn 48 Ellen (=A) 73 Thlr. 54 kr. (=W) kosten, was kostet 1 Elle?; so findet man (nach Zus. 1.), daß 1 Elle auf $\frac{W}{A} = \frac{73 \text{ Thlr. } 54 \text{ kr.}}{48}$ zu stehen komme, oder daß der Werth einer Elle nur den 48sten Theil vom Werthe der 48 Ellen betragen müsse. Nun wird aber (nach §. 155. Zus.) der Werth einer Quantität a aus dem Werthe $\frac{W}{A}$ der Einheit gefunden, wenn man letzteren durch die gegebene Größe a multiplizirt; folglich ist

$$x = \frac{W}{A} \cdot a = \frac{73 \text{ Thlr. } 54 \text{ kr.}}{48} \times 5 = \frac{73{\cdot}6 \times 5}{48} \text{ Thlr.} = \frac{368}{48} \text{ Thlr.}$$

$$= (368 : 48) \text{ Thaler.} = (23 : 3) \text{ Thaler.} = 7^2/_3 \text{ Thlr.},$$

oder $x = 7 \text{ Thlr. } \frac{2.90}{3} \text{ kr.} = 7 \text{ Thlr. } 60 \text{ kr.}$

Beyspiel 2. Wenn 200 Mark Hamburger Banko mit 146 fl. 30 kr. C. M. bezahlt werden, wie hoch kommen 1821 Mark, 11 Schilling (ßl.), 7 Pf. (dl.)?

Da 200 Mark H. B. = 146 fl. 30 kr. C. M. = 146·5 fl. C. M., so beträgt eine Mark nur $\frac{1}{200}$ Theil von 146·5 fl. C. M., oder es ist 1 Mark H. B. $= \frac{146{\cdot}5}{200}$ fl. C. M. = 0·7325 fl. Nun reducire man 1821 Mark, 11 ßl. 7 dl. auf einen Mark-Decimal-Bruch, so findet man, da eine Mark 16 ßl. und der Schilling 12 dl. hat:

12	7 dl.
	ßl. .
16	11·583
	Mark
	1821·7239...

folglich sind 1821 Mark, 11 ßl. 7 dl. = 1821·7239.. $\times \frac{W}{A}$,

Digitized by Google

$= 1821{\cdot}7239.. \times 0{\cdot}7325$ fl. C. M., und (nach §. 118.)

5237.

12752 067
546 517
36 434
9 109

$x = 1334{\cdot}4127$ fl. C. M.
$\times 60$
24·762 . kr.
$\times 4$
3.048 Pf.

also $x = 1334$ fl. 24 kr. 3 Pf. C. M. sehr nahe.

Beyspiel 3. Wenn 2 Zntr. 48 ℔, 30 Loth, engl. Gew. mit 32 Livres, 18 ßl. 7 dl. Sterling bezahlt werden, und der englische Zentner zu 112 Pfund gerechnet wird; wie hoch kommen 18 ℔, 12 Lth. $3^1/_5$ Qtl. zu stehen?

Da hier nach dem Werthe von Pfunden gefragt wird, so verwandle man die beyden Größen, die sich auf das Gewicht beziehen, in Pfunde, und da, wie man auf den ersten Blick sieht, im Resultate Livres Sterling vorkommen werden, so reducire man den gegebenen Werth der einen Quantität auf Livres Strlg. Die Rechnung wird demnach stehen, wie folgt:

$32 = 8.4$	30 Loth	4	3·8 Qtl.
:8	3·75		Loth
:4	2 Zntr. 48 ℔ oder	$32 = 8.4$	12·95
	℔	:8	1·61875
	272·9375	:4	℔
			18.4046875

12	7 dl.
	ßl. .
20	18·583
	Lvrs..
	32·92916

folglich ist $x = \frac{W.a}{A} = \frac{32{\cdot}92916 \times 18{\cdot}4046875}{272{\cdot}9375}$.

Da hier der Zähler 3 Ziffern für die Ganzen erhält, und der Nenner ebenfalls 3 Ziffern für die Ganzen enthält, der Zähler aber größer ist (?) als der Nenner, so erscheint eine Ziffer für die Ganzen im Quotienten, und weil das Resultat hinlänglich scharf bestimmt

Digitized by Google

ist, wenn 4 Decimalen angegeben werden, so führe man (nach den §§. 118 und 120) die Rechnung so, daß 5 Decimalen erscheinen, um die vierte Ziffer nöthigen Falls corrigiren zu können.

Man setze nähmlich:

32·9291666 × 18·4046875
578 640481

32 929167
26 343333
1 317166
13172
1975
263
22
2

606·051,00 : 2,7,2,9,3,7,5 = 2·22047
60176
5589
130
21
2

Also ist x = 2·2205 Livres Sterling sehr nahe

——— × 20

4·410. ßl.

——— × 12

4·92 dl.

oder x = 2 L. 4 ßl. 4·9 dl. Sterling.

Digitized by Google

Neuntes Kapitel.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, nebst ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

I. Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 157.

1) Wenn zwey gleichartige Größen a und b auf einander bezogen, oder mit einander verglichen werden, um zu sehen, um wie viel die eine derselben größer als die andere sey; so betrachtet man ihr arithmetisches Verhältniß, und die beyden mit einander verglichenen Größen a und b heißen die Glieder des Verhältnisses.

2) Da das arithmetische Verhältniß der gleichartigen Größen a und b blos von ihrem Unterschiede abhängt, so kann man dasselbe auch wie eine Differenz, also entweder durch a — b oder durch b — a andeuten. Deutet man das Verhältniß von a und b durch a — b an; so heißt a das Vorderglied und b das Hinterglied. — Setzen wir den Unterschied a — b = d, so heißt d der Exponent oder die Differenz des Verhältnisses.

Viele Schriftsteller bezeichnen das arithmetische Verhältniß der Größen a und b so: a ÷ b; und wir werden uns in der Folge ebenfalls dieser Bezeichnung bedienen.

Der Ausdruck a ÷ b wird gelesen: a verhält sich arithmetisch zu b.

3) Wenn a — b = d gesetzt wird, so ist a = b + d, und b = a — d, d. h. das Vorderglied eines arithmetischen Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede mehr der Differenz, und das Hinterglied des arithmetischen Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede weniger der Differenz.

4) Sind die beyden Glieder eines arithmetischen Verhältnisses einander gleich, so heißt das Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, z. B. a ÷ a.

Man nennt zwey arithmetische Verhältnisse gleiche Verhält-

Digitized by Google

nisse, wenn sie gleiche Exponenten (Differenzen) haben. So z. B. sind die Verhältnisse $7 \div 3$ und $19 \div 15$ einander gleich, weil sie denselben Exponenten 4 haben, denn $7 - 3 = 4 = 19 - 15$.

Haben zwey arithmetische Verhältnisse ungleiche Exponenten, so heißen sie selbst ungleich, und zwar heißt jenes das größere, welches den größern Exponenten hat, und umgekehrt. So z. B. ist

$7 \div 3 > 19 \div 16$, weil $7 - 3 > 19 - 16$, oder $4 > 3$ ist.

§. 158.

Das arithmetische Verhältniß zweyer gleichartigen Größen a und b wird dem innern Werthe nach nicht geändert, wenn man zu beyden Gliedern desselben die nähmliche Größe c addirt oder davon subtrahirt.

Es ist nähmlich $a \div b = (a \pm c) \div (b \pm c)$.

Denn es sey $a - b = d$, so ist $(a \pm c) - (b \pm c) = a \pm c - b \mp c = a - b = d$, d. i. das neue, der Form nach geänderte Verhältniß $(a \pm c) \div (b \pm c)$ hat mit dem gegebenen $a \div b$ einerley Exponenten d, folglich sind die beyden Verhältnisse einander gleich (§. 157. Nro. 4.).

Zusatz.

Wenn man die beyden Glieder des arithmetischen Verhältnisses $a \div b$ durch dieselbe Zahl n multiplizirt oder dividirt, so wird das Verhältniß nicht allein der Form, sondern auch dem Werthe nach geändert.

Denn setzen wir wieder $a - b = d$; so ist $an - bn = (a-b).n = d.n$, und $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} = \frac{d}{n}$, folglich sind die Verhältnisse $an \div bn$ und $\frac{a}{n} \div \frac{b}{n}$ dem gegebenen Verhältnisse $a \div b$ nicht gleich, weil sie mit diesem nicht einerley Exponenten haben.

§. 159.

Die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse nennt man eine **arithmetische Proportion**; sind nähmlich a, b, m, n gleichartige Größen, und ist $a \div b = m \div n$; so pflegt man diese Gleichung auch eine arithmetische Proportion zu nennen, und man spricht: a verhält sich zu b, wie m zu n. — Jede solche Proportion be-

Digitized by Google

steht aus vier Gliedern, die hier a, b, m und n sind, welche Größen alle gleichartig seyn müssen; a und m heißen die Vorderglieder, b und n die Hinterglieder, a und n die äußern, und b und m die mittlern Glieder.

Sind die mittlern Glieder b und m einander gleich, ist nähmlich $a \div b = b \div n$ oder $a \div m = m \div n$, so heißt die Proportion stätig oder zusammenhängend, im entgegengesetzten Falle aber discret oder abgesondert.

Statt $a \div m = m \div n$ schreibt man kürzer: $\div a \div m \div n$, und nennt m die mittlere arithmetische Proportionale zwischen a und n.

§. 160.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder, und wenn die Proportion stätig ist, gleich dem doppelten mittlern Gliede, und umgekehrt: Wenn zwey aus zwey Theilen bestehende Summen einander gleich sind, so läßt sich aus den Summanden eine arithmetische Proportion bilden, wenn man die beyden Theile der einen Summe für die äußern, und die beyden Theile der andern Summe für die mittleren Glieder annimmt.

Denn wenn $a \div b = c \div d$, so muß auch $a - b = c - d$ seyn; und weil Gleiches zu Gleichem addirt wieder Gleiches gibt, so ist auch

$$(a-b) + (b+d) = (c-d) + (b+d),$$

oder $$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

d. i. $$a + d = c + b = b + c.$$

Für den Fall, daß $b = c$, ist demnach $a + d = 2b = 2c$.

Ist umgekehrt: $a + d = b + c$; so muß auch $a \div b = c \div d$ seyn; denn da vermöge der Voraussetzung $a + d = b + c$; so ist auch, weil Gleiches vom Gleichen abgezogen wieder Gleiches gibt,

$$(a+d) - (b+d) = (b+c) - (d+b),$$

oder $$a + d - b - d = b + c - d - b,$$

d. i. $$a - b = c - d$$

oder $$a \div b = c \div d.$$

Digitized by Google

Zusatz 1.

Man kann demnach mit den Gliedern einer arithmetischen Proportion alle Veränderungen vornehmen, durch welche die Gleichheit zwischen der Summe der äußern Glieder und jener der mittleren Glieder nicht geändert wird; nähmlich wir können statt der Proportion

1) $a \div b = c \div d$, wo $a + d = b + c$ seyn muß, auch setzen,
2) $a \div c = b \div d$ durch Verwechslung der mittleren Glieder,
3) $d \div b = c \div a$ durch Verwechslung der äußern Glieder,
4) $b \div a = d \div c$ durch Umkehrung der Verhältnisse in (1),
5) $d \div c = b \div a$ durch Verwechslung der äußern und mittl. Glied.
6) $b \div d = a \div c$ durch Umkehrung der Verhältnisse in (3),
7) $c \div a = d \div b$ » » » » in (2),
8) $c \div d = a \div b$ durch Verwechslung der mittlern Glieder in (7),

denn in allen diesen Proportionen bleibt immer die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der beyden mittleren.

Zusatz 2.

Aus Zusatz 1 und aus §. 158 leuchtet ein, daß die arithmetische Proportionalität zwischen vier gleichartigen Größen nicht gestört werde, wenn man die beyden Glieder des einen oder der beyden Verhältnisse, oder die beyden Vorderglieder, oder endlich die beyden Hinterglieder um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert. Da z. B.

$13 \div 9 = 21 \div 17$, indem $13 - 9 = 21 - 17 = 4$, oder
$13 + 17 = 9 + 21 = 30$ ist,

so ist auch $(13+5) \div 9 = (21+5) \div 17$,
oder $18 \div 9 = 26 \div 17$, dann $18 - 9 = 26 - 17 = 9$;
eben so $13 \div (9-3) = 21 \div (17-3)$,
oder $13 \div 6 = 21 \div 14$, denn $13+14 = 6+21 = 27$;
und $(13-1) \div (9+2) = (21-1) \div (17+2)$,
oder $12 \div 11 = 20 \div 19$, denn $12-11 = 20-19 = 1$.

Zusatz 3.

Weil $a + d = b + c$, wenn $a \div b = c \div d$ ist; so ist auch
wenn man auf beyden Seiten der Gleichung d abzieht, $a = b + c - d$,
» » » » » » » a » $d = b + c - a$,
» » » » » » » c » $b = a + d - c$,
» » » » » » » b » $c = a + d - b$,

Digitized by Google

Sind also 3 Glieder der arithmetischen Proportion gegeben, so kann das fehlende Glied immer gefunden werden; es ist nähmlich jedes äußere Glied gleich der Summe der beyden mittleren weniger dem bekannten äußeren Gliede; jedes mittlere Glied aber wird gefunden, wenn man von der Summe der beyden äußeren Glieder das bekannte mittlere Glied abzieht.

Ist die Proportion stätig, z. B. $\div a \div b \div d$, so ist, weil $a+d=2b$, $a=2b-d$, $d=2b-a$, und $b=\frac{a+d}{2}$, d. h. es ist jedes äußere Glied gleich dem Unterschiede zwischen dem doppelten mittleren Gliede und dem bekannten äußern; die mittlere arithmetische Proportionale zwischen zwey Größen a und d aber ist gleich der halben Summe der beyden gegebenen Größen.

Es sey z. B. $\div 3 \div 5 \div x$, so ist $x=2.5-3=10-3=7$, mithin $\div 3 \div 5 \div 7$.

Es sey $\div 4 \div x \div 20$, so ist $x=\frac{4+20}{2}=12$, also $\div 4 \div 12 \div 20$.

II. Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 161.

1) Wenn man zwey gleichartige Größen a und b mit einander vergleicht, um zu sehen, wie die eine aus der andern durch Multiplication entsteht, so betrachtet man ihr geometrisches Verhältniß, und die beyden Größen a und b heißen die Glieder desselben.

2) Da das geometrische Verhältniß der Größen a und b von der Zahl abhängt, welche anzeigt, wie vielmahl a in b, oder b in a enthalten ist, so können wir dieses Verhältniß durch a:b oder durch b:a andeuten. Drücken wir dieses Verhältniß durch a:b aus (welches gelesen wird: a verhält sich geometrisch zu b, oder schlechtweg a verhält sich zu b); so heißt a das Vorderglied und b das Hinterglied.

3) Zwar ist es gleichgültig, ob man sich das Vorderglied aus dem Hintergliede, oder dieses aus jenem durch Multiplication entsprungen denkt; wir werden uns aber immer das Vorderglied aus dem Hintergliede entstehen denken. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft das Hinterglied im Vordergliede enthalten ist, nennt man den Exponenten oder den Quotienten des Verhältnisses. So z. B. ist 5 der Ex-

Digitized by Google

ponent des geometrischen Verhältnisses 30:6, und $^3/_8$ ist der Exponent des Verhältnisses 3:8.

Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses wird demnach gefunden, wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied dividirt; nähmlich es ist $\frac{a}{b}$ der Exponent des Verhältnisses a:b. — Setzen wir $\frac{a}{b} = q$, also $a = bq$, so ist $bq : b$ die allgemeine Form des geometrischen Verhältnisses.

4) Zwey geometrische Verhältnisse heißen gleich, wenn sie einerley Exponenten haben, wie z. B. die Verhältnisse 18:6 und 24:8, welche den gemeinschaftlichen Exponenten 3 haben; im entgegengesetzten Falle heißen die Verhältnisse ungleich, und zwar ist jenes das größere, welches den größern Exponenten hat. So z. B. ist das Verhältniß $30:5 > 48:12$, weil $\frac{30}{5} = 6 > \frac{48}{12} = 4$ ist.

Sind die beyden Glieder eines geometrischen Verhältnisses einander gleich, oder ist der Exponent eines geometrischen Verhältnisses $= 1$, so heißt das Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, wie z. B. 8:8.

5) Das geometrische Verhältniß ist entweder rational oder irrational, je nachdem der Exponent desselben eine rationale oder irrationale Zahl ist. So z. B. ist 20:5 ein rationales Verhältniß, weil der Exponent $\frac{20}{5} = 4$ eine rationale Zahl ist. Eben so ist auch $\sqrt{24} : \sqrt{6}$ ein rationales Verhältniß, obgleich beyde Glieder irrational sind; denn der Exponent dieses Verhältnisses ist $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$, also eine rationale Zahl. Dagegen sind $3 : \sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{2}$ irrationale Verhältnisse, weil die Exponenten $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{12}{2}} = \sqrt[3]{6}$ Irrational-Zahlen sind.

6) Kehrt man die Ordnung der Glieder eines geometrischen Verhältnisses um, macht man nähmlich das Vorderglied zum Hinterglied, und dieses zum Vorderglied; so heißt dieses Verhältniß das umgekehrte oder indirecte, und das vorige das gerade oder directe. So z. B. ist b:a das umgekehrte Verhältniß in Bezug auf a:b, und dieses das gerade in Bezug auf jenes.

Digitized by Google

7) Wenn $a:b = \frac{a}{b} = q$ ist, so ist $a = bq$, und $b = \frac{a}{q}$, d. h. das Vorderglied eines geometrischen Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede, multiplizirt mit dem Exponenten, und das Hinterglied wird gefunden, wenn man das Vorderglied durch den Exponenten dividirt. Sind also von den drey Größen a, b, q zwey gegeben, so kann die dritte immer gefunden werden.

§. 162.

Die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse nennt man eine geometrische Proportion. Sind demnach a und b, c und d gleichartige Größen, und ist $a:b = c:d$; so nennt man diese Gleichung eine geometrische Proportion, die also aus 4 Gliedern besteht, wovon das erste und dritte, nähmlich a und c die beyden Vorderglieder, das zweyte und vierte aber, nähmlich b und d, die beyden Hinterglieder heißen; a und d heißen die äußern, b und c die mittlern Glieder. Die Vorderglieder sowohl als die beyden Hinterglieder nennt man gleichnahmige (homologe) Glieder.

Sind die beyden mittlern Glieder einander gleich, hat man nähmlich:

$a:b = b:d$, oder wie man kürzer zu schreiben pflegt:

$\div a:b:d$; so heißt die Proportion stätig. In diesem Falle nennt man d die dritte stätige geometrische Proportionale zu a und b, und b nennt man die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und d.

Die Proportion $a:b = c:d$ wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, und die stätige Proportion $\div a:b:d$ liest man: a verhält sich zu b, wie b zu d.

Zusatz 1.

Die geometrische Proportion sagt also ihrer Natur nach aus: Wie das erste Glied aus dem zweyten entspringt, eben so entsteht auch das dritte Glied aus dem vierten, oder: das dritte Glied ist vom vierten das eben so vielfache oder der eben so vielste Theil, das Wievielfache oder der wie vielste Theil das erste Glied vom zweyten ist. Dieser Satz ist gleichsam ein Prüfstein für die Gültigkeit einer gegebenen Proportion, denn er zeigt, ob vier der Ordnung

Digitized by Google

und dem Werthe nach gegebene Größen wahrhaft geometrisch proportional seyen oder nicht.

Zusatz 2.

Die beyden Größen, welche im geometrischen Verhältnisse betrachtet werden, müssen nothwendig immer gleichartig seyn; also müssen sich a und b, eben so c und d auf Einheiten derselben Art beziehen, übrigens können c und d von einer ganz andern Art seyn als a und b; z. B. a und b können sich auf irgend eine Gewichtseinheit, c und d aber auf irgend eine Münzeinheit, oder auf irgend eine Längeneinheit u. s. w. beziehen, oder es können alle vier Glieder, oder bloß die Glieder des einen Verhältnisses einer Proportion auch unbenannte Zahlen seyn. So z. B. ist

I. 40 ℔ : 8 ℔ = 65 fl. : 13 fl. eine wahre Proportion; denn es ist $\frac{40}{8} = \frac{65}{13} = 5$, es sind nähmlich 8 ℔ . 5 = 40 ℔, und 13 fl. . 5 = 65 fl.

Eben so ist II. 12 Ellen : 30 Ell. = 8 Ell. : 20 Ell. eine richtige Proportion, denn es ist $\frac{12}{30} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$; so wie nähmlich 12 Ellen aus 30 Ellen erhalten werden, eben so erhält man auch 8 Ellen aus 20 Ellen.

Ferner ist III. 15 Maß : 60 Maß = 3 : 12 eine richtige Proportion, denn $\frac{15}{60} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Endlich ist auch IV. 9 : 16 = 45 : 80 eine richtige Proportion, weil $\frac{9}{16} = \frac{45}{80}$.

Alle Proportionen lassen sich also auf 4 Hauptgattungen zurückführen.

§. 163.

Das geometrische Verhältniß zweyer Größen a und b wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man beyde Glieder desselben mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt.

Denn es sey $\frac{a}{b} = q$, also $a = bq$; so ist, weil Gleiches mit Gleichem multiplizirt oder dividirt wieder Gleiches gibt, auch $am = bq . m = bm . q$, und $\frac{a}{n} = \frac{bq}{n} = \frac{b}{n} . q$, und hieraus folgt $\frac{am}{bm} = q = \left(\frac{a}{n} : \frac{b}{n}\right) = \frac{a}{b}$, mithin $a : b = am : bm = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$,

Digitized by Google

d. i. diese drey Verhältnisse sind einander gleich, weil sie denselben Exponenten q haben.

Zusatz 1.

Es sey $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, wo A und B was immer für zwey gleichartige Größen, und a und b zwey unbenannte Zahlen bezeichnen, so ist

$$A : B = a : b.$$

Denn es sey $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = q$, so ist $A = aq$ und $B = bq$; und da nach unserem vorigen Satze

$a : b = aq : bq$, so ist auch durch Substitution

$a : b = A : B$, oder $A : B = a : b$,

d. h. sind zwey Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ einander gleich, so verhalten sich die Dividende wie ihre Divisoren.

Sind demnach zwey Brüche einander gleich, so verhalten sich ihre Zähler wie ihre Nenner. Weil z. B. $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$, so ist auch

$$5 : 35 = 8 : 56, \text{ oder } 35 : 5 = 56 : 8.$$

Zusatz 2.

Umgekehrt muß, wenn $A : B = a : b$ ist, auch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ oder $A : a = B : b$ seyn. Denn da die Verhältnisse A : B und a : b einander gleich seyn sollen, so müssen sie einerley Exponenten q haben, oder es muß $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = q$ seyn. Hieraus folgt $A = Bq$ und $a = bq$, mithin ist auch $\frac{A}{a} = \frac{Bq}{bq} = \frac{B}{b}$, oder $A : a = B : b$.

So z. B. ist, weil 70 fl. : 10 fl. = 91 : 13, auch

$$70 \text{ fl.} : 91 = 10 \text{ fl.} : 13.$$

Zusatz 3.

Da $a : b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$, so ist auch umgekehrt $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b$, d. h. zwey Brüche von einerley Nenner verhalten sich wie ihre Zähler.

So z. B. ist $\frac{5}{8} : \frac{7}{8} = 5 : 7$.

Digitized by Google

Zusatz 4.

Jedes rationale Verhältniß läßt sich durch das Verhältniß zweyer ganzen Zahlen ausdrücken. — Denn haben die Größen A und B ein Rational-Verhältniß, so muß sowohl $\frac{A}{B}$ als auch $\frac{B}{A}$ eine rationale Zahl seyn.

Es sey also $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind,

so ist $\frac{B}{A} = 1 : \frac{A}{B} = 1 : \frac{m}{n} = \frac{n}{m}$,

folglich $A = \frac{m}{n} . B = m . \frac{B}{n}$, und $B = \frac{n}{m} . A = n . \frac{A}{m}$,

oder $\frac{A}{m} = \frac{B}{n}$, oder $\frac{B}{n} = \frac{A}{m}$,

also A : B = m : n (nach Zus. 1.), oder B : A = n : m.

Zusatz 5.

Setzt man den Quotienten $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = M$, so ist $A = mM$, und $B = nM$, also auch $\frac{A}{M} = m$ und $\frac{B}{M} = n$, d. i. es ist M ein gemeinschaftliches Maß von A und B. Wenn demnach zwey Größen A und B ein rationales Verhältniß zu einander haben, so haben sie auch ein gemeinschaftliches Maß M. —

Auch der umgekehrte Satz ist richtig: Wenn zwey Größen A und B ein gemeinschaftliches Maß M haben, so bilden sie ein rationales Verhältniß.

Denn es sey $\frac{A}{M} = m$ und $\frac{B}{M} = n$, wo also m und n ganze Zahlen seyn müssen, so ist $A = m . M$ und $B = n . M$, mithin $M = \frac{A}{m} = \frac{B}{n}$; also ist nach Zus. 1. A : B = m : n; aber m : n ist ein Rational-Verhältniß, folglich ist auch A : B ein Rational-Verhältniß.

Zusatz 6.

Da das geometrische Verhältniß seinem Werthe nach nicht geändert wird, wenn man beyde Glieder desselben mit derselben Zahl multiplizirt oder dividirt; so ist

Digitized by Google

$$\frac{A}{N} : \frac{A}{n} = \frac{A}{N} \cdot Nn : \frac{A}{n} \cdot Nn = \frac{ANn}{N} : \frac{ANn}{n} = An : AN,$$

$$= \frac{An}{A} : \frac{AN}{A} = n : N,$$

nähmlich $\frac{A}{N} : \frac{A}{n} = n : N$, d. h. zwey Brüche von einerley Zähler verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner.

Zusatz 7.

Es ist 60 ℔ : 12 ℔ = 35 : 7 eine wahre Proportion, die sich auch so darstellen läßt: 60 ℔ : 12 ℔ $= \frac{35}{7} : \frac{7}{7} = 5 : 1 =$ $= 5 \cdot 12 : 1 \cdot 12 = 60 : 12$, d. i. 60 ℔ : 12 ℔ = 60 : 12. Also verhalten sich zwey benannte Zahlen, die sich auf einerley Einheit beziehen, wie die zugehörigen unbenannten Zahlen.

§. 164.

Wenn vier Zahlen geometrisch proportionirt sind, so ist das Product der beyden äußern Glieder gleich dem Producte der beyden mittlern, und umgekehrt: Sind zwey Producte einander gleich, so läßt sich aus den Factoren derselben eine geometrische Proportion bilden, indem man die beyden Factoren des einen Productes zu Mittelgliedern, und die des andern zu äußern Gliedern nimmt, oder kürzer: so sind die Factoren der beyden Producte umgekehrt proportional.

Denn es sey a : b = c : d die gegebene Proportion; so muß $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§. 161) seyn, und beyde Brüche mit bd multiplizirt, erhält man $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$, oder ad = cb = bc.

Dividirt man umgekehrt die Gleichung ad = bc durch bd, so erhält man $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, mithin a : b = c : d.

Zusatz 1.

Ist die Proportion stätig, also b = c, so erhält man $ad = b^2$, d. h. **in jeder stätigen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes.**

Digitized by Google

Umgekehrt ist, wenn $b^2 = ad$, $\div a : b : d$, d. h. wenn das Quadrat einer Zahl b einem Producte aus zwey Factoren a und d gleich ist, so ist b die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Factoren a und d.

Zusatz 2.

Aus der Proportion $a:b=c:d$ folgt $ad = bc$, und hieraus erhält man:

$$a = \frac{bc}{d}, \text{ oder } d = \frac{bc}{a},$$

$$\text{und } b = \frac{ad}{c}, \text{ oder } c = \frac{ad}{b}.$$

Es wird demnach ein äußeres Glied (a oder d) einer Proportion gefunden, wenn man das Product der Mittelglieder durch das bekannte äußere Glied dividirt; ein mittleres Glied (b oder c) aber wird gefunden, wenn man das Product der äußern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.

Diese beyden Sätze enthalten die Regel, welche man gewöhnlich die Regel de Tri nennt.

Soll man z. B. zu den Zahlen 4, 13 und 20 die vierte Proportional-Zahl (x) finden, oder soll man in der Proportion $4:13=20:x$ das vierte Glied bestimmen, so findet man $x = \frac{13 \cdot 20}{4} = 65$. — Eben so findet man aus der Proportion $7:19=x:76$, das fehlende mittlere Glied $x = \frac{7 \cdot 76}{19} = 28$.

Zusatz 3.

Aus der Proportion $\div a:b:d$ folgt $ad = b^2$, und hieraus finden wir $a = \frac{b^2}{d}$, oder $d = \frac{b^2}{a}$

und $b = \sqrt{ad}$.

Also wird in jeder stätigen Proportion ein äußeres Glied gefunden, wenn man das Quadrat des mittleren Gliedes durch das bekannte äußere Glied dividirt, und die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwey Zahlen a und d wird gefunden, wenn

Digitized by Google

man aus dem Producte ad der gegebenen Zahlen die Quadratwurzel auszieht.

Soll z. B. zu den Zahlen 4 und 6 die dritte stätige Proportionale gefunden werden, so erhält man

$$x = \frac{6^2}{4} = \frac{36}{4} = 9, \text{ mithin ist } \div 4 : 6 : 9.$$

Eben so findet man aus der Proportion $\div 9 : x : 16$ die mittlere Proportionale $x = \sqrt{9 . 16} = \sqrt{9} . \sqrt{16}$ (§. 130.) $= 3.4 = 12$; folglich ist $\div 9 : 12 : 16$.

Daß eine mittlere Proportionale zwischen zwey Größen a und d nur dann möglich sey, wenn a und d zugleich positiv oder negativ sind, ist für sich klar.

Zusatz 4.

Weil $(\sqrt{N})^2 = N = 1 . N$; so ist (nach Zus. 1.) $\div 1 : \sqrt{N} : N$, d. h. die Quadratwurzel aus einer Zahl N ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der (primitiven) Einheit und der Zahl N.

Zusatz 5.

Wenn zwey verschiedene Zahlen, auf verschiedene Benennungen bezogen, einander gleich sind, so verhalten sich diese Zahlen umgekehrt wie die Benennungen.

Denn da z. B. 9 Gulden = 2 Ducaten, oder

9 . (1. Gulden) = 2 . (1 Ducaten), so ich auch

1 Gulden : 1 Ducaten = 2 : 9.

* Wenn in der Folge von Verhältnissen und Proportionen schlechtweg die Rede ist, so hat man immer geometrische Verhältnisse und geometrische Proportionen darunter zu verstehen, es müßte denn das Gegentheil ausdrücklich erinnert werden.

** Wir haben demnach zwey Kennzeichen für die Richtigkeit einer Proportion, nähmlich 1) die Gleichheit der beyden Verhältnisse, oder die Gleichheit ihrer Exponenten, und 2) die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder.

§. 165.

1) Wenn a, b, c, d, e und f was immer für gleichartige Größen oder was immer für unbenannte Zahlen sind, und es ist $a : b = c : d = e : f$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = q$; so verhält sich die Summe

Digitized by Google

aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, oder wie der gemeinschaftliche Exponent q zur (primitiven) Einheit. Denn da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = q$, so ist $a = bq$, $c = dq$, $e = fq$, also $a + c + e = bq + dq + fq = (b + d + f)q$, und demnach ist

$$(a + c + e) : (b + d + f) = (b + d + f)q : (b + d + f) = q : 1$$
$$(\S.\ 163.) = bq : b = a : b = c : d = e : f.$$

Das, was wir hier für drey Verhältnisse erwiesen haben, gilt auch für zwey und mehrere gleiche Verhältnisse.

2) Sind demnach A, B, C, D,... was immer für gleichartige Größen, und a, b, c, d,... was immer für bestimmte unbenannte Zahlen, und es ist $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \ldots$, oder $A : a = B : b = C : c = D : d = \ldots$; so ist auch, wie nun für sich klar ist,

$$(A + B + C + D + \ldots) : (a + b + c + d + \ldots) =$$
$$= A : a = B : b = C : c = D : d = \ldots.$$

Zusatz 1.

Statt $A : a = B : b = C : c = D : d$ pflegt man auch $A : B ; C : D = a : b : c : d$ zu schreiben.

Zusatz 2.

Wenn die beyden Verhältnisse a : b und c : d denselben Exponenten q haben, so verhält sich auch die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, oder wie q : 1.

Denn weil $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, so ist $a = bq$, und $c = dq$, demnach

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{bq - dq}{b - d} = \frac{(b - d)q}{b - d} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ also}$$

$$a - c : b - d = a : b = c : d.$$

§. 166.

Multiplizirt man sowohl die Vorderglieder als auch die Hinterglieder mehrerer gegebenen Verhältnisse mit einander, so heißt das Verhältniß der Producte ein zusammengesetztes (componirtes) Verhältniß. Der Exponent eines solchen Verhältnisses ist demnach

Digitized by Google

das Product aus den Exponenten aller Verhältnisse, aus welchen es zusammengesetzt wurde.

Es sey z. B. im Verhältnisse

a:b der Exponent $\frac{a}{b}=p$, oder $a=bp$,

c:d » » $\frac{c}{d}=q$ » $c=dq$,

e:f » » $\frac{e}{f}=r$ » $e=fr$,

g:h » » $\frac{g}{h}=s$ » $g=hs$, so ist im Verhältnisse

$a\,c\,e\,g : b\,d\,f\,h$ der Exponent $\frac{a\,c\,e\,g}{b\,d\,f\,h}=\frac{bp.dq.fr.hs}{b.d.f.h}=pqrs.$

Sind jene Verhältnisse alle einander gleich, ist nähmlich $p=q=r=s$; so heißt das aus ihnen zusammengesetzte Verhältniß das multiplizirte, und zwar das duplizirte, triplizirte .... Verhältniß, je nachdem es aus 2 oder 3 ... gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt wurde. Jedes der gleichen Verhältnisse, aus welchen das multiplizirte entstanden ist, heißt das submultiplizirte.

Zusatz.

Weil wir voraussetzen, daß $a:b=c:d=e:f=g:h=\ldots$ sey; so können wir das eine Verhältniß für das andere setzen, und demnach auch so componiren:

a : b oder c : d u. s. w. und a : b oder c : d oder e : f u. s. w.

$a:b \quad c:d \qquad a:b \quad c:d \quad e:f$

$\overline{a^2:b^2} \quad \overline{c^2:d^2} \qquad \overline{a:b \quad c:d \quad e:f}$

$\overline{a^3:b^3} \quad \overline{c^3:d^3} \quad \overline{e^3:f^3}.$

Also ist das duplizirte Verhältniß das Verhältniß der Quadrate, und das triplizirte das Verhältniß der Würfel der Glieder in irgend einem jener gleichen Verhältnisse. Folglich ist auch umgekehrt das submultiplizirte Verhältniß das Verhältniß der Wurzeln vom zweyten, dritten u. s. w. Grade.

Wenn $\frac{a}{b}=q$, also $\frac{a^m}{b^m}=q^m$ gesetzt wird, so ist

$a:b=q:1$, und $a^m : b^m = q^m : 1$.

Umgekehrt wenn $\frac{A}{B}=Q$, also $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[m]{Q}$ ist, so

Digitized by Google

ist auch

$$A:B=Q:1 \text{ und } \sqrt[m]{A}:\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{Q}:1.$$

* Wie heißen diese Ausdrücke in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt?

§. 167.

Wenn $a:b=c:d$, also $ad=bc$ (§. 164.) ist, so lassen sich diese vier Zahlen acht Mahl versetzen; man erhält nähmlich, wenn

1) $a:b=c:d$, noch folgende richtige Proportionen:
2) $a:c=b:d$, wenn man in (1) die Mitglieder verwechselt;
3) $b:a=d:c$, wenn man in (1) die Verhältnisse umkehrt (invertirt),
4) $b:d=a:c$, wenn man in (2) die Verhältnisse verwechselt,
5) $c:a=d:b$, wenn man in (3) die äußern Glieder verwechselt;
6) $c:d=a:b$, wenn man in (1) die Verhältnisse verwechselt;
7) $d:b=c:a$, wenn man in (4) die Verhältnisse umkehrt, und
8) $d:c=b:a$, wenn man in (2) die äußern Glieder verwechselt;

denn aus allen diesen Proportionen erhält man die als richtig vorausgesetzte Gleichung $ad=bc$.

Wenn die Größen a und b mit c und d nicht gleichartig seyn sollten, so kann man die Glieder des ersten Verhältnisses nicht mit den Gliedern des andern verwechseln, weil ungleichartige Größen kein Verhältniß bilden können. In diesem Falle würden demnach die Proportionen 2, 4, 5 und 7 wegfallen.

§. 168.

1) Wenn a, b, c und d was immer für gleichartige Größen sind, und es ist

$a:b=c:d$, so ist (nach §. 165 und §. 165. Zus. 2.)

$a\pm c:b\pm d=a:b=c:d$, d. h. in jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

2) Da also $a+c:b+d=a:b$, und

$a-c:b-d=a:b$; so ist auch

$a+c:b+d=a-c:b-d$, weil zwey Verhältnisse, die einem und demselben dritten Verhältnisse gleich sind, auch unter sich gleich seyn müssen. Es verhält sich demnach in jeder Proportion $a:b=c:d$ die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder; oder wenn man die mittleren Glieder verwechselt, so erhält man

$$a+c:a-c=b+d:b-d.$$

Digitized by Google

d. h. die Summe der Vorderglieder verhält sich zu ihrem Unterschiede wie die Summe der Hinterglieder zu ihrem Unterschiede.

3) Wenn man in der Proportion $a:b=c:d$ die mittleren Glieder verwechselt, so erhält man $a:c=b:d$, und demnach nach (1)
$a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$, und durch Verwechslung der Mittelglieder
$a \pm b : a = c \pm d : c$, oder
$a \pm b : b = c \pm d : d$.

In jeder Proportion verhält sich demnach die Summe oder Differenz der Glieder eines Verhältnisses zum Vordergliede oder Hintergliede, wie die Summe oder Differenz der Glieder des andern Verhältnisses zum Vorder- oder Hintergliede desselben Verhältnisses.

4) Aus der Proportion $a:b=c:d$ folgt $a:c=b:d$ und hieraus nach (2) $a+b:c+d=a-b:c-d$, und durch Verwechslung der Mittelglieder: $a+b:a-b=c+d:c-d$.

Also verhält sich die Summe der Glieder eines Verhältnisses zur Differenz derselben, wie die Summe der Glieder des andern Verhältnisses zur Differenz derselben.

§. 169.

Wenn A, B, C, D, E.... was immer für gleichartige Größen, und a, b, c, d, e.... ebenfalls lauter gleichartige Größen derselben oder einer andern Art, oder was immer für unbenannte Zahlen sind, und es ist

$$\begin{aligned} B : A &= b : a \\ C : A &= c : a \\ D : A &= d : a \\ E : A &= e : a \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

so also, daß alle diese Proportionen die Hinterglieder gleich haben; so ist auch

$$(B+C+D+E+\ldots) : A = (b+c+d+e+\ldots) : a.$$

Denn es sey $\frac{B}{A} = \frac{b}{a} = m$, so ist $B = mA$, $b = ma$,

$\frac{C}{A} = \frac{c}{a} = n$, » » $C = nA$, $c = na$,

$\frac{D}{A} = \frac{d}{a} = p$, » » $D = pA$, $d = pa$,

$\frac{E}{A} = \frac{e}{a} = q$, » » $E = qA$, $e = qa$,

. . . . . .

Digitized by Google

und da Gleiches zu Gleichem addirt, wieder Gleiches gibt, so ist

$$(B+C+D+E+\ldots) = mA+nA+pA+qA+\ldots = (m+n+p+q+\ldots)A,$$

und $(b+c+d+e+\ldots) = ma+na+pa+qa+\ldots = (m+n+p+q+\ldots)a$

also $\frac{(B+C+D+E+\ldots)}{A} = m+n+p+q+\ldots = \frac{(b+c+d+e+\ldots)}{a}$,

folglich $(B+C+D+E+\ldots) : A = (b+c+d+e\ldots) : a$.

Zusatz.

Wenn $(B+C+D+E+\ldots) : A = (b+c+d+e\ldots) : a$, so ist (nach §. 168. 3.)

$(A+B+C+D+E+\ldots) : A = (a+b+c+d+e+\ldots) : a$.

§. 170.

Die geometrische Proportionalität von vier Größen wird nicht gestört, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied der Proportion zugleich mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt.

Denn es sey $a:b = c:d$ die gegebene Proportion, und

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, so ist auch

$\frac{a.m}{b.m} = \frac{c}{d} = q$, also $am:bm = c:d$,

oder auch $\frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d} = q$, also $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c:d$,

eben so $\frac{a}{b} = \frac{c.m}{d.m} = \frac{c:n}{d:n} = q$, also $a:b = cm:dm$,

oder $a:b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$,

allgemein $\frac{a.\frac{m}{n}}{b.\frac{m}{n}} = \frac{c}{d} = q$, also $\frac{a.m}{n} : \frac{b.m}{n} = c:d$,

oder $\frac{a}{b} = \frac{c.\frac{m}{n}}{d.\frac{m}{n}} = q$, also $a:b = \frac{cm}{n} : \frac{dm}{n}$.

Verwechselt man die Mittelglieder der gegebenen Proportion, so

erhält man $a : c = b : d$, und demnach ist auf dieselbe Art, wie vorhin:

$$\frac{am}{n} : \frac{cm}{n} = b : d, \text{ also auch } \frac{am}{n} : b = \frac{cm}{n} : d,$$

oder $a : c = \frac{bm}{n} : \frac{dm}{n}$, also auch $a : \frac{bm}{n} = c : \frac{dm}{n}$,

wenn die Mittelglieder wieder verwechselt (alternirt) werden.

Zusatz 1.

Diese Eigenschaft der Proportionen biethet uns ein Mittel dar, aus einer gegebenen Proportion die Brüche wegzuschaffen, und die Glieder derselben so einfach als möglich darzustellen.

Es sey z. B. die Proportion:

$$6\frac{6}{7} : 3\frac{1}{3} = 5\frac{5}{8} : \frac{x}{9},$$

oder $\frac{48}{7} : \frac{10}{3} = \frac{45}{8} : \frac{x}{9}$ gegeben; so ist auch, wenn man die Vorderglieder mit 56, und die Hinterglieder mit 9 multiplizirt,

$$\frac{48}{7} \cdot 56 : \frac{10}{3} \cdot 9 = \frac{45}{8} \cdot 56 : \frac{x}{9} \cdot 9,$$

oder $48.8 : 10.3 = 45.7 : x$, und wenn man die Glieder des ersten Verhältnisses durch 6 dividirt:

$$\frac{48.8}{6} : \frac{10.3}{2.3} = 45.7 : x$$

d. i. $8.8 : 5 = 45.7 : x$

oder $64 : 5 = 315 : x$.

Zusatz 2.

Wenn man in der Proportion $m.A : nB = C : D$ die Vorderglieder durch m und die Hinterglieder durch n dividirt, so erhält man

$$A : B = \frac{C}{m} : \frac{D}{n},$$

und die Glieder des zweyten Verhältnisses mit mn multiplizirt, so ist

$$A : B = Cn : Dm.$$

Vergleicht man diese Proportion mit der gegebenen, so sieht man, daß der Proportionalität unbeschadet ein Factor aus einem äußern Gliede in das andere äußere, und aus einem mittleren Gliede ins andere Mittelglied versetzt werden könne.

Digitized by Google

Zusatz 3.

Statt der Proportion $A : B = C : D$,
kann man auch setzen $A.m : B = C.m : D$,

oder 1) $A.m : B = C : \frac{D}{m}$,

oder auch 2) $A : \frac{B}{m} = Cm : D$.

Hieraus erhellt, daß die Proportionalität von vier Größen nicht gestört werde, wenn man das eine äußere Glied durch irgend eine Zahl multiplizirt, und das andere äußere Glied durch eben diese Zahl dividirt, oder wenn man das eine mittlere Glied mit irgend einer Zahl multiplizirt, und das andere mittlere Glied durch dieselbe Zahl dividirt.

Zusatz 4.

Aus den Proportionen

$$\begin{aligned} A &: A = a : a \\ B &: A = b : a \\ C &: A = c : a \\ D &: A = d : a \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} p.A &: A = pa : a \\ q.B &: A = qb : a \\ r.C &: A = rc : a \\ s.D &: A = sd : a \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

also auch (nach §. 169)

$$(p.A + qB + r.C + sD + \ldots) : A = (p.a + q.b + r.c + sd + \ldots) : a.$$

Zusatz 5.

Da (nach §. 165. Zus. 1.)

$A:B:C:D:E:\ldots = a:b:c:d:e:\ldots$ so viel ist als

$A:a = B:b = C:c = D:d = E:e =$ ꝛc.

oder

$$\left.\begin{aligned} A:a &= B:b \\ A:a &= C:c \\ A:a &= D:d \\ A:a &= E:e \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\}$$

oder durch Alterniren

$$\left\{\begin{aligned} A:B &= a:b \\ A:C &= a:c \\ A:D &= a:d \\ A:E &= a:e \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

oder durch Umkehren aller Verhältnisse

Digitized by Google

$$B : A = b : a$$
$$C : A = c : a$$
$$D : A = d : a$$
$$E : A = e : a$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so ist, wenn $A:B:C:D:E = a:b:c:d:e$ ist,
(nach §. 169. Zus)

$$(A+B+C+D+E):A = (a+b+c+d+e):a,$$

also auch (nach Zus. 3.)

$$(pA+qB+rC+sD+t.E):A = (pa+qb+r.c+s.d+t.e):a.$$

Hieraus folgt aber

$$(pA+qB+r.C+sD+t.E):(pa+qb+rc+sd+te) = A:a = B:b = C:c = \text{&c.}$$

also ist auch

$$(pA+qB+r.C+sD+tE):A:B:C:D:E = (pa+qb+rc+sd+te) : a:b:c:d:e.$$

§. 171.

Wenn zwey Proportionen gleiche Exponenten haben, so sind auch die Summen und die Differenzen der gleichnahmigen Glieder proportional, d. h. wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = q$, wenn also

$$a : b = c : d = q$$
$$\text{und } e : f = g : h = q,$$

so ist auch $a \pm e : b \pm f = c \pm g : d \pm h$ eine richtige Proportion.

Denn da der Voraussetzung gemäß

$$a = bq,\ c = dq,\ e = fq \text{ und } g = hq;$$

so ist $\frac{a \pm e}{b \pm f} = \frac{bq \pm fq}{b \pm f} = \frac{(b \pm f)q}{(b \pm f)} = q,$

und $\frac{c \pm g}{d \pm h} = \frac{dq \pm hq}{d \pm h} = \frac{(d \pm h)q}{d \pm h} = q,$

mithin $\frac{a \pm e}{b \pm f} = \frac{c \pm g}{d \pm h}$, folglich $a \pm e : b \pm f = c \pm g : d \pm h$, was zu erweisen war.

Dieser Satz ist auch noch gültig, wenn man mehrere Proportionen, die alle denselben Exponenten haben, auf diese Art mit einander verbindet.

Digitized by Google

§. 172.

Wenn man die gleichnahmigen Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen mit einander multiplizirt, so bilden auch die so erhaltenen Producte wieder eine richtige Proportion, nähmlich wenn

$$a : b = c : d = p$$
$$e : f = g : h = q$$
$$i : k = l : m = r,$$

so ist auch $aei : bfk = cgl : dhm$,

Denn es ist $\frac{aei}{bfk} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{i}{k} = p.q.r$,

und auch $\frac{cgl}{dhm} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{l}{m} = p.q.r$,

d. i. beyde Verhältnisse haben gleiche Exponenten, und bilden demnach eine wahre Proportion.

Dieses Verfahren heißt man: Proportionen zusammen setzen.

Zusatz 1.

Es sey $A : x = a : b$.
$x : y = c : d$
$y : z = e : f$

so ist $Axy : xyz = ace : bdf$,

und (nach §. 162.) $\frac{Axy}{xy} : \frac{xyz}{xy} = ace : bdf$

oder $A : z = ace : bdf$.

Solche Verhältnisse, wie $A:x$, $x:y$, $y:z$, u. s. f. nennt man aneinander hängende Verhältnisse, und das aus ihnen zusammengesetzte Verhältniß $Axy : xyz$ ist immer gleich dem Verhältnisse des ersten Vordergliedes zum letzten Hintergliede, nähmlich $= A : z$.

Zusatz 2.

Verhältnisse, welche nicht an einander hängen, können an einander hängend gemacht werden, wenn man die Glieder eines jeden Verhältnisses mit dem Producte der Hinterglieder aller vorhergehenden, und dem Producte der Vorderglieder aller folgenden Verhältnisse multiplizirt. Sollte man z. B. die Verhältnisse $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$ $i:k$ an einander hängend machen, so erhält man

Digitized by Google

$a : b = a \,.\, cegi : b \,.\, cegi = acegi : bcegi$
$c : d = c \,.\, begi : d \,.\, begi = bcegi : bdegi$
$e : f = e \,.\, bdgi : f \,.\, bdgi = bdegi : bdfgi$
$g : h = g \,.\, bdfi : h \,.\, bdfi = bdfgi : bdfhi$
$i : k = i \,.\, bdfh : k \,.\, bdfh = bdfhi : bdfhk.$

wo die letzten Verhältnisse an einander hängend sind, und das aus ihnen zusammen gesetzte Verhältniß ist $acegi : bdfhk$, also dasselbe wie das aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesetzte.

Zusatz 3.

Verbindet man durch Multiplication folgende Proportionen,

$a : b = m : n$
$b : c = n : p$
$c : d = p : q$
$d : e = q : r$; so erhält man die zusammengesetzte Proportion

$a : e = m : r.$

Aber durch Zusammensetzung der Proportionen

$a : b = m : n$
$b : c = p : m$
$c : d = q : p$
$d : e = r : q$, erhält man

$$a : e = mpqr : nmpq = \frac{mpqr}{mpq} : \frac{nmpq}{mpq},$$

d. i. $a : e = r : n.$

Man kann demnach beym Zusammensetzen mehrerer Proportionen überhaupt die den Vorder- und Hintergliedern der gleichnahmigen (der ersten oder zweyten) Verhältnisse gemeinschaftlichen Factoren gleich durchstreichen. Z. B. wenn man die Proportionen

$7 \cdot 8 : 9 \cdot 3 = 11 : x$
$3 \cdot 13 : 7 \cdot 4 = 12x : 3y$ zusammensetzt, so schreibe man gleich

$2 \cdot 13 : 9 = 11 \cdot 4 : y$, oder
$13 : 9 = 11 \cdot 2 : y$
d. i. $13 : 9 = 22 : y.$

Digitized by Google

Zusatz 4.

Wenn also $a : b = c : d$

$a : b = c : d$

so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$

$a : b = c : d$

also auch $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$

$a : b = c : d$

und $a^4 : b^4 = c^4 : d^4$,

folglich, wenn man dieselbe Proportion n Mahl zusammensetzt, so ist auch $a^n : b^n = c^n : d^n$ eine richtige Proportion. Die Richtigkeit dieser Proportion läßt sich auch auf folgende Art erweisen. Wenn $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, mithin auch $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n = q^n$, oder $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = q$, folglich $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Wenn also 4 Zahlen proportional sind, so bilden auch ihre gleichnahmigen Potenzen eine wahre Proportion.

Zusatz 5.

Aus der Proportion $a^n : b^n = c^n : d^n$ folgt, daß auch

(α) $b^n : a^n = d^n : c^n$,

oder weil $b^n : a^n = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n}$,

und $d^n : c^n = \frac{1}{c^n} : \frac{1}{d^n}$,

(§. 163. Zus. 6.), so können wir statt der Proportion (α) auch setzen:

$$\frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{c^n} : \frac{1}{d^n},$$

d. i. $a^{-n} : b^{-n} = c^{-n} : d^{-n}$ (§. 71. 3.),

also ist der im vorigen Zusatze angeführte Satz auch dann noch gültig, wenn der Potenz-Exponent negativ ist.

Zusatz 6.

Ist also $A : B : C : D : \ldots = a : b : c : d : \ldots$, so ist auch

$A^n : B^n : C^n : D^n : \ldots = a^n : b^n : c^n : d^n : \ldots$

es mag n was immer für eine ganze positive oder negative Zahl seyn.

Digitized by Google

Zusatz 7.

Wenn a, b, c, d lauter positive Zahlen, n aber eine ganze positive Zahl ist, und wenn

$$a : b = c : d$$

so ist auch $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Denn weil $a : b = c : d$, so ist

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich auch $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, oder $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$ (§. 129)

also auch $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$,

d. h. wenn man aus allen Gliedern einer Proportion dieselbe Wurzel auszieht, so wird die Proportionalität nicht gestört.

Zusatz 8.

Es ist demnach auch, wenn man die Verhältnisse der letzten Proportion umkehrt:

$\sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{d} : \sqrt[n]{c}$, oder, was (nach §. 163. Zus. 6) einerley ist

$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} : \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} : \frac{1}{\sqrt[n]{d}}$, d. i. (nach §. 130.)

$\sqrt[-n]{a} : \sqrt[-n]{b} = \sqrt[-n]{c} : \sqrt[-n]{d}$.

Der im letzten Zusatze aufgestellte Satz gilt demnach auch dann noch, wenn der Wurzel-Exponent negativ ist.

Zusatz 9.

Ist $a : b = c : d$; so ist (nach Zusatz 8) auch

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$, und (nach Zus. 5)

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m : \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{c}\right)^m : \left(\sqrt[n]{d}\right)^m$,

oder $\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} : \sqrt[n]{d^m}$,

oder $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} : = c^{\frac{m}{n}} : d^{\frac{m}{n}}$,

d. i. die Proportionalität von n Zahlen wird nicht gestört, wenn man aus jeder derselben die nähmliche Wurzel auszieht, und sie dann auf irgend eine und dieselbe Potenz erhebt, oder wenn man umgekehrt ver-

Digitized by Google

fährt; oder wenn man jedes Glied der gegebenen Proportion auf irgend eine Potenz mit gebrochenen Exponenten erhebt. — Daß hier m und n was immer für ganze positive oder negative Zahlen seyn können, leuchtet nun von selbst ein.

Zusatz 10.

Wenn demnach $A:B:C:D: = a:b:c:d$, so ist auch

$$\sqrt[n]{A^m}:\sqrt[n]{B^m}:\sqrt[n]{C^m}:\sqrt[n]{D^m} = \sqrt[n]{a^m}:\sqrt[n]{b^m}:\sqrt[n]{c^m}:\sqrt[n]{d^m}.$$

§. 173.

1) Wenn $a:b = cd:ef$ und $d:f = m:n$; so ist auch $a:b = cm:en$.

Denn da $\frac{d}{f} = \frac{m}{n}$ vermöge der Voraussetzung, so ist auch $\frac{d}{f} \cdot \frac{c}{e} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{e}$, oder $\frac{cd}{ef} = \frac{cm}{en}$, also $cd:ef = cm:en$, folglich ist auch $a:b = cm:en$.

2) Wenn man die gleichnahmigen Glieder zweyer Proportionen durch einander dividirt, so bilden auch die Quotienten wieder eine richtige Proportion. Denn es sey

$$a:b = c:d, \text{ also } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$$

$$\text{und } e:f = g:h, \text{ " } \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = q,$$

so ist auch $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$,

$$\text{weil } \frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{a}{e} \cdot \frac{f}{b} = \frac{af}{eb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} = p:q = \frac{p}{q},$$

$$\text{und auch } \frac{c}{g} : \frac{d}{h} = \frac{c}{g} \cdot \frac{h}{d} = \frac{ch}{gd} = \frac{c}{d} \cdot \frac{h}{g} = \frac{c}{d} : \frac{g}{h} = p:q = \frac{p}{q}.$$

Es sey z. B. $6 : 35 = 20 : 9x^2$

und $3 : 7 = 5 : 9x$

so ist auch $\frac{6}{3} : \frac{35}{7} = \frac{20}{5} : \frac{9x^2}{9x}$,

oder $2 : 5 = 4 : x$,

oder $1 : 5 = 2 : x$.

Digitized by Google

§. 174.

1) Wenn die Hinterglieder einer Proportion der Vorderglieder einer andern Proportion gleich sind, so sind die übrigen Glieder beyder Proportionen gerade proportional.

Denn es sey $a : b = c : d$

und $b : m = d : n$; so ist auch nach §. 172

$ab : bm = cd : dn$, oder nach §. 163

$a : m = c : n$.

Dieser Satz erhellt übrigens unmittelbar aus §. 172. Zus. 3.

2) Wenn zwey Proportionen die Vorderglieder oder die Hinterglieder gleich haben, so sind im ersten Falle die Hinterglieder, im andern aber die Vorderglieder direct proportional.

Es sey z. B. α) $a : b = c : d$, und

$a : m = c : n$;

so ist (nach §. 173. 2.) $\frac{a}{a} : \frac{b}{m} = \quad : \frac{d}{n}$,

oder $1 : \frac{b}{m} = 1 : \frac{d}{n}$,

oder (nach §. 170.) $1 . m : \frac{b}{m} . m = 1 . n : \frac{d}{n} . n$,

d. i. $m : b = n : d$,

oder durch Umkehrung $b : m = d : n$.

Hat man aber β) $a : b = c : d$ und

$m : b = n : d$;

so erhält man eben so $\frac{a}{m} : 1 = \frac{c}{n} : 1$,

oder $a : m = c : n$.

3) Wenn die Mittelglieder einer Proportion den äußern Gliedern einer andern gleich sind, so sind die äußern Glieder der ersten Proportion den Mittelgliedern der zweyten umgekehrt proportional. Denn wenn

$a : b = c : d$

und $b : m = n : c$; so ist (nach §. 171. Zus. 3.)

$a : m = n : d$.

4) Haben zwey Proportionen die äußern oder die mittlern Glieder wechselseitig gleich; so sind im ersten Falle die mittlern, im andern aber die äußern Glieder umgekehrt proportional. Denn es sey α)

$a : b = c : d$

und $a : m = n : d$;

Digitized by Google

so ist $1 : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : 1$ (§. 173. 2)

oder $m : b = c : n$

oder umgekehrt $b : m = n : c$.

Hat man aber β) folgende zwey Proportionen:

$a : b = c : d$

und $m : b = c : n$;

so erhält man $\frac{a}{m} : 1 = 1 : \frac{d}{n}$,

also auch $a : m = n : d$

oder $m : a = d : n$.

III. Anwendung der Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 175.

Die Lehre von den Proportionen ist in der gesammten Mathematik von großer Wichtigkeit, und ihre Anwendung leistet im gemeinen Leben vorzüglich gute Dienste; denn die meisten Dinge, welche in den Rechnungen beym bürgerlichen Leben vorkommen, lassen sich in geometrischen Verhältnissen darstellen. Ob aber in einem gegebenen Falle dieses möglich, und wie es möglich sey, muß die Urtheilskraft des Rechners aus der Natur der Sache entscheiden. So wäre es z. B. ungereimt, aus folgender Angabe eine Proportion zu bilden: Wenn 1 Mensch in 5 Stunden 6 Meilen weit geht, wie weit gehen dann 5 Menschen? — Eben so lassen sich auch folgende Bestimmungen in keine Proportion bringen: »Wenn der Hahn eines mit Wein gefüllten Fasses geöffnet wird, so fließen in 1 Stunde 3 Eimer aus, wie viel Eimer Wein fließen in 4 Stunden aus?« Denn in der 2, 3, 4... fachen Zeit fließt nicht eine 2, 3, 4... Mahl größere Menge Wein aus, weil sich der Druck um so mehr vermindert, je weniger Flüssigkeit noch im Fasse ist, und also auch die Geschwindigkeit immer geringer wird. Jene Bestimmungen ließen sich nur dann in eine Proportion bringen, wenn durch einen Zufluß durch den Spund das Faß immer voll erhalten würde, weil dann das Ausfließen durch den Hahn mit unveränderter Geschwindigkeit erfolgen würde. — Waaren aber und die entsprechenden Preise, Capitalien und die entsprechenden Zinsen, u. s. w. sind wirklich geometrisch proportional, denn eine 2, 3, 4... Mahl größere

Digitized by Google

Menge derselben Waare hat auch einen 2, 3, 4... Mahl größeren Werth, und das 2, 3, 4... Mahl größere Capital bringt in derselben Zeit 2, 3, 4... Mahl mehr Interessen.

§. 176.

Alle benannten Zahlen, welche in einem geometrischen Verhältnisse stehen, lassen sich unter den allgemeinen Benennungen Ursache (Kraft) und Wirkung zusammen fassen. — Ein Ding, welches ein anderes hervorbringt, oder ein anderes seiner Größe nach bestimmt, pflegt man die Ursache oder die Kraft des letzteren zu nennen; dieses aber als das bestimmte heißt man Wirkung. So z. B. ist die größere oder kleinere Quantität (Größe, Menge, Schwere oder Gewicht) der Waare die Ursache des größeren oder kleineren Preises oder Werthes; das größere oder kleinere Capital ist die Ursache des größeren oder kleineren Zinsertrages, und der Zinsertrag die Wirkung des Capitals, u. s. w. Eben so betrachtet man die Arbeiter als Ursache oder wirkende Kraft, und das hervorgebrachte Werk als Wirkung.

Vergleicht man nun die von gleichartigen Kräften hervorgebrachten gleichartigen Wirkungen, so ist für sich einleuchtend, daß die Wirkung um so größer seyn müsse, je größer die sie hervorbringende Kraft ist, und umgekehrt. Es gilt also im Allgemeinen der Satz: Gleichartige Ursachen oder Kräfte verhalten sich wie ihre Wirkungen. Bezeichnen wir jene durch K und k, und diese durch W und w, so ist die Proportion $K:k = W:w$ allgemein gültig.

§. 177.

Das Verfahren, aus 3 gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportional-Zahl zu finden, heißt die Regel de tri (§. 164. Zus. 2.), welche wegen ihrer häufigen und nützlichen Anwendung im bürgerlichen Leben auch goldene Regel genannt wird. Man pflegt sie in die einfache und zusammengesetzte goldene Regel und in die Theilregel einzutheilen. Die goldene Regel heißt einfach, wenn zu 3 gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte unbekannte Glied zu suchen ist, oder wenn zur Bestimmung der unbekannten Größe eine einzige Proportion hinreichend ist. Müssen aber zur Bestimmung der unbekannten Größe mehrere Proportionen gebildet werden, oder muß zum genannten Zwecke die einfache Regel de tri öfters angewendet werden, so heißt sie zusammengesetzt, und

Digitized by Google

zwar insbesondere die Regel von Fünfen, von Sieben, von Neunen u. s. w., je nachdem die einfache Regel de tri 2, 3, 4...Mahl angewendet werden muß, oder je nachdem 5, 7, 9... Größen gegeben sind.

Die Theilregel unterscheidet sich von der zusammengesetzten goldenen Regel dadurch, daß sie die einfache Regel de tri zur Auffindung verschiedener Zahlen mehrmahls anwendet, die zusammengesetzte Regel de tri aber bloß zur Bestimmung einer und derselben Zahl. Die Theilregel lehrt ein gegebenes Ganze in ungleiche Theile nach bestimmten Verhältnissen theilen.

A. Von der einfachen goldenen Regel.

§. 178

Bey jeder Aufgabe über die einfache Regel de tri kommen 4 Größen vor, wovon immer 2 und 2 von einerley Art seyn müssen. Ein Paar solcher Größen ist gegeben, von dem andern Paare ist nur eine gegeben, und die andere ist zu suchen; man setzt an deren Stelle einen der letzten Buchstaben des Alphabets, z, y, x.... Jene Größe, welcher die Frage angehängt wird, heißt Frageglied, und die gesuchte Größe heißt das unbekannte Glied. — Bey dem Ansatze beobachte man folgende Regeln:

1) Vor allem prüfe man mit Berücksichtigung des (§. 175) Gesagten, ob die gegebenen Größen und die Unbekannte wirklich eine Proportion bilden können.

2) Da nur gleichartige Größen eine Proportion bilden können, so hat man bey dem Ansatze einer Proportion in benannten Zahlen zunächst darauf zu sehen, daß in demselben Verhältnisse nicht zwey verschiedenartige Dinge vorkommen. So ist z. B. bey der Aufgabe:

1 Elle kostet 5 fl., was kosten 8 Ellen? der richtige Ansatz dieser:

1 Elle : 8 Ellen = 5 fl. : x fl.

3) Man überlege ferner, ob das Verhältniß, welches das unbekannte Glied enthalt, dem gegebenen Verhältnisse, oder dem umgekehrten gegebenen Verhältnisse gleich sey. Z. B. bey der Aufgabe: »Wenn 6 Arbeiter eine gewisse Arbeit in 9 Wochen fertig bringen, wie viel Arbeiter sind erforderlich, wenn die Arbeit in 4 Wochen fertig werden soll?« ist das Verhältniß der Arbeiter 6 : x nicht dem geraden Verhältnisse der Wochen 9 : 4, sondern dem umgekehrten 4 : 9 gleich; es ist daher der richtige Ansatz dieser:

4 Woch. : 9 Woch. = 6 Arb. : x Arb.

Digitized by Google

Man raisonnirt hier nähmlich also: Je mehr Wochen zur Vollendung der bestimmten Arbeit verwendet werden können, desto weniger Arbeiter sind erforderlich, und umgekehrt: In je weniger Wochen dieselbe Arbeit vollendet werden soll, desto mehr Arbeiter sind erforderlich. Also stehen die Arbeiter mit der Zeit im umgekehrten Verhältnisse. — In einem solchen Falle nennt man die Regel de tri die umgekehrte.

4) Dann reducire man die Glieder eines Verhältnisses auf Einheiten der höchsten, oder, was gewöhnlich wieder vortheilhaft ist, der niedrigsten Benennung, die in einem Gliede vorkommt. So z. B. ist für die Aufgabe: »Wenn 4 ℔, 24 Loth mit 6 fl. 40 kr. bezahlt werden, wie hoch kommen 5 ℔, 20 Loth zu stehen?« der erste Ansatz dieser: 4 ℔, 24 Loth : 5 ℔, 20 Loth = 6 fl. 40 kr. : x fl. und nach unserer Regel $4\frac{3}{4}$ ℔ : $5\frac{1}{8}$ ℔ = $6\frac{2}{3}$ fl. : x fl.

oder: $\frac{19}{4}$ ℔ : $\frac{45}{8}$ ℔ = $\frac{20}{3}$ fl. : x fl.

5) Hierauf suche man die Proportion in den kleinsten ganzen Zahlen darzustellen, indem man (nach §. 170 und den dortigen Zusätzen) zuerst die Brüche wegschafft, und dann ein äußeres und eines der mittlern Glieder durch ein etwaiges gemeinschaftliches Maß dividirt.

6) Ferner lasse man in dem Verhältnisse, welches die Fragezahl enthält, die Benennungen hinweg, welches (nach §. 163. Zus. 7.) erlaubt ist, und deßhalb nothwendig ist, damit das Product aus den mittleren Gliedern keine Ungereimtheit enthält. Die vorige Proportion wird also heißen:

$$\frac{19}{4} : \frac{45}{8} = \frac{20}{3} \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

wo demnach die beyden ersten Glieder unbenannte Zahlen sind, und das Product der Mittelglieder $\frac{20}{3}$ fl. . $\frac{45}{8} = \left(\frac{20}{3} \cdot \frac{45}{8}\right)$ fl. ein verständlicher Ausdruck ist, während $\frac{45}{8}$ ℔ × $\frac{20}{3}$ fl. offenbarer Unsinn wäre.

7) Endlich sucht man das unbekannte Glied nach den (§. 164. Zus. 2 und 3) gegebenen Vorschriften.

Erläuterung dieser Vorschriften durch Beyspiele.

§. 179.

I. 4 ℔, 24 Loth Zucker kosten 6 fl. 40 kr. W. W., was kosten 5 ℔, 20 Loth?

Digitized by Google

Ansatz: 4 ℔, 24 Loth : 5 ℔, 20 Loth = 6 fl. 40 kr. : x fl.

oder $4^3/_4$ ℔ : $5^1/_8$ ℔ = $6^2/_3$ fl. : x fl.

oder $\frac{19}{4}$ ℔ : $\frac{45}{8}$ ℔ = $\frac{20}{3}$ fl. : x fl.

also auch $\frac{19}{4} : \frac{45}{8} = \frac{20}{3}$ fl. : x fl.

$\frac{19}{4} \cdot 8 : \frac{45}{8} \cdot 8 = \frac{20}{3}$ fl. : x fl.

$19 \cdot 2 : 45 = \frac{20}{3}$ fl. : x fl.

$19 \cdot 2 \cdot 3 : 45 = \frac{20}{3}$ fl. 3 : x fl.

38 : 15 = 20 fl. : x fl.

19 : 15 = 10 fl. : x fl.

mithin $x = \frac{15 \cdot 10}{19}$ fl. $= \frac{150}{19}$ fl. $= 7\frac{17}{19}$ fl.

und weil $\frac{17}{19}$ fl. $= \frac{17}{19} \cdot 60$ kr. $= \frac{1020}{19}$ kr. $= 53\frac{13}{19}$ kr., so ist

$$x = 7 \text{ fl. } 53\tfrac{13}{19} \text{ kr.}$$

II. Wie viel fl. C. M. betragen 1173 Mark, 15 Schilling, $4^1/_2$ dl. Hamburger Banko, wenn 200 Mark Banko mit 146 fl. 30 kr. C. M. bezahlt werden?

Ansatz. 200 Mark Banko : 1173 Mark, 15 ßl. 4·5 dl. =
= 146 fl. 30 kr. C. M. : x fl. C. M.

Da das erste Glied die Benennung Mark hat, so reducire man auch das zweyte Glied auf die Benennung Mark, das dritte Glied aber auf die Benennung fl. C. M. — Weil nun 1 Mark = 16 ßl. = = 16.12 Deniers, so steht die Rechnung also:

12	4·5 dl.
	ßl.
16	15·375
	M.
	1173·9609375

daher 200 Mark : 1173·9609375 Mark = 146·5 fl. : x fl.

oder 200 : 1173·9609375 = 146·5 fl. : x fl., folglich

$x = \frac{1173{\cdot}9609375 \times 146{\cdot}5}{200}$ fl. C. M. $= 1173{\cdot}9609375 \times 0{\cdot}7325$ fl.

und wenn wir nur vier Decimalen im Resultate suchen, so erhalten wir:

Digitized by Google

1173·9609 (§. 118.)
5 237=

8217726
352 188
23 479
5 870

x = 859·9263 fl.
——— × 60
55·578. kr.
——— × 4
2·312 dl.;

nähmlich x = 859 fl. 55 kr. 2·3 dl. sehr nahe.

III. Es hat jemand eine Wiese von 5 Joch, 948□°, 18□′ um 2798 fl. 36 kr. gekauft, und überläßt seinem Nachbar 1580□° davon um denselben Preis, wie viel hat der Nachbar zu zahlen?

Proportion:

5 Joch, 948□°, 18□′ : 1580□° = 2798 fl. 36 kr. : x fl.

Da hier das Frageglied bloß die Benennung Quadratklafter enthält, so bringe man auch das erste Glied auf eben diese Benennung.

Weil nun 1 Joch 1600□° enthält, und 1□° = 36□′ ist, so sind 5 Joch 948□°, 18□′ = 8948·5 □°, und man erhält die Proportion:

8948·5□° : 1580□° = 2798·6 fl. : x fl.
oder 8948·5 : 1580 = 2798·6 fl. : x fl.
oder 1789·7 : 316 = 2798·6 fl : x fl.

mithin $x = \frac{2798.6 \times 316}{1789.7}$ fl.

2798·6 × 316 (§. 48. Zus. 6.)
83958..

884357·6 fl. : 1,7,8,9,·7 = 494·138 fl.
(§. 120.) 168477 ——— × 60
=7404 8·28. kr.
=245 — × 4
66 1·12 dl.
13

nähmlich x = 494 fl. 8 kr. 1 dl. beynahe.

Digitized by Google

IV. Eine Festung ist mit Proviant für 1500 Mann auf 8 Monathe versehen, wie lange wird jener Vorrath zureichen, wenn nur 1200 Mann die Festung besetzen?

Hier hat man ein Beyspiel über die umgekehrte Regel de tri, denn je kleiner die Besatzung ist, desto länger wird derselbe Vorrath an Lebensmitteln zureichen, und umgekehrt. Man erhält demnach die Proportion:

1200 Mann : 1500 Mann = 8 Monath : x Monath,
oder 1200 : 1500 = 8 Mon. : x Mon.,
oder 4 : 5 = 8 Mon. : x Mon.,
oder 1 : 5 = 2 Mon. : x Mon.,
mithin x = 5 . 2 Mon. = 10 Monathen.

V. Es braucht jemand 4 Ellen $^7/_4$ Ellen breites Tuch zu einem Überrocke, wie viel Ellen wird er brauchen, wenn das Tuch $^9/_4$ Ellen breit ist?

Je breiter das Tuch ist, desto weniger lang braucht es zu seyn, und umgekehrt; also steht die Länge mit der Breite in umgekehrtem Verhältnisse, und man erhält demnach

$$\frac{9}{4} : \frac{7}{4} = 4 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.},$$

oder $9 : 7 = 4$ Ell. : x Ell.,

also $x = \frac{28}{9}$ Ell. $= 3^1/_9$ Ell.

VI. Wenn 100 fl. Capital $5^1/_2$ fl. jährliches Interesse geben, wie viel geben 850 fl. Capital? — Diese Aufgabe läßt sich kürzer auch so geben: »Wie viel Zins tragen 850 fl. Capital zu $5^1/_2$ Procent (oder à $5^1/_2$ p. %) in einem Jahre?«

Proportion: 100 fl. C. : 850 fl. C. = $5^1/_2$ fl. Int. : x fl. Int.

oder 100 : 850 = $\frac{11}{2}$ fl. : x fl.,

» :50) 2 : 17 = $\frac{11}{2}$ fl. : x fl.,

» 4 : 17 = 11 fl. : x fl.,

also $x = \frac{17 \cdot 11}{4}$ fl. $= \frac{187}{4}$ fl. $= 46^3/_4$ fl. = 46 fl. 45 kr.

VII. Wie groß muß ein Capital seyn, welches zu 8 p. % ausleht, damit es jährlich 1000 fl. Interessen trägt?

8 fl. Int. : 1000 fl. Int. = 100 fl. Cap. : x fl. Cap.
oder 8 : 1000 = 100 fl. : x fl.,

Digitized by Google

oder : 8) 1 : 125 = 100 fl. : x fl.,
also x = 125. 100 fl. = 12500 fl.

VIII. A hat dem B ein Capital von 7956 fl. à $6^3/_4$ p. % auf ein Jahr geliehen, wie viel muß B dem A am Ende des Jahres zahlen?

Hier kann man auf zweyerley Art verfahren; man setze nähmlich

1) 100 fl. Cap. : 7956 fl. Cap. = $6^3/_4$ fl. Int. : x fl. Int.
oder 100 : 7956 = 6·75 fl. : x fl.,

also $x = \frac{7956.6{\cdot}75}{100}$ fl. = 79·56 × 6·75 fl. = 537·03 fl.,

oder x = 537 fl. $1^4/_5$ kr.

Da nun die Zinsen 537·03 fl. betragen, so ist das Capital sammt Interessen y = 7956 fl. + 537·03 fl. = 8493·03 fl. die Summe, welche B an A zu zahlen hat.

2) Dieses Endresultat finden wir sogleich, wenn wir den Ansatz auf folgende Art bilden: »Aus 100 fl. Capital werden in einem Jahre (100 + $6^3/_4$) fl. = $106^3/_4$ fl., wie viel wird aus 7956 fl. Capital?« Man erhält nähmlich:

100 fl. Cap. : 7956 fl. Cap. = $106^3/_4$ fl. : y fl.
oder 100 : 79 56 = 106·75 fl. : y fl.,
» : 100) 1 : 79·56 = 106·75 fl. : y fl.,
» 1 : 79 56 = 1·0675 fl. : y fl.,
also y = 7956 × 1·0675 fl.

477 36
55 692
3 9780

y = 8493·03.. fl. wie vorhin.

* Die hieher gehörigen Aufgaben aus der kaufmännischen Rechenkunst müssen wir hier übergehen, weil sie außer dem Zwecke dieses Buches liegen. Wer über diesen Gegenstand ausführlich unterrichtet seyn will, kann die hierüber vorhandenen Schriften mit Hülfe der bisherigen Theorien ohne Anstand lesen. Eines der vorzüglichern Lehrbücher über die kaufmännische Arithmetik ist die Rechenkunst von Franz Petter, Wien 1823, bey Carl Gerold. Nur Schade, daß dieses sonst sehr schätzbare Buch an den Stellen, wo geometrische Begriffe zu Grunde liegen, so verworrene und falsche Ideen enthält.

Digitized by Google

B. Von der zusammengesetzten Regel de tri.

§. 180.

1) Wir haben (§. 175) gesehen, daß die von gleichartigen Ursachen in gleichen Zeiten hervorgebrachten Wirkungen den Kräften gerade proportional seyen, nähmlich daß, wenn zwey oder mehrere gleichartige Kräfte dieselbe Zeit hindurch wirken, eine 2, 3, 4, ... Mahl größere Kraft eine 2, 3, 4, ... Mahl größere Wirkung hervorbringen müsse.

2) Denkt man sich aber gleiche Kräfte durch ungleiche Zeiten wirksam, so ist klar, daß von jener Kraft eine 2, 3, 4 ... Mahl größere Wirkung hervorgebracht werde, welche eine 2, 3, 4 ... Mahl größere Zeit hindurch wirksam ist, d. h. bey gleichen Kräften verhalten sich die Wirkungen (oder Effecte, welche wir durch E und e bezeichnen wollen) gerade, wie die Zeiten (T und t), oder wenn K = k, so ist E : e = T : t.

3) Bezeichnen nun C, c und c′ drey Kräfte oder Ursachen (causae), welche in den Zeiten T, t und t′ die Wirkungen E, e und e′ hervorbringen, und setzt man c = c′, und T = t′; so erhält man folgende Proportionen:

E : c′ = C : c′ nach (Nro. 1),

und e′ : e = t′ : t nach (Nro. 2), also durch Zusammensetzung,

E : e = C . t′ : c′ . t

oder E : e = C . T : c t; wenn man statt t′ und c′ ihre Werthe T und c setzt.

Diese Proportion heißt mit Worten: die Wirkungen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Kräfte und der Zeiten, oder: die Wirkungen verhalten sich wie die ihnen entsprechenden Kräfte, multiplizirt mit den dazu gehörigen Zeiten.

Hieraus folgt nun von selbst, daß man die Zeitbestimmung als eine Krafterhöhung ansehen könne. So wird z. B. unter sonst gleichen Umständen dieselbe Wirkung erfolgen, ob 4 Menschen 3 Tage lang arbeiten, oder 4 . 3 = 12 Menschen einen Tag. Es ist also rücksichtlich der Wirkung einerley, ob eine Kraft C durch T Secunden, oder ob die Tfache Kraft (CT) durch eine Secunde wirksam gedacht wird. — Sind mehrere Zeitbestimmungen, z. B. nebst den Tagen oder Wochen auch die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden gegeben; so erhält man

Digitized by Google

dadurch eine neue und nähere Bestimmung der wirkenden Kraft. Wenn z. B. die 4 Menschen im vorigen Beyspiele in den 3 Tagen täglich 10 Stunden arbeiten, also im Ganzen 3 . 10 = 30 Stunden, so werden, alles Übrige gleich gesetzt, 4 . 30 = 120 Menschen in einer Stunde dieselbe Arbeit verrichten können; es ist aber in diesem Falle die wirkende Kraft = 4 . 3 . 10, d. i. das Product aus der ursprünglichen Kraft (4) in die Zeitbestimmungen. Dasselbe gilt auch, wenn noch mehrere Bestimmungen der Zeit gegeben sind. Bezeichnen wir diese mit T, T′, T″ . . . und t, t′, t″ . . .; so ist allgemein:

$$E : e = CTT'T'' \ldots : ctt't'' \ldots = K : k.$$

4) Berücksichtigt man endlich den Widerstand (Hinderniß), welcher eine Kraft in ihrer Wirksamkeit hindert; so ist einleuchtend, daß von gleichen Kräften diejenige nur eine 2, 3, 4 . . . Mahl kleinere Wirkung in einer bestimmten Zeit hervorbringen könne, welche einen 2, 3, 4 . . . Mahl größeren Widerstand zu überwinden hat, und umgekehrt. Bey ungleichen Kräften, aber gleichen Widerständen, ist die von der größeren Kraft hervorgebrachte Wirkung die größere.

Denken wir uns demnach, daß die Kräfte K, k und k′, welche die Widerstände W, w und w′ zu überwinden haben, die Wirkungen E, e und e′ hervorbringen; so ist, wenn K = k′ und w = w′ gesetzt wird:

$E : e' = w' : W$, weil $K = k'$,

und $e' : e = k' : k$, weil $w = w'$, also durch Zusammensetzung

$E : e = k'w' : kW$, oder, statt k′ und w′ ihre Werthe gesetzt:

$E : e = Kw : kW$, oder, wenn das zweyte Verhältniß durch Ww dividirt wird,

$$E : e = \frac{K}{W} : \frac{k}{w};$$

d. h. die Wirkungen verhalten sich direct wie die Kräfte, und indirect wie die Widerstände; oder: die Wirkungen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse, im geraden der Kräfte, und im umgekehrten der Widerstände; oder auch: die Wirkungen verhalten sich wie die Kräfte, dividirt durch die Widerstände.

Es ist einleuchtend, daß, wenn mehrere Hindernisse zugleich einer Kraft entgegenwirken, das Product derselben als Totalwiderstand (gesammter Widerstand) der Kraft betrachtet werden könne. — Es lassen sich demnach die Widerstände als Kraftverminderungen ansehen, so wie die Zeitbestimmungen als Krafterhöhungen.

Digitized by Google

5) Bey der Bestimmung der Größe einer Kraft erscheinen demnach die Zeiten als Factoren, und die Widerstände als Divisoren.

Bezeichnen wir letztere mit W, W′, W″ ... und w, w′, w″ ...; so erhalten wir folgende Proportion als allgemeine Norm für die Auflösung der Aufgaben über die zusammengesetzte Regel de tri:

$$E : e = \frac{K}{W\,W'\,W''\ldots} : \frac{k}{w.w'.w''\ldots}$$

oder weil $K = C\,T\,T'T''\ldots$ und $k = c\,t\,t't''\ldots$ (Nro. 3),

$$E : e = \frac{C\,T\,T'T''\ldots}{W\,W'W''\ldots} : \frac{c\,t\,t't''\ldots}{w.w'.w''\ldots}$$

oder, wenn man das letzte Verhältniß mit $W\,W'W''\ldots \times w\,w'w''\ldots$ multiplicirt,

$E : e = C\,T\,T'T''\ldots \times w\,w'w''\ldots : c\,t\,t't''\ldots \times W\,W'W''\ldots$.

Erläuterung durch Beyspiele.

Beyspiel 1. Wenn 45 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 15 Tagen 360 Ellen von irgend einem Zeuge verfertigen (Bedingungssatz); in wie viel Tagen (x) werden 30 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, 120 Ellen desselben Zeuges verfertigen (dieser Satz heißt Fragesatz)?

Diese und ähnliche Aufgaben werden wir, um der leichtern Übersicht willen, in der Folge immer so ansetzen:

Bedingungssatz.	45	Arb.	15	Tage	8 St.	360 Ellen.
Fragesatz.	30	»	x	»	10 »	120 »

Hier stellen uns die Arbeiter die wirkende Kraft vor, die Anzahl der Ellen aber die Wirkung, und die gegebenen Zeiten sind Factoren der Kraft; denn je länger gearbeitet wird, desto mehr Ellen können verfertigt werden. Da hier keine Hindernisse angegeben sind, so werden natürlich auch keine in Rechnung gebracht. Setzen wir nun

45 Arb. = C, so müssen 15 Tage = T, 8 St. = T′ und 360 Ell. = E gesetzt werden, also

30 Arb. = c, x Tage = t, 10 St. = t′, und 120 Ell. = e;

wir erhalten demnach durch Substitution in der allgemeinen Proportion:

$$360 : 120 = 45.15.8 : 30.x.10$$

oder $3 : 1 = 45.1.4 : 1.x.10$,

wenn man die Glieder des ersten Verhältnisses durch 120, und die des zweyten Verhältnisses durch 15.2 dividirt. Es ist ferner nach §. 170, Zus. 2:

Digitized by Google

$$3.10 : 1 = 45.4 : x$$

$$\text{oder} \quad 1 : 1 = \frac{45.4}{3.10} : x,$$

d. i. $1 : 1 = 3.2 : x$, also $x = 6$ Tagen.

Beyspiel 2. Wenn 32 Arbeiter in 24 Tagen bey täglichen 12 Arbeitsstunden einen Graben, welcher 192 Fuß lang, 27 Fuß breit und 18 Fuß tief war, ausgehoben haben; wie viel Arbeiter sind erforderlich, wenn sie bey täglichen 8 Arbeitsstunden in 16 Tagen einen Graben herstellen sollen, welcher 216 Fuß lang, 18 Fuß breit, und 12 Fuß tief werden soll?

Hier nehmen wir stillschweigend an, daß die Kräfte der Arbeiter, die Beschaffenheit des zu bearbeitenden Erdreichs, und alle übrigen nicht angegebenen Umstände, welche auf die Beschleunigung oder Verzögerung der Arbeit einen Einfluß haben können, einander gleich seyen.

Bedingungss. 32 Arb. 24 Tag. 12 St. 192′ lang, 27′ breit, 18′ tief.
Fragesatz. x » 16 » 8 » 216′ » 18′ » 12′ »

Die Arbeiter stellen hier wieder die wirkende Kraft, und das Product aus den Dimensionen (Länge, Breite und Tiefe) des Grabens die Wirkung vor, wie dieß in der Geometrie wird gezeigt werden.

Setzen wir nun in der allgemeinen Proportion statt der großen Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerthe aus dem Bedingungssatze unserer Aufgabe, so müssen wir für die kleinen Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerthe aus dem Fragesatze substituiren; wir erhalten demnach:

$$192 . 27 . 18 : 216 . 18 . 12 = 32 . 24 . 12 : x . 16 . 8$$

$$\text{oder} \quad 2 : 1 = 2 . 3 . 12 : x, \text{ nach gehöriger Abkürzung,}$$

$$\text{oder} \quad 1 : 1 = 3 . 12 : x,$$

folglich $x = 36$ Arbeitern.

Beyspiel 3. Es seyen die nähmlichen Angaben, wie vorhin, nur mit dem Unterschiede, daß statt der Anzahl der Arbeiter nun die Länge des Grabens zu suchen sey; es sey nähmlich die Aufgabe folgende:

Bedingungss. 32 Arb. 24 Tage 12 St. 192′ lang, 27′ breit, 18′ tief.
Fragesatz. 36 » 16 » 8 » x′ » 18′ » 12′ »

Hier werden wir bloß die Länge des Grabens als Wirkung betrachten, so erscheinen dann die Breite und Tiefe als Hindernisse; denn je breiter und tiefer ein Graben von einer bestimmten Anzahl Arbeiter in einer bestimmten Zeit hergestellt werden soll, desto weniger lang kann er werden, und umgekehrt.

Digitized by Google

Vergleichen wir demnach diese Aufgabe mit der allgemeinen Proportion, so ist $27 = W$, $18 = W'$, $18 = w$, $12 = w'$, und wir erhalten demnach:

$$192 : x = 32.24.12 \times 18.12 : 36.16.8 \times 27.18$$

oder $192 : x = 8 : 9$ nach gehöriger Abkürzung,

oder $24 : x = 1 : 9$,

folglich $x = 24 . 9 = 216'$ Länge, wie es seyn muß.

Übrigens hätten wir auch hier, wie im vorigen Beyspiele, die Producte $192' . 27' . 18'$ und $x' . 18' . 12'$ als die Totalwirkungen ansehen können, und wir hätten demnach dasselbe Resultat gefunden.

* Als Probe für die Richtigkeit solcher Rechnungen kann der Anfänger folgendes Verfahren anwenden: Man setze den für x gefundenen Werth in den Fragesatz, nehme ein beliebiges anderes Glied desselben als unbekannt an, und berechne das Beyspiel dann nach der gegebenen Regel. Erhält man die schon gegebene Zahl wieder als Resultat, so ist der für das obige x gefundene Werth wahrscheinlich der wahre.

Zusatz 1.

Aufgaben dieser Art lassen sich auch durch ein wiederholtes Anwenden der einfachen Regel de tri auflösen, und wir wollen dieß an den beyden obigen ersten Beyspielen nachweisen.

45 Arb. 15 Tag. 8 St. 360 Ell.

30 » x » 10 » 120 »

Man muß nach dieser Methode je zwey gleichnahmige Größen mit jenen zwey gleichartigen Größen, von denen die eine die unbekannte Zahl ist, in eine Proportion bringen. Man untersuche demnach a) wie viel Tage die 30 Arbeiter nöthig haben, um dieselbe Arbeit zu verrichten, welche die 45 Arbeiter in 15 Tagen vollenden, mit der Voraussetzung, daß sie mit letztern gleich viel Stunden täglich arbeiten; wodurch man folgende Proportion erhält:

30 Arb. : 45 Arb. = 15 Tage : z Tage;

denn je mehr Arbeiter zur Verrichtung einer bestimmten Arbeit unter sonst gleichen Umständen verwendet werden, desto weniger Zeit wird zur Vollendung derselben erfordert, also mußte das Verhältniß 45 : 30 umgekehrt werden.

b) Nun frage man also: Wenn 30 Arbeiter zur Verfertigung von 360 Ellen z Tage nöthig haben, indem sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Tage brauchen sie unter derselben Voraussetzung zur Verfertigung von 120 Ellen? Man setze demnach:

Digitized by Google

360 Ellen : 120 Ellen = z Tage : y Tage;

denn je weniger Ellen zu verfertigen sind, desto weniger Zeit wird dazu erfordert, und umgekehrt.

c) Weil es aber auch auf die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden mit ankommt, um x richtig bestimmen zu können, so setze man endlich:

10 St. : 8 St. = y Tage : x Tage.

Denn da sich die Anzahl der Tage *vermindert*, wenn sich die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden *vermehrt*, so mußte das Verhältniß 8 : 10 umgekehrt werden, um mit y : x eine wahre Proportion zu bilden; denn dieser Proportion liegt eigentlich die Frage zu Grunde: Wie viel Tage haben 30 Arbeiter zur Verfertigung von 120 Ellen, indem sie täglich 10 Stunden arbeiten, nöthig, wenn sie jene 120 Ellen bey 8 Arbeitsstunden in y Tagen fertig bringen?

Wir haben demnach folgende Proportionen:

a) 30 : 45 = 15 : z oder 2 : 3 = 15 : z
b) 360 : 120 = z : y » 3 : 1 = z : y
c) 10 : 8 = y : x » 5 : 4 = y : x,

also durch Zusammensetzung 5 : 2 = 15 : x
mithin ist auch 1 : 2 = 3 : x
folglich x = 6 Tagen, wie oben.

Das zweyte Beyspiel hieß:

Wenn 32 Arb. 24 Tage 12 St. 192′ lang, 27′ breit, 18′ tief;
? x » 16 » 8 » 216′ » 18′ » 12′ »

Rechnung.

Je mehr Tage, desto weniger Arbeiter, also 16 : 24 = 32 : v.
Je mehr Stunden, desto weniger Arbeiter, also 8 : 12 = v : w.
Je länger der Graben, desto mehr Arbeiter, » 192′ : 216 = w : z.
Je breiter » » » » » » 27 : 18 = z : y.
Je tiefer » » » » » » 18 : 12 = y : x,

oder ꝛ : ȝ = 32 : v
ꝛ : ȝ = v : w
8 : 9 = w : z
ȝ : ꝛ = z : y
ȝ : ꝛ = y : x

also 8 : 9 = 32 : x
oder 1 : 9 = 4 : x,
folglich x = 4 . 9 = 36 Arb., wie oben.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Aus der allgemeinen Proportion:

$$E : e = C\,T\,T'\,T''\ldots \times w\,w'\,w''\ldots : c\,t\,t'\,t''\ldots \times W\,W'\,W''\ldots$$

folgt: $E \cdot c\,t\,t'\,t''\,W\,W'\,W'' = e \cdot C\,T\,T'\,T''\,w\,w'\,w''$,

und z. B. $E = \dfrac{e \cdot C\,T\,T\,T''\,w\,w'\,w''\ldots}{c\,t\,t'\,t''\,W\,W'\,W''\ldots}$,

welches man in practischen Rechenbüchern so geschrieben findet:

x=E	e Bedingungssatz. e, c, t, t', t''... w, w', w''...
c	C Fragesatz. ?x, C, T, T', T''... W, W', W''...
t	T
t'	T'
t''	T''
W	w
W'	w'
W''	w''
mx=	p

Vergleicht man diesen Ansatz mit dem vorhin angegebenen Bruche, durch welchen der Werth der gesuchten Größe bestimmt wird, so sieht man auf der Stelle, daß alle Factoren des Zählers rechts, und alle Factoren des Nenners links von der Verticallinie sich befinden, und daß sich jedes Mahl zwey gleichnahmige Größen gegenüberstehen. Wir bemerken ferner, daß rechts alle jene Größen aus dem Fragesatze sich befinden, deren Zunahme oder Abnahme auch die Zu- oder Abnahme der gesuchten Größe zur Folge hat, daß aber jene Größen aus dem Fragesatze, deren Wachsen das Abnehmen, oder deren Abnehmen das Wachsen der Fragezahl nach sich zieht, alle links von der Verticallinie stehen, und daß die gleichnahmigen Größen aus dem Bedingungssatze demnach jedes Mahl auf der entgegengesetzten Seite erscheinen.

Diese Betrachtung leitet uns auf folgende practische Regel zur Auflösung der Aufgaben über die zusammengesetzte Regel de tri, welche man auch die Reesische Regel zu nennen pflegt.

»Man ziehe eine Verticallinie, setze links oben die gesuchte Zahl x an, und rechts ihr gegenüber die gegebene mit ihr gleichartige Größe. Hierauf beurtheile man bey jeder Größe des Fragesatzes insbesondere: ob alles Übrige gleich gesetzt, ihre Vervielfachung auch ein Vielfaches oder nur einen aliquoten Theil der gesuchten Größe zur Folge habe, und schreibe dann im ersten Falle jene Größe des Fragesatzes rechts von der Verticallinie an, die mit ihr gleichnahmige Größe aus dem Bedin-

Digitized by Google

gungssatze aber links; im zweyten Falle aber verfahre man umgekehrt. Dividirt man endlich das Product p der rechts stehenden Zahlen durch das Product m der links stehenden, so gibt der Quotient $\frac{p}{m}$ die gesuchte Zahl x.«

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Regel liegt in der Richtigkeit der Ableitung derselben.

Da die rechts stehenden Zahlen Factoren des Zählers eines Bruches sind, dessen Nenner das Product der rechts stehenden Zahlen ist, so ist einleuchtend, daß man die Factoren auf der einen Seite gegen die Factoren auf der andern Seite abkürzen, und die Nenner der etwa vorkommenden Brüche versetzen könne. Kommen gemischte Zahlen vor, so verwandelt man sie zuvor in unächte Brüche, und versetzt die Nenner, oder man verwandelt die gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Diese Vorschriften wollen wir auf die Auflösung folgender Aufgaben anwenden.

1) Wenn man zur Deckung eines Daches, welches 45 Fuß lang und 20 Fuß breit ist, 3000 Ziegeln braucht, deren jeder 9 Zoll lang und 5 Zoll breit ist; wie viel Ziegeln sind erforderlich, um ein Dach zu decken, welches 66 Fuß lang und 18 Fuß breit ist, wenn jeder Ziegel 10 Zoll lang und $5\frac{1}{2}$ Zoll breit ist?

x Z.	3000 Z.		
45′ l.	66′ l.	denn je länger das Dach,	desto mehr Ziegeln,
20 br.	18′ br.	» je breiter » »	» » »
10″ l.	9″ l.	» je länger ein Ziegel,	desto weniger Ziegeln,
$5\frac{1}{2}$″ br.	5 br.	» je breiter » »	» » »

oder

x	3000 3
5 45	55 6
20	18 2
10	9
11	5
	2

also $x = 2.5.9.2.6.3 = 3240$ Ziegeln.

2) Wenn 5 Metzen Korn 17 fl. 30 kr. kosten, so erhält man für 8 Groschen 3 ℔, 20 Loth Brot; wie viel muß ein 30 kr. Brot wiegen, wenn 7 Metzen Korn mit 26 fl. 48 kr. bezahlt werden?

Digitized by Google

x ℔	3 ℔ 20 Loth	
5 Metzen	7 Metzen,	denn je mehr Korn für dasselbe Geld, desto mehr Brot,
26 fl. 48 kr.	17 fl. 30 kr.	» je theurer das Korn, desto weniger Brot,
8 Groschen	30 kr.	» je mehr Geld, desto mehr Brot,

oder x ℔	$3^5/_8$ ℔	oder	x	29
5 Metz.	7 Metz.		8	
$26^4/_5$ fl.	$17^1/_2$ fl.		8	7
24 kr.	30 kr.		134	8
			2	35
			4 24	80 5

x . 4 . 2 . 134 . 8 = 5 . 35 . 7 . 29,

folglich $x = \frac{35525}{8576} = 4$ ℔ $4^1/_2$ Loth beynahe.

* Wie löst man diese Aufgabe nach der allgemeinen Proportion?

Von der sogenannten Kettenregel.

§. 181.

Bedeuten A, B, C, D, E was immer für gleichartige Größen, a, b, c, d, e, f, g, h aber lauter unbenannte Zahlen, und ist

A : B = a : b, also b . A = a . B
B : C = c : d » d . B = c . C
C : D = e : f » f . C = e . D
D : E = g : h » h . D = g . E,

so ist auch A : E = aceg : bdfh (§. 172. Zus. 1.)
und bdfh . A = aceg . E (§. 164.)

Wie verhält sich der Gulden rheinisch (oder Reichswährung) zum kaiserlichen Ducaten in Gold, z. B.

wenn 6 fl. Reichswährung = 5 fl. C. M.
2 fl. C. M. = 5 fl. W. W.
3 fl. W. W. = 2 Thaler W. W.
23 Thaler W. W. = 3 Dukaten in Gold?

Aus diesen Angaben erhalten wir folgende Proportionen (nach §. 164.):

1 fl. rheinisch : 1 fl. C. M. = 5 : 6
1 fl. C. M. : 1 fl. W. W. = 5 : 2
1 fl. W. W. : 1 Thlr. W. W. = 2 : 3
1 Thlr. W. W. : 1 Duc. in Gold = 3 : 23, also durch Zusammensetzung.

1 fl. rheinisch : 1 Duc. in Gold = 5 . 5 : 6 . 23 = 25 : 138

Digitized by Google

oder 138 fl. rhein. = 25 Duc. in Gold,

mithin 1 fl. rhein. $= \frac{25}{138}$ Duc. in Gold = 0·18116 Duc. in Gold sehr nahe,

und 1 Duc. in Gold $= \frac{138}{25}$ fl. rhein. = 5·52 fl. rhein. = 5 fl. 31·2 kr. rhein.

Da nun hier die ersten Verhältnisse der gegebenen Proportionen zusammenhängend sind (§. 172. Zus. 1.), oder in jeder der gegebenen Gleichungen immer das Glied rechts mit dem Gliede links der folgenden Gleichung von einerley Art ist, und demnach diese Größen gleichsam wie die Glieder einer Kette in einander greifen, so nennt man die Vorschrift, Aufgaben dieser Art zu lösen, die Kettenregel, nach welcher die obigen Gleichungen auf folgende Art angesetzt werden, wenn wir b als die gesuchte Zahl betrachten:

x . A = b . A	a B
d B	c C
f C	e D
h D	g E
⋮	⋮
p M	q . N.

Die Regel selbst wird gewöhnlich so gegeben:

»Man ziehe eine Verticallinie, schreibe oben links die gesuchte Zahl x an, und ihr gegenüber rechts die Fragegröße, d. i. die Größe, deren Werth gesucht wird. Links unter x schreibe man dann die mit der Fragezahl gleichartige Größe, und ihr gegenüber rechts jene, welche mit der vorigen nach den Bestimmungen der Aufgabe gleichen Werth hat. Hierauf setze man zur Linken wieder jene der gegebenen Größen, welche mit der letzt genannten von einerley Art ist, und die ihr gleich geltende aber wieder zur Rechten. Auf diese Art fahre man mit dem Ansatze fort, bis man endlich rechts eine Zahl erhält, welche mit der gesuchten (x) gleiche Benennung hat, und verfahre dann gerade wie bey der Reesischen Regel (§. 180 Zus. 2.).«

Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele.

Beyspiel 1. Ein Pariser hat an A in London die Summe von 6948 Franken zu zahlen; wie viel beträgt diese Schuld in Livres Sterling, wenn 2 Franken 58 Centime = 1 fl. C. M., wenn 145 fl. C. M. = 200 Mark Hamb. Banko, wenn 3 Mark Bko. = 8 ßl. vläm., und 36 ßl. vl. = 1 Livr. Sterl.?

Digitized by Google

Ansatz.

x Livr. St.	6948 Franken,	oder	x	6948 Fr.
2 Fr. 58 Cent.	1 fl. C. M.		2·58	1 fl. C. M.
145 fl. C. M.	200 Mk. Bko.		145	200 Mk. Bko.
3 Mk. Bko.	8 ßl. vläm.		3	8 ßl. vl.
36 ßl. vl.	1 Livr. Sterl.		36	1 Livr. Sterl.,

oder

x	~~6948~~ 193
1·29 ~~2·58~~	1
29 ~~145~~	~~200~~ 40
3	~~8~~ 4
~~36~~	1

mithin $x = 4 . 40 . 193 : 3 . 29 . 1·29 = 30880 : 112·23$
$= 275·14925$ Liv. St. $= 275$ Liv. 2 ßl. 11·8 dl. Sterl. sehr nahe.

Beyspiel 2. Ein Wiener Kaufmann hat 2 Ctr. 87 ℔, 24 Loth Amsterdamer Gewicht von irgend einer Waare gekauft, welche ihm sammt allen Nebenauslagen auf 987 fl. 12 Stüver Holländisch Courant zu stehen kommen. Wie hoch muß nun der Wiener das Wiener Pfund dieser Waare in Wiener Währung verkaufen, wenn er 12 Procent gewinnen will, und wenn 1096 Amsterd. Pfd. = 967 Wien. Pfd., wenn ferner 100 fl. C. M. = $249^5/_8$ fl. W. W.,

wenn 104 fl. Amst. Cour. = 100 fl. Amst. Banko,
» 1 fl. Holl. = 20 Stüver,
» $35^1/_8$ Stüver Holl. Cour. = 2 Mark Hamb Bko.,
» 3 Mark Hamb. Bko. = 1 Thaler Hamb. Bko.,
und » 100 Thlr. Hamb. Bko. = 144 fl. $47^3/_4$ kr. Conv. M.?

Ansatz.

x fl. W. W. =	1 Wien. ℔
967 Wien. ℔	1096 Amst. ℔
2 Ctr. 87 ℔, 24 Loth Amst. Gew.	987 fl. 12 Stüv. Holl. Cour.
104 fl. Amst. Cour.	100 fl. Amst. Banko.
1 fl. Amst. Bko.	20 Stüv. Amst. Bko.
100 Stüv. Bko.	104 Stüv. Cour.
$35^1/_8$ Stüv Cour.	2 Mark Hamb. Bko.
3 Mark Hamb. Bko.	1 Thaler Hamb. Bko.
100 Thlr. Hamb. Bko.	144 fl. $43^3/_4$ kr. Conv. M.
100 fl. Conv. M.	$249^5/_8$ fl. Wien. Währ.
100 fl. W. W.	112 fl. W. W. sammt Gewinn,

Digitized by Google

oder x	fl. W. W.	1 Wien. ℔ /	
	967	1096 Amst. ℔	
	287·75	987·6 [illegible]v. Holl. Cour.	
	104	100 fl. Amst. Bko.	
	1	20 Stüv. Amst. Bko.	
	100	104 Stüv. Cour.	
	35·125	2 Mark Hamb. Bko.	
	3	1 Thaler Hamb. Bko.	
	100	144·72916 fl. C. M.	
	100	249·625 fl. W. W.	
	100	112 fl. W. W.	

oder abgekürzt:

x	1
967	1096
287·75	987·8 329·2
0·878125 · 1	20
35·125	2
3	1
1	1·4472916
1	2·49625
1	1·12

$$\text{also ist } x = \frac{1096 \times 329{\cdot}2 \times 1{\cdot}4472916 \times 2{\cdot}49625 \times 1{\cdot}12}{967 \times 287{\cdot}75 \times 0{\cdot}878125}.$$

Ein wenig Beurtheilung lehrt, daß das Product im Zähler höchstens 7 Ziffern, das Product im Nenner aber 6 Ziffern für die Ganzen erhalten werde, und daß demnach der Quotient höchstens zwey Ziffern für die Ganzen erhalten könne. Da nun der Quotient fl. W. W. bezeichnet, und demnach mit 3 Decimalziffern hinlänglich genau bestimmt ist, so hat man im Resultate höchstens 5 Ziffern zu suchen.

Es wird demnach, um alle überflüssige Rechnung zu ersparen, am zweckmäßigsten seyn, das Product im Zähler sowohl als im Nenner bey der Stelle der Zehner abbrechen zu lassen (?), weßhalb die Rechnung also stehen wird:

Zähler = 1096 × 329·2 × 1·4472916 × 2·49625 × 1·12

69 01

329 20
29 63
1 97

360 80 Zehner

9274 41

360 80
144 32
14 43
2 52
7
3

522 17 Zehner

Digitized by Google

522 17 Zehner
5269 42

1044 34
208 87
46 99
3 13
10
3

1303 46 Zehner
2 11

1303 46
130 35
26 07

1459 88 Zehner.

Nenner = 967 × 287·75 × 0·878125
76 9

2589 8
172 6
20 1

2782 5 Zehner.
21878 0

22260
1947
222
3

24432 Zehner.

Mithin ist näherungsweise der Quotient x = 145988 : 24432, und erhält also nur eine Ziffer für die Ganzen; es ist nähmlich

x = 145988 : 24432 = 5·9753 fl. W. W.
23828
1839
129
7

oder x = 5·975 fl. W. W. = 5 fl. 58·5 kr. Wien. Währ.

* Ich habe absichtlich dieses Beyspiel so ausführlich behandelt, um dem Schüler zu zeigen, wie man in solchen Fällen zu verfahren habe, und ihn auf die großen Vortheile aufmerksam zu machen, welche die abgekürzte Multiplication und Division in der Ausübung gewähren, wodurch er zugleich einsehen lernt, daß das Rechnen nicht eine gar so mechanische Arbeit sey, wie Viele glauben. Zur Übung und deutlichern Einsicht versuche nur der Anfänger, die Rechnung auf gewöhnliche Art durchzuführen, und vergleiche

Digitized by Google

dann seine Arbeit mit der hier ausgeführten. Mehrere Beyspiele dieser Art findet man in dem oben angeführten Lehrbuche des Herrn Franz Petter ausführlich und gründlich behandelt.

C. Von der Theilregel.

§. 182.

Zur Theilregel rechnet man a) die Gesellschaftsrechnung, b) die Vermischungsrechnung, c) die Durchschnittsrechnung, und d) die Alligationsrechnung.

Die Alligationsrechnung läßt sich nur in der Lehre von den Gleichungen vollständig und gründlich vortragen, weßhalb wir sie hier übergehen.

Die Gesellschaftsrechnung (Societätsrechnung) lehrt ein gegebenes Ganze in mehrere ungleiche Theile theilen, welche in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, oder die andern gegebenen Größen proportional sind. Man kann die Gesellschaftsrechnung in die einfache und zusammengesetzte eintheilen, je nachdem die Zahlen, welche den Theilen des zu vertheilenden Ganzen proportional seyn sollen, d. i. je nachdem die Verhältnißzahlen unmittelbar gegeben sind oder nicht. Im letzten Falle müssen die Verhältnißzahlen erst aus gewissen Bedingungen der Aufgabe berechnet werden.

Alle Aufgaben über die Gesellschaftsrechnung sind im Allgemeinen unter folgender allgemeinen Aufgabe enthalten:

§. 183.

Eine gegebene Größe A in mehrere Theile z, y, x, w, v ... zu zerlegen, welche sich verhalten, wie die bestimmten Zahlen a, b, c, d, e ...

Der Voraussetzung zur Folge ist

$$z:y:x:w:v:\ldots = a:b:c:d:e:\ldots$$

mithin (nach §. 165. Zus. 1. und §. 165. Zus. 2.) auch

$$z+y+x+w+v+\ldots : a+b+c+d+e+\ldots = z:a = y:b = x:c = w:d = v:e = \ldots$$

und weil vermöge Voraussetzung $z+y+x+w+v+\ldots = A$ seyn muß, so ist

$$A:(a+b+c+d+e+\ldots) = z:a = y:b = x:c = w:d = v:e = \ldots.$$

oder, wenn wir die Summe der Verhältnißzahlen $a+b+c+d+e+\ldots = s$ setzen,

$$A:s = z:a = y:b = x:c = w:d = v:e = \ldots$$

Digitized by Google

oder, wenn wir die mittlern Glieder verwechseln:

$$A : z = s : a, \text{ mithin } z = \frac{A}{s} \cdot a$$

$$A : y = s : b, \quad » \quad y = \frac{A}{s} \cdot b$$

$$A : x = s : c, \quad » \quad x = \frac{A}{s} \cdot c$$

$$A : w = s : d, \quad » \quad w = \frac{A}{s} \cdot d$$

$$A : v = s : e, \quad » \quad v = \frac{A}{s} \cdot e$$

u. s. w. u. s. w.

Hieraus geht nun folgende praktische Regel für die Auflösung der Aufgaben über die Gesellschaftsrechnung hervor: »Man dividire das zu vertheilende Ganze durch die Summe der Verhältnißzahlen, und multiplizire diesen beständigen Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl, so erhält man die entsprechenden gesuchten Theile.«

Beyspiel. Vier Kaufleute traten in Compagnie, und zwar mit folgenden Einlagen: der erste mit 8400 fl., der zweyte mit 7000 fl., der dritte mit 15400 fl., und der vierte mit 5600 fl. Mit der Summe dieser Einlagen gewinnen sie gemeinschaftlich 10660 fl.; wie viel gebührt nun einem jeden nach Verhältniß seiner Einlage?

Es ist natürlich, daß die Antheile am Gewinnste sich wie die Einlagen verhalten müssen; denn diese Einlagen sind gleichsam Capitalien, und ein 2, 3, 4... Mahl größeres Capital bringt auch 2, 3, 4... Mahl mehr Zinsen, als das einfache Capital. Es ist demnach hier, weil die Einlagen die Verhältnißzahlen bilden,

$$\left.\begin{array}{l} a = 8400 \\ b = 7000 \\ c = 15400 \\ d = 5600 \end{array}\right\} \text{ mithin } s = a + b + c + d = 36400, \text{ und } A = 10660 \text{ fl.}$$

$$\text{also } z = \frac{A}{s} \cdot a = \frac{10660}{36400} \cdot 8400 = 10660 \cdot \frac{6}{26} = 2460 \text{ fl.}$$

$$y = \frac{A}{s} \cdot b = \frac{10660}{36400} \cdot 7000 = 10660 \cdot \frac{5}{26} = 2050 \text{ fl.}$$

$$x = \frac{A}{s} \cdot c = \frac{10660}{36400} \cdot 15400 = 10660 \cdot \frac{11}{26} = 4510 \text{ fl.}$$

$$w = \frac{A}{s} \cdot d = \frac{10660}{36400} \cdot 5600 = 10660 \cdot \frac{4}{26} = 1640 \text{ fl.}$$

Summe aller Antheile = 10660 fl. = A.

Digitized by Google

* Man kann die Rechnung öfters dadurch vereinfachen, daß man alle Verhältnißzahlen durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividirt, und die so gefundenen Quotienten, die lauter relative Primzahlen sind, als die Verhältnißzahlen betrachtet, wodurch die Resultate nicht geändert werden; denn derselbe aliquote Theil, welcher von den Verhältnißzahlen a, b, c, d dadurch genommen wird, wird auch von s genommen, also werden die Ausdrücke $\frac{A.a}{s}$, $\frac{A.b}{s}$ u. s. f. ihrem innern Werthe nach nicht geändert (§. 99). Nach dieser Bemerkung würde also obige Rechnung so stehen:

:14.100

a = 8400	6	und weil $\frac{A}{s} = \frac{10660}{26} = 410$,	so ist z = 410. 6 = 2460 fl.
b = 7000	5		y = 410. 5 = 2050 »
c = 15400	11		x = 410. 11 = 4510 »
d = 5600	4		w = 410. 4 = 1640 »
also s =	26		A = 10660 fl.

Zusatz 1.

Bey der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung werden die Verhältnißzahlen durch das Zusammenwirken mehrerer Ursachen bestimmt, und müssen demnach erst ausgemittelt werden. Wenn z. B. die Kraft m durch m′ Zeittheile, die Kraft n durch n′ Zeittheile, und die Kraft p durch p′ Zeittheile wirksam ist, und es wird gefragt, welchen Antheil jede einzelne Kraft an der gesammten Wirkung habe; so kann diese Frage leicht beantwortet werden, wenn man die Dauer der Wirksamkeit aller Kräfte auf die Zeiteinheit reducirt, weil alsdann die Wirkungen den so reducirten Kräften proportional seyn müssen (§. 180). Nun ist es aber rücksichtlich des Erfolges einerley, ob die Kraft m durch m′ Zeittheile, oder ob die Kraft M = m m′ durch die Zeiteinheit wirksam ist, also sind jene reducirten Kräfte die Producte aus den gegebenen Kräften in die Zeiten, durch welche die Dauer ihrer Wirksamkeit bestimmt ist. Die obige Frage ist demnach mit der folgenden einerley: »Welchen Antheil nehmen die in einerley Zeit wirkenden Kräfte M = m m′, N = n . n′ und P = p . p′ an der ganzen Wirkung a?« und wird durch die im §en gegebene Regel beantwortet.

Beyspiel. Zu irgend einer Unternehmung gab A ein Capital von 15000 fl. auf 3 Monath, B 8750 fl. auf 9 Monath, und C 11250 fl. auf 1 Jahr, oder C unternahm ein Geschäft mit 11250 fl., nach 3 Monathen trat B mit einer Einlage von 8750 fl. bey, und 6 Monath

Digitized by Google

später A mit 15000 fl.; am Ende des Jahres zeigte sich ein reiner Gewinn von 9200 fl.; auf wie viel hat jeder der Interessenten Anspruch?

Rechnung.

A gab 15000 fl. auf 3 Monath, oder 3.15000 fl. = 45000 fl. auf 1 Mon.
B » 8750 » » 9 » » 9.8750 » = 78750 » » 1 »
C » 11250 » » 12 » » 12.11250 » = 135000 » » 1 »

Es sind demnach die Verhältnißzahlen:

M = 45000 oder 4
N = 78750 » 7
P = 135000 » 12

} wenn man durch 125.9 = 1125 abkürzt.

$s = 23$, $A = 9200$, also $\frac{A}{s} = \frac{9200}{23} = 400$;

daher beträgt der Antheil des A) 400 . 4 = 1600 fl.
» » B) 400 . 7 = 2800 »
» » C) 400 . 12 = 4800 »
A = 9200 fl.

Zusatz 2.

Wenn man die Gesellschaftsregel zur Auflösung solcher Aufgaben anwendet, wo man die Quantität der Ingredienzen für eine gegebene Quantität der Mischung aus ihren bekannten Verhältnißzahlen berechnet, so nennt man diese Rechnung die Vermischungsrechnung.

Beyspiel. Bey Verfertigung guten Schießpulvers nimmt man 16 Theile Salpeter, 3 Theile Kohlen und 2 Theile Schwefel. Wie viel Pfunde müssen nun von jedem dieser Bestandtheile genommen werden, wenn man 630 ℔ Schießpulver erzeugen will?

Hier ist $s = 16 + 3 + 2 = 21$, $A = 630$, und

$\frac{A}{s} = \frac{630}{21} = 30$, mithin müssen

30 . 16 ℔ = 480 ℔ Salpeter,
30 . 3 ℔ = 90 ℔ Kohlen und
30 . 2 ℔ = 60 ℔ Schwefel genommen werden, um
A = 630 ℔ Schießpulver zu erhalten.

Zusatz 3.

Die Durchschnittsrechnung wird angewendet, wenn ein aus ungleichen Theilen zusammengesetztes Ganze in gleiche Theile zu

Digitized by Google

theilen ist. Die Regel, die man dabey zu beobachten hat, ist folgende:

»Man dividire die Summe der gegebenen Theile durch die Anzahl der Theile.« Die so gefundene Zahl heißt das arithmetische Mittel.

Beyspiele.

1) Der reine Ertrag eines Landgutes war im ersten Jahre 3400 fl.

zweyten	»	3128 »
dritten	»	3517 »
vierten	»	3843 »
fünften	»	3312 »
fünfjähriger Ertrag		17200 fl.

mithin ist der mittlere Ertrag $x = \frac{17200}{5}$ fl. = 3440 fl.

2) Im Januar 1825 kostete in Wien im Durchschnitte der Metzen Korn

	48½ Groschen,
Stockerau	46 »
Fischamend	37½ »
Groß Enzersdorf	46 »
	178 Groschen,

wie hoch kam also in Niederösterreich der Metzen Korn im Durchschnitte?

$$x = \frac{178}{4} = 44\frac{1}{2} \text{ Groschen} = 2 \text{ fl. } 13\frac{1}{2} \text{ kr.}$$

Bey Aufgaben dieser Art muß man vorzüglich die Quantität (Größe, Menge) der einzelnen Größen berücksichtigen, um das arithmetische Mittel richtig zu bestimmen, wie aus folgendem Beyspiele erhellen wird.

3) Es wurden auf einem Markte 200 Metzen Korn von bester Qualität (A) zu 2 fl. 24 kr.; 300 Metzen Korn von mittlerer Qualität (B) zu 2 fl. 6 kr., und 360 Metzen Korn von der geringsten Qualität (C) zu 2 fl. verkauft, wie hoch kam der Metzen Korn im Durchschnitte?

von A)	1 Metz. à 2·4 fl.,	also 200 Metz.	à 200 . 2·4 fl.	= 480· fl.
» B)	1 » à 2·1 »	» 300 »	à 300 . 2·1 »	= 630· »
» C)	1 » à 2 »	» 360 »	à 360 . 2 »	= 720· »
		demnach 860 Metz. à		1830 fl.

folglich 1 Metzen à $\frac{1830}{860} = 2{\cdot}1279$ fl. = 2 fl. 7 kr. 3 dl. beynahe.

Digitized by Google

Hätte man hier die Menge der einzelnen Sorten nicht berücksichtiget, so würde man

$$x = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2}{3} \text{ fl.} = \frac{6\,5}{3} \text{ fl.} = \frac{6 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}}{3} = 2 \text{ fl. } 10 \text{ kr.}$$

also um $2^1/_4$ kr. zu groß gefunden haben.

4) Ein Silberarbeiter schmelzt folgendes Silber zusammen:

α)	9 Mark,	13 Loth, 6 Grän f.,	also	9. (13 Loth, 6 Gr.)	=	120 Loth f. S.
β)	5 »	12 löthiges Silber,	»	5. 12 Loth	=	60 » »
γ)	8 »	10 »	»	8. 10 »	=	80 » »
δ)	8 »	$12^1/_2$ »	»	8. 12·5 »	=	100 » »
	30 Mark					360 Loth f. S.

Wie viel löthig wird die Mischung seyn?

Die ganze Mischung von 30 Mark enthält 360 Loth f. S., also muß 1 Mark $\frac{360}{30}$ Loth = 12 Loth f. S. enthalten, oder die Mischung ist 12löthig.

Digitized by Google

Zehntes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 184.

1) Erhebt man eine und dieselbe Zahl G nach und nach auf verschiedene Potenzen, so werden auch immer verschiedene Zahlen gefunden, und die Exponenten jener unveränderlichen Zahl G nennt man die Logarithmen der zugehörigen Zahlen (Potenzen). Findet man z. B.

$G^a = A$, $G^b = B$, $G^c = C$, u. s. w., so nennt man

a den Logarithmus von A für die beständige Zahl G,

b » » » B » » » » »

c » » » C » » » » »

welches kurz dadurch bezeichnet wird, daß man schreibt

$a = \text{Log. } A$ oder $a = \text{l. } A$

$b = \text{Log. } B$ » $b = \text{l. } B$

$c = \text{Log. } C$ » $c = \text{l. } C$.

2) Die unveränderliche Zahl G, durch deren Potenziren wir uns alle möglichen Zahlen entstehen denken, nennt man Grundzahl oder Basis, und die für einerley Grundzahl berechneten Logarithmen der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden ganzen Zahlen bilden ein logarithmisches System.

Es lassen sich demnach so viele verschiedene logarithmische Systeme denken, als es Zahlen gibt, also unzählige; nur kann 1 nicht als Grundzahl eines logarithmischen Systems genommen werden, weil $1^n = 1$, was auch n für einen Werth haben mag.

Ob und wie es möglich sey, alle denkbaren Zahlen als Potenzen einer und derselben Größe darzustellen, werden wir später kennen lernen.

3) Da jede Zahl G als Exponent des Verhältnisses $G : 1$ betrachtet, also auch G^m (wo m was immer für einen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth bezeichnen mag), als Exponent

Digitized by Google

des Verhältnisses $G^m : 1$ (§. 166. Zus. und §. 172. Zusätze) angesehen werden kann, so nennt man jene Exponenten der Grundzahl G mit Recht Verhältnißzahlen (Logarithmen — λογῶν ἀριθμοί), und das Verhältniß $G : 1$ das Grundverhältniß.

4) Wir können also die Gleichung $G^x = y$ (mithin $x = \log. y$) als allgemeine Formel für alle möglichen Zahlen betrachten. In dieser Gleichung sind x und y von der Art, daß jeder bestimmte Werth von x einen zugehörigen von y gibt, und umgekehrt; es bestimmen sich demnach x und y wechselweise, oder x und y hängen von einander ab, und man sagt: x und y sind Functionen von einander.

Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

§. 185.

I. Es bezeichne g die Grundzahl irgend eines logarithmischen Systems, und es sey

$$g^m = A, \text{ also } m = \log. A$$
$$g^n = B, \text{ » } n = \log. B \text{ (§. 184. 1.)},$$

so ist $g^m . g^n = A.B$,
oder $g^{m+n} = AB$, also $m+n = \log. AB$,
oder $\log. AB = m+n = \log. A + \log. B$, weil
$m = \log. A$ und $n = \log. B$ ist.

Es wird also der Logarithmus des Productes zweyer Zahlen gefunden, wenn man die Logarithmen der beyden Factoren addirt.

Eben so ist auch $\log. PC = \log. P + \log. C$, und $P = AB$ gesetzt, erhält man $\log. ABC = \log. AB + \log. C =$
$= \log. A + \log. B + \log. C$.

Es ist also allgemein:
$\log. A.B.C.D.E.... = \log.A + \log.B + \log.C + \log.D + \log.E + ...$
d. h. es ist der Logarithmus des Productes aus zwey oder mehreren Zahlen gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

So z. B. ist

$\log. 42 = \log. 2.3.7 = \log. 2 + \log. 3 + \log. 7$
$\log. 1001 = \log. 7.11.13 = \log. 7 + \log. 11 + \log. 13.$

* Wären demnach die Logarithmen der Primzahlen für irgend eine Grundzahl bekannt, so könnte man die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen für dieselbe Grundzahl durch bloße Addition finden.

Digitized by Google

II. Aus den Gleichungen $g^m = A$ und $g^n = B$ folgt auch:

$\frac{A}{B} = \frac{g^m}{g^n} = g^{m-n}$, also $\log. \frac{A}{B} = m - n$, und weil $m = \log. A$ und $n = \log. B$; so ist durch Substitution:

$$\log. \frac{A}{B} = \log. A - \log. B,$$

d. h. der Logarithmus eines Quotienten oder eines Bruches wird gefunden, wenn man vom Logarithmus des Dividends oder Zählers den Logarithmus des Divisors oder Nenners abzieht.

Z. B. $\log. \frac{5}{3} = \log. 5 - \log. 3;$

$$\log. \frac{133}{65} = \log. 133 - \log. 65 = \log. 7 . 19 - \log. 5 . 13 =$$
$$= \log. 7 + \log. 19 - \log. 5 - \log. 13.$$

und $\log. \frac{a^2 - 2ax}{m^3 - mn^2} = \log. \frac{a(a-2x)}{m(m+n)(m-n)} =$

$= \log. a + \log. (a-2x) - \log. m - \log. (m+n) - \log. (m-n).$

III. Wenn $g^m = A$, so ist auch

$(g^m)^n = A^n$, oder $g^{mn} = A^n$, und demnach

$\log. A^n = mn = n. m$; weil aber $m = \log. A$, so folgt

$\log. A^n = n. \log. A.$

Es wird demnach der Logarithmus einer Potenz gefunden, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem gegebenen Potenz-Exponenten multiplizirt.

So z. B. ist $\log. a^4 = 4 . \log. a.$

$\log. a^3 b^2 x = \log. a^3 + \log. b^2 + \log. x = 3 \log. a + 2 \log. b + \log. x.$

$\log. \frac{a^2 b}{m^3 n^2} = \log. a^2 b - \log. m^3 n^2 = 2 \log. a + \log. b - 3 \log. m - 2 \log. n.$

IV. Ist $g^m = A$, also $m = \log. A$; so ist auch

$$\sqrt[n]{g^m} = \sqrt[n]{A}, \text{ oder } g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A}, \text{ folglich}$$
$$\log. \sqrt[n]{A} = \frac{m}{n} = \frac{\log. A}{n} = \frac{1}{n} \log. A;$$

d. h. der Logarithmus einer Wurzelgröße ist gleich dem Logarithmus der Zahl unter dem Wurzelzeichen, dividirt durch den Wurzel-Exponenten.

Z. B. $\log. \sqrt{10} = \frac{\log. 10}{2} = \frac{1}{2} \log. 10,$

$\log. \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{1}{3} \log. a^2 b = \frac{1}{3} \log. a^2 + \frac{1}{3} \log. b = \frac{2}{3} \log. a + \frac{1}{3} \log. b,$

Digitized by Google

$$\log. \sqrt[4]{\frac{6a}{35m}} = \frac{1}{4} \log. \frac{6a}{35m} = \frac{1}{4} (\log. 2 + \log. 3 + \log. a - \\ - \log. 5 - \log. 7 - \log. m),$$

$$\log. \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \log. 2 + \frac{1}{2} \log. \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log. \sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \log. 2 + \frac{1}{4} \log. 3 - \frac{1}{6} \log. 2 = \frac{1}{3} \log. 2 + \frac{1}{4} \log. 3.$$

Zusatz.

Die Multiplication der Zahlen verwandelt sich demnach in Addition ihrer entsprechenden Logarithmen; die Division in Subtraction des Logarithmus des Divisors von dem des Dividends; das Erheben einer Zahl zur n^ten Potenz in Multiplication ihres Logarithmus durch den Potenz-Exponenten n; und das Wurzelausziehen in Division des Logarithmus der Potenz durch den gegebenen Wurzel-Exponenten.

Durch diese Rechnungen erhält man nähmlich jedes Mahl einen Logarithmus, dessen entsprechende Zahl die gesuchte ist.

Schon hieraus erhellt die Wichtigkeit und der große Nutzen der Logarithmen, und wird in der Folge noch mehr in die Augen fallen.

§. 186.

Die Logarithmen zweyer Zahlen M und N haben in jedem logarithmischen Systeme dasselbe Verhältniß zu einander.

Denn es sey 1) $\left.\begin{matrix} \log. M = m \\ \log. N = n \end{matrix}\right\}$ für die Grundzahl G,

also $M = G^m$

und $N = G^n$ (§. 184);

so ist $M^n = (G^m)^n = G^{mn}$

und $N^m = (G^n)^m = G^{n.m} = G^{mn}$,

folglich $M^n = N^m$, daher $M = \sqrt[n]{N^m} = N^{\frac{m}{n}}$

Es sey ferner 2) $\left.\begin{matrix} \log. M = m' \\ \log. N = n' \end{matrix}\right\}$ für die Grundzahl g,

so ist $M = g^{m'}$, mithin $M^{n'} = (g^{m'})^{n'} = g^{m'n'}$

und $N = g^{n'}$, » $N^{m'} = (g^{n'})^{m'} = g^{n'.m'} = g^{m'n'}$,

folglich $M^{n'} = N^{m'}$, » $M = \sqrt[n']{N^{m'}} = N^{\frac{m'}{n'}}$.

Digitized by Google

Setzt man nun die in 1) und 2) für M gefundenen Werthe einander gleich, so erhält man die Gleichung $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{m'}{n'}}$, und demnach muß $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ seyn, woraus die Proportion $m : n = m' : n'$ folgt, d. h. es ist

$$\text{Log. M} : \text{Log. N} = \text{log. M} : \text{log. N},$$

weil wir die Logarithmen für die Quadratzahl G durch Log. und jene für die Basis g durch log. bezeichnet haben.

Zusatz 1.

Wenn G und g die Grundzahlen zweyer verschiedenen Systeme bezeichnen, und es ist $G^m = M$, und $g^m = N$, so müssen auch M und N verschiedene Zahlen seyn. Denn wenn $G \gtrless g$, so ist auch $G^m \gtrless g^m$, d. h. es ist $M \gtrless N$, oder: In verschiedenen Systemen entsprechen den gleichen Logarithmen verschiedene Zahlen.

Zusatz 2.

Ist aber $G = g$, mithin auch $G^m = g^m$, so muß nothwendig auch $M = N$ seyn, d. h. in demselben Systeme entsprechen gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen und umgekehrt.

Zusatz 3.

Wenn $m > n$ und $g > 1$; so ist auch $g^m > g^n$ oder $M > N$, wenn $g^m = M$, und $g^n = N$ gesetzt wird.

Also entspricht in einem logarithmischen Systeme, dessen Grundzahl größer als 1 ist, der größeren Zahl ein größerer Logarithmus und umgekehrt.

Ist aber $g < 1$, $M = g^m$ und $N = g^n$, also $m = \text{log. M}$ und $n = \text{log. N}$, und $m > n$ oder $\text{log. M} > \text{log N}$; so ist $g^m < g^n$, oder $M < N$ (§. 103. Zus. 3.). In einem logarithmischen Systeme, dessen Grundzahl kleiner als 1, also ein ächter Bruch ist, entspricht demnach der kleineren Zahl der größere Logarithmus, und umgekehrt.

Digitized by Google

Zusatz 4.

Setzt man in der Gleichung $G^x = y$ (§. 184. 4.) $x = o$, so erhält man $G^o = y = 1$, für $x = 1$ aber $G^1 = G = y$, und hieraus folgt $o = \log. 1$ und $1 = \log. G$.

Also ist in jedem logarithmischen Systeme der Logarithmus der Einheit $= o$, und der Logarithmus der Grundzahl $= 1$.

Zusatz 5.

Wenn $A = G^m$ und auch $A = g^n$, also $G^m = g^n$, und es sind G und g verschiedene Zahlen, so müssen auch m und n verschiedene Zahlen seyn.

Bezeichnet man nun die Logarithmen für die Grundzahl G durch Log., und jene für die Grundzahl g durch log.; so erhält man aus der Gleichung $G^m = g^n$ folgende:

Log. G^m = Log. g^n (Zus. 2.), oder m Log G = n Log. g (§. 185. III.),
oder m = n Log. g,

und log. G^m = log. g^n (Zus. 2.), oder m log. G = n log. g. (§. 185. III.)
oder m log. G = n,

weil Log. G = 1 und auch log. g = 1 ist (Zus. 4.). Da nun m = Log. A und n = log. A, so erhält man, wenn diese Werthe in den beyden letzten Gleichungen substituirt werden,

Log. A = log. A Log. g,
und Log. A log. G = log. A.

Hieraus folgt $\log. A = \frac{\text{Log. A}}{\text{Log. g}} = \frac{1}{\text{Log. g}}$. Log. A = M . Log. A,

und $\text{Log. A} = \frac{\log. A}{\log. G} = \frac{1}{\log. G}$. log. A = M′ . log. A,

wenn $\frac{1}{\text{Log. g}} = M$, und $\frac{1}{\log. G} = M'$ gesetzt wird.

Sind demnach die Logarithmen für irgend eine Grundzahl, z. B. G, bekannt, so können die Logarithmen für jede andere Grundzahl g berechnet werden, indem man die Logarithmen aus dem bekannten Systeme durch den Logarithmus der neuen Grundzahl g aus demselben Systeme dividirt.

Der Quotient $\frac{1}{\text{Log. g}} = M$ heißt Modul, und bezeichnet demnach die Zahl, mit welcher die Logarithmen des bekannten Systems

Digitized by Google

multiplizirt werden müssen, um das neue System zu erhalten (es ist nähmlich M der Modul des neuen Systems für die Grundzahl g, so wie M' der Modul des Systems für die Grundzahl G ist).

Zusatz 6.

Wenn $A = G^m = g^n$, wo also $m = \text{Log. } A$ und $n = \text{log. } A$ ist, so ist (nach Zus. 2.) für irgend ein anderes System, dessen Basis z. B. B seyn mag, und dessen Logarithmen wir durch l. bezeichnen wollen,

$$l.G^m = l.g^n$$
$$\text{oder } m.l.G = n.l.g \quad (\S.\ 185.\ \text{III.})$$
$$\text{folglich } m:n = l.g:l.G \quad (\S.\ 164.)$$
$$\text{oder } \text{Log. } A : \text{log. } A = l.g:l.G.$$

Es verhalten sich demnach die Logarithmen einer und derselben Zahl A aus zwey verschiedenen Systemen umgekehrt wie die Logarithmen, welche den Grundzahlen jener beyden Systeme in irgend einem dritten Systeme zukommen.

Die Logarithmen der Zahlen sind daher um so kleiner, je größer die Grundzahl des Systemes ist, und umgekehrt.

Zusatz 7.

Es ist also nur der Logarithmus der Einheit eine beständige oder unveränderliche Größe, denn dieser ist in jedem Systeme $= 0$ (Zus. 4), die Logarithmen aller übrigen Zahlen aber ändern sich, sobald sich die Grundzahl ändert, d. h. die Logarithmen aller Zahlen, der der Einheit ausgenommen, hängen von der Grundzahl ab.

Zusatz 8.

I. Wenn $g > 1$ und positiv ist, so ist, wenn m eine positive Zahl bezeichnet, immer $g^m > 1$, und zwar, wenn $m > 1$, so ist $g^m > g$,
und wenn $m < 1$, so ist $g^m < g$.

Wird aber m negativ genommen, so ist $g^{-m} = \frac{1}{g^m} < 1$, weil $g^m > 1$ ist, und zwar wird g^{-m} um so kleiner, je größer m genommen wird, so groß aber auch m genommen werden mag, so bleibt dennoch $g^{-m} > 0$. Hieraus folgen nun nachstehende Sätze:

Digitized by Google

1) In jedem logarithmischen Systeme, dessen Grundzahl positiv und größer als 1 ist, sind die Logarithmen aller positiven Zahlen von 1 bis zum ∞ positiv, und zwar sind die Logarithmen der Zahlen von 1 bis g ächte positive Brüche, der Logarithmus von g ist $=1$, und die Logarithmen aller Zahlen von g bis ∞ sind $>+1$.

2) Die Logarithmen aller positiven ächten Brüche sind negativ, und umgekehrt kann jede negative Zahl als der Logarithmus eines ächten positiven Bruches betrachtet werden, denn es ist immer $-m = \text{Log.}\, g^{-m} = \text{Log.}\, \frac{1}{g^m}$.

3) Ist demnach die Grundzahl $g > 1$ und positiv, so mag m positiv oder negativ genommen werden, so erhält man immer positive Resultate, folglich kann eine negative Zahl unmöglich einen reellen Logarithmus haben, weil dieser weder positiv noch negativ seyn kann (§. 74. c.).

II. Wird $g' < 1$, aber positiv genommen, so ist $\frac{1}{g'} > \frac{1}{1}$, oder $\frac{1}{g'} > 1$, und daher gelten jetzt von $\frac{1}{g'}$ alle jene Schlüsse, welche wir vorhin von g machten.

Es sind demnach in einem solchen Systeme die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis ∞ negativ, die Logarithmen aller Zahlen von 0 bis 1 aber, d. i. die Logarithmen aller ächten Brüche sind positiv.

Es mag aber auch hier m was immer für reelle positive oder negative Werthe erhalten, so bleibt dennoch g'^m stets positiv, weil wir g' als eine positive Zahl voraussetzten; folglich kann auch in diesem Falle der Logarithmus einer negativen Zahl keine reelle Größe seyn.

III. Würde man eine negative Zahl als Grundzahl eines logarithmischen Systems annehmen, so würde man durch das Potenziren derselben bald positive bald negative, bald reelle bald unmögliche Werthe finden, es mag der Potenz-Exponent einen reellen positiven oder negativen Werth haben. Denn es sey z. B. $y = (-2)^x$, so ist für

$$x = 0,\ y = (-2)^0 = 1$$

$$x = \tfrac{1}{2},\ y = (-2)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-2}$$

$$x = \tfrac{1}{3},\ y = (-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$ (§. 74. 2. b.)

$$x = \tfrac{1}{4},\ y = (-2)^{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt[4]{-2}$$

. . . . . .

Digitized by Google

$$x = 2,\ y = (-2)^2 = +4$$
$$x = 3,\ y = (-2)^3 = -8$$
$$x = 4,\ y = (-2)^4 = +16$$
. . . . . .

Man kann also durch das Potenziren der Zahl (-2) weder die Zahl $+8$, noch die Zahl -4 erzeugen. Eben so verhält es sich auch, wenn man negative reelle Werthe für x annimmt.

Hieraus leuchtet nun die Unmöglichkeit ein, alle möglichen Zahlen als Potenzen irgend einer negativen ganzen oder gebrochenen Zahl darzustellen, folglich kann man auch keine negative Zahl als Basis eines logarithmischen Systems annehmen.

Übrigens sieht man aus den vorhin aufgestellten Gleichungen, daß für eine negative Basis manche negative und manche imaginäre Größen reelle Logarithmen haben. Denn so z. B. wäre $\frac{1}{3} = \log.(-\sqrt[3]{2})$, $3 = \log.(-8)$, $\frac{1}{2} = \log.\sqrt{-2}$, $\frac{1}{4} = \log.\sqrt[4]{-2}$, u. s. w.

§. 187.

Wenn vier Zahlen geometrisch proportional sind, so bilden ihre Logarithmen eine arithmetische Proportion.

Denn es sey $a:b = c:d$, so ist (§. 164.) $ad = bc$, folglich nach (§. 186. Zus. 2.) $\log.ad = \log.bc$, oder $\log.a + \log.d = \log.b + \log.c$, also nach (§. 160.)

$$\log.a \div \log.b = \log.c \div \log.d.$$

Sind demnach drey Zahlen stätig geometrisch proportional, so bilden ihre Logarithmen eine stätige arithmetische Proportion.

Denn es sey z. B. $\div\ a:b:c$, so ist $ac = b^2$,
mithin $\log.ac = \log.b^2$, oder $\log.a + \log.c = 2\log.b$,
folglich $\div \log.a \div \log.b \div \log.c$.

§. 188.

Wenn in der Gleichung $g^x = y$ die Größen g und y positive Zahlen bezeichnen, so ist aus dem bereits Gesagten einleuchtend, daß x einen reellen Werth haben müsse. Denn

$$\left\{\begin{array}{l}\text{für } x = 0, =1, =2, =3, =4, \text{ u. s. w.}\\ \text{wird } y = 1, =g, =g^2, =g^3, =g^4, \text{ u. s. w.}\end{array}\right.$$

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l}\text{und für } x = -1, = -2, = -3, = -4, \text{ u. s. w.}\\ \text{wird } y = \frac{1}{g}, = \frac{1}{g^2}, = \frac{1}{g^3}, = \frac{1}{g^4}, \text{ u. s. w.}\end{array}\right.$$

Ist nun

$y > 1$ aber $< g$, so liegt der entsprechende Werth von x zwischen 0 und 1,
$y > g$ » $< g^2$, » » » » » » » 1 » 2,
$y > g^2$ » $< g^3$, » » » » » » » 2 » 3,
$y > g^3$ » $< g^4$, » » » » » » » 3 » 4,
&c. &c. &c. &c.

und ist

$y < 1$ » $> \frac{1}{g}$ » » » » » » » 0 und -1,
$y < \frac{1}{g}$ » $> \frac{1}{g^2}$ » » » » » » » -1 » -2,
$y < \frac{1}{g^2}$ » $> \frac{1}{g^3}$, » » » » » » » -2 » -3,
&c. &c. &c. &c.

Hieraus sieht man zugleich, daß nur wenige Logarithmen ganze Zahlen seyen, in Vergleich mit denen, die durch ächte oder unächte Brüche ausgedrückt werden können. Man sieht ferner, daß die Logarithmen aller Zahlen die $\gtrless g$ sind, entweder ganze Zahlen oder unächte Brüche seyen (vergl. §. 186. Zus. 7.).

§. 189

1) Wenn in der Gleichung $g^x = a$ der Exponent x einen rationalen Werth hat, welchen wir durch $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen, wo m und n ganze Zahlen sind, die wir als relative Primzahlen betrachten können; so ist

$$g^{\frac{m}{n}} = a, \text{ oder } \sqrt[n]{g^m} = a, \text{ folglich } g^m = a^n.$$

Wenn nun f ein einfacher Factor von a ist, so muß a^n, folglich auch g^m durch f theilbar seyn, d. h. a und g müssen, wenn x einen rationalen Werth hat, einerley einfache Factoren haben.

Nun seyen die Primzahlen f und h die einfachen Factoren von g, und z. B. $a = f^p h^q$, $g = f^r h^s$; so geht die Gleichung $g^m = a^n$ über in

$$(f^r h^s)^m = (f^p h^q)^n,$$

oder $$f^{mr} h^{ms} = f^{np} h^{nq}$$ (§. 53. Zus. 1.),

und da die Primzahlen f und h in dem einen Producte eben so oft

Digitized by Google

als in dem andern enthalten seyn müssen, weil sonst die Gleichheit beyder Producte nicht bestehen könnte, so folgt

$mr = np$ und $ms = nq$, mithin $\frac{m}{n} = \frac{p}{r}$, und $\frac{m}{n} = \frac{q}{s}$,

folglich $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$, oder $p : r = q : s$

$p : q = r : s$.

Hat demnach x einen rationalen Werth, so haben die Grundzahl g und die aus ihr erzeugte Potenz a einerley Factoren f und h, und die Verhältnisse der Exponenten der gleichen Factoren sind einander gleich.

Der Beweis bleibt derselbe, wenn g und a mehr als zwey einfache Factoren haben.

2) Der umgekehrte Satz ist auch gültig, nähmlich wenn $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$, so ist x rational (commensurabel), und zwar ist $x = \frac{r}{p}$ oder $x = \frac{s}{q}$.

Denn es ist dann $g^x = (f^r h^s)^{\frac{p}{r}} = (f^r)^{\frac{p}{r}} (h^s)^{\frac{p}{r}} =$

$= (f^r)^{\frac{p}{r}} . (h^s)^{\frac{q}{s}} = f^p h^q$ (§. 134. Zus. 3.) $= a$.

Die gemeinen oder Briggs'schen Logarithmen.

§. 190.

1) Heinrich Briggs, Prof. zu Oxford, berechnete auf Nepers Aufmunterung die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 900000 bis 1000000 mit 14 Decimal-Stellen für die Grundzahl 10, oder für das Grundverhältniß 10:1, und machte sie in seiner Arithm. Logarithm. 1624 bekannt. Die Lücke von 20000 bis 90000 füllte Adrian Vlacq, ein holländischer Mathematiker (in seiner Arithmetica Briggii 1628) mit 10 Decimal-Stellen aus.

Die für die Grundzahl 10 oder das Grundverhältniß 10:1 berechneten Logarithmen nennt man die Briggischen oder die gemeinen, weil der Gebrauch derselben allgemein eingeführt ist.

2) Es soll nun x jeden beliebigen ächten Bruch bis o (einschlüssig) bezeichnen, und die Grundzahl $g = 10$ seyn; so erhalten wir

Digitized by Google

$10^0 = 1$	also	$0 = \log. 1$
$10^1 = 10$	»	$1 = \log. 10$
$10^2 = 100$	»	$2 = \log. 100$
$10^3 = 1000$	»	$3 = \log. 1000$
$10^4 = 10000$	»	$4 = \log. 10000$
. . . . .		
$10^n = 10^n$	»	$n = \log. 10^n$.

Daher haben die Logarithmen aller Zahlen

von	1	bis	10	die	Form	x
»	10	»	100	»	»	$1 + x$
»	100	»	1000	»	»	$2 + x$
»	1000	»	10000	»	»	$3 + x$
»	10000	»	100000	»	»	$4 + x$
. . . . .						
»	10^n	»	10^{n+1}	»	»	$n + x$

d. h. die Logarithmen aller einziffrigen Zahlen sind ächte Brüche, die Logarithmen aller zweyziffrigen Zahlen bestehen aus einem Ganzen und einem ächten Bruche, die Logar. aller dreyziffrigen Zahlen bestehen aus zwey ganzen Einheiten und einem ächten Bruche, u. s. f. und allgemein bestehen die Logarithmen aller nziffrigen Zahlen aus der ganzen Zahl n und einem ächten Bruche x. Es ist daher, wenn a, b, c, d ... k.l lauter einziffrige Zahlen bezeichnen, (nach §. 20.) $\log. \overset{(n)}{a}bcd\ldots k.l = n + x$, oder wenn wir $x = \frac{z}{10^m}$ setzen, weil man die gebrochenen Werthe von x immer als Decimal-Brüche darstellt, $\log. \overset{(n)}{a}bcd\ldots kl = n + \frac{z}{10^m}$.

Die ganze Zahl n, welche ein Logarithmus bey sich hat, nennt man im Briggischen Systeme die Kennziffer oder Charakteristik, und den angehängten Decimal-Bruch $\frac{z}{10^m}$ die Mantisse des Logarithmus.

3) Wir sehen demnach, daß im Briggischen Systeme die Charakteristik eines Logarithmus immer um 1 kleiner sey, als die Anzahl der Ziffern, mit welchen die dazu gehörige Zahl geschrieben ist, und umgekehrt; daß die zu einem gegebenen Logarithmus gehörige Zahl immer eine Ziffer mehr in den Stellen der Ganzen hat, als die Charakteristik Einheiten enthält.

Digitized by Google

Zusatz 1.

a) Bezeichnet A irgend eine ganze Zahl, die mit $(n+1)$ Ziffern geschrieben ist, und x jeden ächten Decimal-Bruch; so ist

$$\text{Log. } A = n+x$$

und $$\text{Log.}\left(\frac{A}{10^m}\right) = \text{Log. } A - \log. 10^m,$$

oder $$\text{Log.}\left(\frac{A}{10^m}\right) = n+x-m = (n-m)+x, \text{ wo } m<n$$ seyn soll.

Nun ist aber $\frac{A}{10^m}$ ein Decimal-Bruch, welcher m Decimal-Stellen, mithin $(n+1-m) = (n-m+1)$ Stellen für die Ganzen hat; also wird die Charakteristik des Logarithmus eines unächten Decimal-Bruches nach der Anzahl der Ziffern in den Stellen für die Ganzen bestimmt, die Mantisse aber so, als wäre die gegebene Zahl eine ganze Zahl, also ohne Rücksicht auf den Decimal-Punct. So z. B. ist

$$\text{Log. } 7485{\cdot}86 = \log. \frac{748586}{100} = \log. 748586 - \log. 100 = 5+x-2$$
$$= (5-2)+x = 3+x.$$

b) Wenn eine ganze Zahl N sich mit einer oder mehreren Nullen endiget, so ist sie in der Form $N = A \cdot 10^m$ enthalten, und weil

$$\text{Log. } N = \text{Log. } A \cdot 10^r = \text{Log. } A + \text{Log. } 10^r = n+x+r = (n+r)+x,$$

so sieht man, daß die Mantisse des Log. N dieselbe ist, wie die des Log. A, d. i. des Logarithmus der gegebenen Zahl ohne die Nullen, daß aber die Charakteristik des Log. N sich nach der Anzahl der Ziffern von N richte. So z. B. ist

$$\text{Log. } 2 = 0{\cdot}30103,$$
$$\text{Log. } 20 = 1{\cdot}30103,$$
$$\text{Log. } 200 = 2{\cdot}30103,$$
$$\text{Log. } 2000 = 3{\cdot}30103,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{Log. } 2 \cdot 10^r = r+0{\cdot}30103.$$

Zusatz 2.

1) Ist in der Gleichung $\text{Log.}\frac{A}{10^m} = (n-m)+x$, wo $(n+1)$ die Anzahl der Ziffern in der ganzen Zahl A bezeichnet, $n=m$, also $n-m=0$, so ist

$$\text{Log.}\frac{A}{10^m} = x.$$

Digitized by Google

Ist aber $m = n + 1$, d. h. ist $\frac{A}{10^m}$ ein ächter Decimal-Bruch, bey welchem die Stelle der Zehntel mit der höchsten Ziffer von A besetzt ist, oder wo die erste Ziffer nach dem Decimal-Puncte schon eine bedeutende Ziffer ist, so erhält man

$\text{Log.} \frac{A}{10^m} = n - m + x = n - (n+1) + x = -1 + x$. Ferner ist

für $m = n + 2$ wird $\text{Log.} \frac{A}{10^m} = n - m + x = n - (n+2) + x =$

$= -2 + x$, (a)

für $m = n + 3$ wird $\text{Log.} \frac{A}{10^m} = n - m + x = n - (n+3) + x =$

$= -3 + x$, (b)

u. s. w., und allgemein

für $m = n + p$ wird $\log. \frac{A}{10^m} = n - m + x = n - (m+p) + x =$

$= -p + x$, (c).

In allen diesen Fällen ist demnach $\frac{A}{10^m}$ ein ächter Decimal-Bruch, bey welchem in (a) die erste bedeutende Ziffer erst in der 2ten Decimal-Stelle

in (b) » » » » » » 3ten » »

und in (c) » » » » » » pten » »

erscheint. Man sieht daher, daß alle ächten Decimal-Brüche negative Charakteristiken haben, die jedes Mahl so viele Einheiten enthalten, als der Zeiger der höchsten bedeutenden Decimal-Ziffer. Umgekehrt entspricht jedem Logarithmus $-p+x$, der eine negative Charakteristik hat, ein ächter Decimal-Bruch $\frac{A}{10^m}$, und zwar bezeichnet die positive Mantisse x die zum Logarithmus der ganzen Zahl A gehörige Mantisse, und die um 1 verminderte negative Charakteristik drückt aus, wie viel Nullen als Decimalen der höchsten Ziffer der ganzen Zahl A vorgesetzt werden müssen.

Folgende Beyspiele mögen das Gesagte erläutern:

Man findet $\log. 3756 = 3{\cdot}5747256$, mithin ist

$\log. 375{\cdot}6 = \log. \frac{3756}{10} = \log. 3756 - \log. 10 = 3{\cdot}5747256 - 1 =$

$= 2{\cdot}5747256$,

$\log. 37{\cdot}56 = \log. \frac{3756}{10^2} = \log. 3756 - \log. 10^2 = 3{\cdot}5747256 - 2 =$

$= 1{\cdot}5747256$,

Digitized by Google

$$\log. 3{\cdot}756 = \log. \frac{3756}{10^3} = \log. 3756 - \log. 10^3 = 3{\cdot}5747256 - 3 =$$
$$= 0{\cdot}5747256,$$
$$\log. 0{\cdot}3756 = \log. \frac{3756}{10^4} = \log. 3756 - \log. 10^4 = 3{\cdot}5747256 - 4 =$$
$$= 0{\cdot}5747256 - 1,$$
$$\log. 0{\cdot}03756 = \log. \frac{3756}{10^5} = \log. 3756 - \log. 10^5 = 3{\cdot}5747256 - 5 =$$
$$= 0{\cdot}5747256 - 2,$$
$$\log. 0{\cdot}003756 = \log. \frac{3756}{10^6} = \log. 3756 - \log. 10^6 = 3{\cdot}5747256 - 6 =$$
$$= 0{\cdot}5747256 - 3,$$

u. s. w.

Um also den Logarithmus irgend eines Decimal-Bruches zu finden, bestimme man die Mantisse, die der gegebenen Zahl als ganze Zahl betrachtet, entspricht, die Charakteristik aber mit Rücksicht auf die Ziffern der Ganzen, und für den Fall, daß der gegebene Decimal-Bruch ein ächter ist, fügt man eben jener Mantisse eine negative Charakteristik bey, welche dem Zeiger der ersten bedeutenden Decimal-Ziffer gleich ist.

Zusatz 3.

Es sey $\frac{Z}{N}$ was immer für ein ächter positiver Bruch, also $Z < N$; so ist $\log. \left(\frac{Z}{N}\right) = \log. Z - \log. N = -(\log. N - \log. Z)$, d. i. die Logarithmen aller ächten Brüche sind negativ, wie wir schon §. 186. Zus. 8 gesehen haben, denn wenn $Z < N$, so ist auch $\log. Z < \log. N$.

Ist umgekehrt ein negativer Logarithmus gegeben, so muß die dazu gehörige Zahl ein ächter Bruch seyn, der sich auf folgende Art bestimmen läßt.

Es sey der gegebene Logarithmus $= -v$, und der ihm entsprechende ächte Bruch $= x$; ferner sey $+v$ der Logarithmus der Zahl n, nähmlich $\log. n = +v$; so ist

$$\log. x = -v$$
$$\log. n = +v$$
$$\text{also } \log. x + \log. n = 0$$
$$\text{oder } \log. x + \log. n = \log. 1,$$

Digitized by Google

mithin $\log. x = \log. 1 - \log. n = \log. \frac{1}{n}$,

folglich ist $x = \frac{1}{n}$.

Also ist die zu einem negativen Logarithmus gehörige Zahl einem Bruche gleich, welcher 1 zum Zähler und die zum gegebenen Logarithmus, positiv genommen, gehörige Zahl zum Nenner hat.

Z. B. von welcher Zahl ist $-0{\cdot}5747256$ der Logarithmus?

Da $+0{\cdot}5747256 = \text{Log.}\, 3{\cdot}756$; so ist

$$-0{\cdot}5747256 = \text{Log.}\, \frac{1}{3{\cdot}756} = \text{Log.}\, 0{\cdot}26624.. = \text{Log.}\, \frac{250}{939}.$$

Eben so ist, weil $1{\cdot}3010300 = \text{Log.}\, 20$,

$$-1{\cdot}3010300 = \log. \frac{1}{20} = \log. 0{\cdot}05.$$

Zusatz 4.

Übrigens ist es sehr unbequem, mit negativen Logarithmen zu rechnen; man verwandelt daher den negativen Logarithmus lieber in einen andern mit negativer Charakteristik, und verfährt dann nach Zusatz 2.

Es sey nähmlich allgemein $-c{\cdot}m$ der gegebene negative Logarithmus, wo c die Charakteristik und m die Mantisse bezeichnet, und N die entsprechende Zahl, so findet man

$$\text{Log}\, N = -c{\cdot}m = -c - 0{\cdot}m = (c+1) - c - 0{\cdot}m - (c+1)$$
$$= (1 - 0{\cdot}m) - (c+1) = 0{\cdot}m' - (c+1),$$

wenn man $1 - 0{\cdot}m = 0{\cdot}m'$ setzt; mithin ist, wenn $0{\cdot}m' = \text{Log}\, n$ gesetzt wird,

$$\text{Log.}\, N = \text{Log.}\, n - (c+1) = \text{Log.}\, n - \text{Log.}\, 10^{c+1} = \text{Log.}\, \frac{n}{10^{c+1}}.$$

So z. B. ist für das Beyspiel des letzten Zusatzes

$$\text{Log}\, N = -0{\cdot}5747256 = (1 - 0{\cdot}5747256) - 1 = 0{\cdot}4252744 - 1$$
$$= \log. 2{\cdot}662407 - \text{Log.}\, 10 = \text{Log.}\, \frac{2{\cdot}662407}{10} = \text{Log.}\, 0{\cdot}2662407$$

wie oben.

Eben so findet man:

$$\text{Log.}\, N = -1{\cdot}3010300 = 2 - 1{\cdot}3010300 - 2 =$$
$$= 0{\cdot}6989700 - 2 = \text{Log.}\, 5 - \log. 10^2 = 0\,05$$

(nach Zusatz 3).

Weil $\text{Log.}\, n = 0{\cdot}m'$ ist, so ist n eine Zahl, welche bloß eine Zif-

Digitized by Google

fer für die Ganzen enthält, und demnach ist, wenn n als ganze Zahl betrachtet wird,

für $c = 0$, $N = 0{\cdot}n$,
$c = 1$, $N = 0{\cdot}on$,
$c = 2$, $N = 0{\cdot}oon$,
. . . . . .

d. h. man darf der Zahl n, als ganze Zahl genommen, nur so viele Nullen als Decimal-Stellen links vorsetzen, als c anzeigt.

Soll demnach der Logarithmus eines ächten Bruches $\frac{Z}{N}$ bestimmt werden, so vermehre man die Charakteristik von Log. Z um so viele Einheiten, daß Log. N abgezogen werden kann, und hänge der so gefundenen Differenz rückwärts eine negative Charakteristik an, die der zur Charakteristik von Log. Z hinzu addirten Zahl gleich ist.

Z. B. Log. $\frac{250}{939}$ werde bestimmt. Hier ist

Log. 250 $= 2{\cdot}3979400 = 3{\cdot}3979400 - 1$
Log. 939 $= 2{\cdot}9726656 = 2{\cdot}9726656$

also Log. 250 — Log. 939 = Log. $\frac{250}{939} = 0{\cdot}4252744 - 1$.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man den gegebenen Bruch $\frac{250}{939}$ erst in einen Decimal-Bruch verwandelt, und zu diesem den Logarithmus nach Zus. 1 und 2 bestimmt.

Zusatz 5.

Da die negativen Charakteristiken für uns nur dann einen Sinn haben, wenn sie ganze Zahlen sind; so muß man, wenn ein Logarithmus mit einer negativen Charakteristik durch irgend eine ganze Zahl dividirt werden soll, immer darauf sehen, daß die negative Charakteristik durch den gegebenen Divisor theilbar werde, welches man dadurch bewirkt, daß man die negative Charakteristik bis zur nächst größeren Zahl, die ein Vielfaches des Divisors ist, ergänzt, dagegen die positive Charakteristik um eben so viele Einheiten vermehrt, als jene Ergänzung beträgt.

So z. B. ist Log. $\frac{250}{939} = 0{\cdot}4252744 - 1$,

also Log. $\sqrt{\frac{250}{939}} = \frac{0{\cdot}4252744 - 1}{2} = \frac{1{\cdot}4252744 - 2}{2} = 0{\cdot}7126372 - 1$.

Digitized by Google

Eben so ist, weil Log. $\frac{47}{8153} = 0.7607805 - 3$ ist,

$$\text{Log.} \sqrt[5]{\frac{47}{8153}} = \frac{0.7607805 - 3}{5} = \frac{2.7607805 - 5}{5} = 0.5521561 - 1.$$

§. 191.

Die leichtesten Methoden, die Logarithmen zu berechnen, lehrt die höhere Mathematik. Allein Neper, Brigg und Vlacq kannten jene Vortheile noch nicht, sondern waren gezwungen, auf einem äußerst beschwerlichen Wege die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen, wovon folgende Aufgaben eine kurze Idee geben werden.

Aufgabe. Man suche den Logarithmus von 73 für die Grundzahl 10, oder man bestimme aus der Gleichung $10^x = 73$ den Werth von x.

Da 73 zwischen 10 und $10^2 = 100$ liegt, so muß log. 73 zwischen 1 und 2 liegen. Man suche nun die mittlere geometrische Proportionale zwischen 10 und 100 (§. 164. Zus. 3). Es sey

$$\div 10 : p : 100, \text{ also } p = \sqrt{1000} = 31.6227766, \text{ und}$$

$$\log. p = \log. \sqrt{1000} = \log. \sqrt{10^3} = {}^3/_2 = 1.5.$$

Da nun $p = 31.6227766 < 73$ und $73 < 100$, so suche man nun zwischen 31.622... und 100 die mittlere geometrische Proportionale, man setze nähmlich:

$$\div p : q : 10^2, \text{ oder } \div 31.6227766 : q : 100, \text{ oder } \div 10^{\frac{3}{2}} : q : 10^2$$

$$\text{mithin } q = \sqrt{10^{\frac{7}{2}}} = 10^{\frac{7}{4}} = \sqrt{100 \times 31.6227766} =$$

$$= \sqrt{3162.27766} = 56.234...$$

Hier liegt 73 wieder zwischen q und 10^2, man setze also von neuem:

$$\div q : r : 10^2, \text{ oder } \div 56.2341 : r : 10^2, \text{ oder } \div 10^{\frac{7}{4}} : r : 10^2, \text{ mithin}$$

$$r = \sqrt{10^{\frac{15}{4}}} = 10^{\frac{15}{8}} = \sqrt{10^2 . 56.2341} = \sqrt{5623.41..} = 74.9894..$$

Nun ist $r > 73$, und $73 > q$; man suche demnach zwischen q und r die mittlere geometrische Proportionale, man setze nähmlich

$$\div q : s : r, \text{ oder } \div 10^{\frac{7}{4}} : s : 10^{\frac{15}{8}}, \text{ so wird}$$

$$s = \sqrt{qr} = \sqrt{10^{\frac{29}{8}}} = 10^{\frac{29}{16}} = \sqrt{56.234.. \times 74.9894..} =$$

$$= 64.93816..$$

Digitized by Google

Weil aber 73 nun zwischen s und r, oder zwischen 64·938.. und 74·989.. liegt, so setze man

$$\div s : t : r, \text{ oder } \div 10^{\frac{29}{16}} : t : 10^{\frac{15}{8}}, \text{ so wird}$$

$$t = \sqrt{rs} = \sqrt{10^{\frac{59}{16}}} = 10^{\frac{59}{32}} = \sqrt{64{\cdot}93816.. \times 74{\cdot}9894..} = 69{\cdot}783...$$

Hier fällt 73 zwischen t und r, man setze daher:

$$\div t : u : r, \text{ oder } \div 10^{\frac{59}{32}} : u : 10^{\frac{15}{8}}, \text{ mithin}$$

$$u = \sqrt{tr} = \sqrt{10^{\frac{119}{32}}} = 10^{\frac{119}{64}} = \sqrt{69{\cdot}783... \times 74{\cdot}9894..} = 72{\cdot}3394...$$

Also ist $u < 73 < r$; man suche deßhalb zwischen u und r die mittlere geometrische Proportionale, indem man setzt:

$$\div u : v : r, \text{ oder } \div 10^{\frac{119}{64}} : v : 10^{\frac{15}{8}}. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$v = \sqrt{u.r} = \sqrt{10^{\frac{239}{64}}} = 10^{\frac{239}{128}} = \sqrt{72{\cdot}3394... \times 74{\cdot}9894...} =$$
$$= 73{\cdot}6525...$$

Weil nun 73 zwischen u und v fällt, so setze man:

$$\div u : w : v, \text{ oder } \div 10^{\frac{119}{64}} : w : 10^{\frac{239}{128}}, \text{ woraus}$$

$$w = \sqrt{uv} = \sqrt{10^{\frac{477}{128}}} = 10^{\frac{477}{256}} = \sqrt{72{\cdot}3394... \times 73{\cdot}6525...} =$$
$$= 72{\cdot}993...$$

gefunden wird. Dieser Werth ist von 73 nicht mehr als um 0·007 unterschieden.

Je weiter wir diese Rechnung fortsetzen, desto mehr werden wir uns dem wahren Werthe von 73 nähern. Begnügen wir uns nun mit dem Näherungswerthe w, d. h. nehmen wir 72·993 für 73, so ist näherungsweise

$$\log. 73 = \log. w = \frac{477}{256} = 1{\cdot}8632813,$$

in den Tafeln findet man: $\log. 73 = 1{\cdot}8633229,$
mithin beträgt der Fehler 0·0000416.

Übrigens sieht man schon hieraus das Beschwerliche der Arbeit. Bequemer läßt sich unsere Aufgabe auf folgende Art lösen.

Aus der Gleichung $10^x = 73$ folgt, daß $x > 1$ und < 2 seyn müsse, man setzt deßhalb $x = 1 + \frac{1}{x'}$, wo $\frac{1}{x'}$ was immer für einen ächten Bruch bezeichnet; so erhält man

Digitized by Google

$$10^{1+\frac{1}{x'}} = 7{\cdot}3, \text{ oder } 10^{1}.10^{\frac{1}{x'}} = 7{\cdot}3, \text{ also}$$

$$10^{\frac{1}{x'}} = \frac{7{\cdot}3}{10} = 7{\cdot}3^{x'}, \text{ und } 10 = 7{\cdot}3^{x'}.$$

Da nun $(7{\cdot}3)^1 = 7{\cdot}3 < 10$, und $(7{\cdot}3)^2 = 53{\cdot}29 > 10$, so liegt der Werth von x' zwischen 1 und 2. Man setze also $x' = 1 + \frac{1}{x''}$, so erhält man

$$10 = (7{\cdot}3)^{1+\frac{1}{x''}} = 7{\cdot}3^1 . (7{\cdot}3)^{\frac{1}{x''}}, \text{ also } \frac{10}{7{\cdot}3} = (7{\cdot}3)^{\frac{1}{x''}}, \text{ mithin}$$

$$\left(\frac{10}{7{\cdot}3}\right)^{x''} = 7{\cdot}3, \text{ oder } (1{\cdot}369863\,..)^{x''} = 7{\cdot}3.$$

Hier liegt x'' zwischen 6 und 7, denn $(1{\cdot}369863)^6 = 6{\cdot}607886$, und $(1{\cdot}369863)^7 = 9{\cdot}0519$; man setze daher $x'' = 6 + \frac{1}{x'''}$; so erhält man $(1{\cdot}369863)^{6+\frac{1}{x'''}} = 7{\cdot}3$, oder $(1{\cdot}369863)^6.(1{\cdot}369863)^{\frac{1}{x'''}} = 7{\cdot}3$, also $(1{\cdot}369863)^{\frac{1}{x'''}} = 7{\cdot}3 : (1{\cdot}369863)^6 = 7{\cdot}3 : 6{\cdot}607886 = 1{\cdot}104735\ldots$, mithin $(1{\cdot}104735)^{x'''} = 1{\cdot}369863$.

Der Werth von x''' liegt hier zwischen 3 und 4, denn es ist

$(1{\cdot}104735)^3 = 1{\cdot}348263\,.. < 1{\cdot}369863$, und
$(1{\cdot}104735)^4 = 1{\cdot}489474\,.. > 1{\cdot}369863$;

man setze demnach $x''' = 3 + \frac{1}{x^{IV}}$; so erhält man

$$(1{\cdot}104735)^{3+\frac{1}{x^{IV}}} = 1{\cdot}369863, \text{ oder } (1{\cdot}104735)^3 . (1{\cdot}104735)^{\frac{1}{x^{IV}}} = 1{\cdot}369863, \text{ also}$$

$$(1{\cdot}104735)^{\frac{1}{x^{IV}}} = 1{\cdot}369863 : (1{\cdot}104735)^3 = 1{\cdot}369863 : 1{\cdot}348263 = 1{\cdot}016021\,..,$$

folglich $1{\cdot}104735 = (1{\cdot}016021)^{x^{IV}}$, wo x^{IV} zwischen 6 und 7 liegt.

Setzt man endlich $x^{IV} = 6 + \frac{1}{x^V}$, so erhält man durch Substitution: $(1{\cdot}016021)^{6+\frac{1}{x^V}} = 1{\cdot}104735$, und hieraus folgt:

Digitized by Google

$(1{\cdot}016021)^{\frac{1}{x^v}} = 1{\cdot}104735 : (1{\cdot}016021)^6 = 1{\cdot}104735 : 1{\cdot}10006$
$= 1{\cdot}00425 \ldots,$

mithin $(1{\cdot}00425)^{x^v} = 1{\cdot}016021$, wo x^v zwischen 4 und 5 fällt, weßhalb man $x^v = 4 + \frac{1}{x^{vi}}$ setzt. Wir wollen aber hier die Rechnung abbrechen, indem wir $x^v = 4$ setzen, und uns mit dem Näherungswerthe begnügen, welchen wir nun auf folgende Art bestimmen.

Wir haben bereits gefunden, daß

$x = 1 + \frac{1}{x'}$, $x' = 1 + \frac{1}{x''}$, $x'' = 6 + \frac{1}{x'''}$, $x''' = 3 + \frac{1}{x^{iv}}$,

$x^{iv} = 6 + \frac{1}{x^v}$ und $x^v = 4 + \frac{1}{x^{vi}}$; wo wir näherungsweise $x^v = 4$ setzten.

Substituiren wir diese gefundenen Werthe rückwärts, so finden wir $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4}}}}}$ näherungsweise, oder (nach §. 123.)

$\log. 73 = x = 1 + \frac{499}{578} = 1{\cdot}8633218$, und nach den Tafeln ist

$\log. 73 = 1{\cdot}8633229$, mithin ist die

Differenz $= 0{\cdot}0000011$, welche schon bey weitem kleiner ist, als die obige.

Anmerkung. Diese Entwicklung des Log. 73 zeigt also die Art und Weise, wie man die Logarithmen aller positiven Zahlen berechnen könne; die höhere Analyse aber lehrt weit bequemere Vorschriften. Ungefähr nach der ersten angegebenen Methode haben Briggs und Vlacq die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 berechnet, und dieselben in Tafeln zusammengestellt, so daß man in denselben zu jeder Zahl, welche die Gränzen der Tafel nicht überschreitet, den dazu gehörigen Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl sogleich finden kann. Solche Tafeln nun sind unter dem Nahmen Logarithmen-Tafeln bekannt, deren es jetzt sehr viele gibt, unter denen die folgenden am meisten im Gebrauche sind:

A. Größere Tafeln.

1) C. v. Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig, 1793.

2) Desselben logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln, 2 Bände. Leipzig, 1791 (2te Ausgabe).

Digitized by Google

3) Desselben vollständige Sammlung gröfserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, 1 Band in Folio. Leipzig, 1794.

4) Joh. Carl Schulze: neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauche der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin, 1778. 2 Bände in 8vo.

5) Fr. Callet, Tables portatives de Logarithmes, contenant les Logarithmes des Nombres depuis 1 jusqu'à 108000 etc. Édition stéréotype. A Paris, 1795.

B. Kleinere Tafeln.

1) J. Hantschl, logarithmisch-trigonometrische Tafeln (noch nicht ganz vollendet).

2) Lindner, logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien, bey Geistinger, 1812.

3) Simon Stampfer, logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Salzburg, 1822.

4) J. Th. Kulik, Handbuch mathematischer Tafeln. Grätz, 1824.

5) J. De La Lande: Tables de Logarithmes. A Paris, 1805 (Édition stéréotype).

Die Art des Gebrauches solcher Tafeln ist gewöhnlich in den ihnen vorausgeschickten Einleitungen auseinander gesetzt. Hier sollen nur einige mehr allgemeine Sätze darüber angegeben werden.

§. 192.

I. Aus dem §. 190 Gesagten sieht man leicht ein, daß die Logarithmen der Zahlen um so weniger von einander verschieden seyn müssen, je gröfser dieselben sind, denn zwischen 10 und 100 liegen mehr Zahlen, als zwischen 1 und 10, zwischen 100 und 1000 mehr als zwischen 10 und 100 u. s. w., es wird also die Einheit, als Unterschied zwischen Log. 10^{n+1} und Log. 10^n immer auf desto mehr dazwischen liegende Zahlen vertheilt, je gröfser n wird, je gröfser demnach jene Zahlen selbst werden. Es werden also die logarithmischen Differenzen desto kleiner, je gröfser die entsprechenden Zahlen werden.

In den Tafeln sind die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10000 gewöhnlich mit 7 Decimal-Stellen angegeben. Vergleicht man nun in solchen Tafeln die Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen; so sieht man sogleich, daß die logarithmischen Differenzen sich einander immer mehr und mehr nähern, so daß dieselben, wenn die ihnen entsprechenden Zahlen gröfser als 1000 sind, nur noch in der letzten (7ten) Decimale von einander unterschieden sind. Liegen aber die Zahlen schon nahe bey 10000, so beträgt der Unterschied ihrer logarith-

Digitized by Google

mischen Differenzen in der 7ten Decimal-Stelle keine ganze Einheit mehr.

II. Vergleicht man endlich die Logarithmen von mehrern auf einander folgenden Zahlen, die größer als 1000, aber um keine ganze Einheit von einander verschieden sind, so sind die Differenzen der ihnen entsprechenden Logarithmen in den 7 ersten Decimalen beynahe vollkommen gleich. Ist nähmlich $N = z + \delta$, wo z was immer für eine ganze Zahl, die größer als 1000 ist, und δ irgend einen positiven ächten Bruch bezeichnet, so ist, wie in der höhern Analysis bewiesen wird, $\text{Log.} \frac{z+\delta}{z}$ sehr nahe $= \delta \,.\, \text{Log.} \frac{z+1}{z}$.

Aus der Gleichung $\text{Log.} \frac{z+\delta}{z} = \delta \,.\, \text{log.} \frac{z+1}{z}$ folgt

a) $\text{Log.}(z+\delta) - \text{Log.}\, z = \delta\,(\text{log.}(z+1) - \text{log.}\, z)$,

mithin b) $\text{Log.}(z+\delta) = \text{Log.}\, z + \delta\,[\text{log.}(z+1) - \text{log.}\, z]$

und c) $\text{Log.}(z+1) - \text{log.}\, z : \text{Log.}(z+\delta) - \text{log.}\, z = 1 : \delta$ (§. 164),

wo $z+\delta$ zwischen z und $z+1$ liegt.

Nun ist aber auch $(z+1) - z : (z+\delta) - z = 1 : \delta$, also auch $(z+1) - z : (z+\delta) - z = \text{log.}(z+1) - \text{log.}\, z : \text{log.}(z+\delta) - \text{log.}\, z$, d. h. der Unterschied zwischen zwey auf einander folgenden Zahlen, die größer als 1000 sind, verhält sich zur Differenz zwischen der gegebenen und der nächst kleinern ganzen Zahl δ, wie die logarithmische Differenz der beyden ersten Zahlen zu der der beyden letzten.

III. Dieser Satz biethet uns ein Mittel dar, um mit Hülfe der Tafeln, welche nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 enthalten, auch die Logarithmen von 6- und 7-zifferigen Zahlen zu bestimmen. Denn gesetzt, man sollte Log. 47856·9 aus solchen Tafeln nehmen, so darf man (nach der Gleichung b) nur setzen:

$\text{Log.}\, 47856{\cdot}9 = \text{Log.}\, 47856 + 0{\cdot}9\,(\text{log.}\, 47857 - \text{log.}\, 47856)$.

Zur Abkürzung solcher Rechnungen befindet sich in den guten Logarithmen-Tafeln auf jeder Seite rechts eine eigene Spalte, mit P. P. (partes proportionales — Proportionaltheile) überschrieben, welche für jede fünfzifferige Zahl $= N$, die Differenz von $\text{Log.}(N+1) - \text{Log.}\, N = D$ enthält. Diese Differenz wird die herrschende Differenz genannt. In jener Spalte nun, welche oben mit P. P. und unten mit Diff. bezeichnet ist, findet man jedes Mahl die Werthe von $\frac{1}{10}$ D, $\frac{2}{10}$ D, $\frac{3}{10}$ D . . . $\frac{9}{10}$ D. Soll man demnach den Logarithmus einer sechszif-

Digitized by Google

ferigen Zahl (z. B. 734586) bestimmen, so sucht man in den Tafeln den Logarithmus der 5 höchsten Ziffern (hier von 73458 = N), und zieht denselben vom Logarithmus der nächst größern Zahl N+1=73459 ab, wodurch die herrschende logarithmische Differenz D gefunden wird. Nun sucht man den Werth von D in der mit P. P. überschriebenen Spalte, und unter ihm links von der Verticallinie die sechste Ziffer (6) der gegebenen Zahl, so stehen rechts die dazu gehörigen Proportionaltheile, welche zu den letzten Ziffern von Log. N addirt den Logarithmus der gegebenen Zahl geben. Um also Log. 734586 zu bestimmen, schreibe man zuerst Log. 73458·6, so findet man in den Tafeln

Log. 73459 = 4·8660450
und Log. 73458 = 4·8660391 } also D = 0·0000059, oder D=59,

und in der mit P. P. überschriebenen Spalte findet man unter D=59, daß 35 zur Ziffer 6 als Proportionaltheile gehören.

Es ist daher, weil Log. 73458 = 4·8660391
und wegen 6 = +35
Log. 73458·6 = 4·8660426
folglich Log. 734586 = 5·8660426.

Man hätte eigentlich nach unserem obigen Satze so setzen müssen:

(73459 − 73458) : 73458·6 − 73458 =
= 0·0000059 : log. 73458·6 − log. 73458,

oder 1 : 0·6 = 0·0000059 : Log. 73458·6 − 4·8660391,
also Log. 73458·6 − 4·8660391 = 0.6 × 0·0000059
und daher Log. 73458·6 = 4·8660391 + 0·000035.4
= 4·8660391 + 0·000035 wie vorhin.

Besteht die gegebene Zahl aus 7 Ziffern, so sucht man nach der angegebenen Regel den Logarithmus für die ersten 6 Ziffern, und fügt diesem die zur 7ten Ziffer gehörigen Proportionaltheile noch hinzu, die nach demselben Principe berechnet werden.

Soll also z. B. Log. 7345869 bestimmt werden, so schreibe man Log. 73458·69, und man findet dann in den Tafeln

Log. 73458 = 4·8660391, D = 59, mithin
wegen 6 0·6 D = 35
und wegen 9 0·09 D = 5
also Log. 73458·69 = 4·8660431
folglich Log. 734586 9 = 6·8660431.

Wären in der Tafel keine Proportionaltheile angegeben, so würde man nach der Gleichung b) log. (z + δ) = log. z + δ . D erhalten

Digitized by Google

$$\text{Log. } 73458{\cdot}69 = \text{log. } 73458 + 0{\cdot}69 \times 0{\cdot}0000059$$
$$= 4{\cdot}8660391 + 0{\cdot}0000040{,}71$$
$$= 4{\cdot}8660431$$

mithin log. 7345869 = 6·8660431 wie vorhin.

Dieser Logarithmus ist etwas zu klein, weil man $\frac{71}{10^9}$ vernachläßigt hat, dagegen würde 6·8660432 etwas zu groß seyn.

Soll umgekehrt zu einem Logarithmus, der nicht genau in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl bestimmt werden, so nimmt man den nächst kleinern Logarithmus der Tafel, und die demselben entsprechende fünfzifferige Zahl betrachtet man als die 5 höchsten Stellen der gesuchten Zahl. Den Rest sucht man unter der herrschenden Differenz in der mit P. P. bezeichneten Spalte, wodurch man die sechste Ziffer der gesuchten Zahl erhält, und für den Fall, daß ein neuer Rest bleiben sollte, sucht man das Zehnfache desselben ebenfalls unter D, und findet so die 7te Ziffer der gesuchten Zahl.

Sollte endlich die Charakteristik des gegebenen Logarithmus größer seyn als die Anzahl der Ziffern in der gefundenen Zahl, so werden die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt.

Z. B. man suche x aus der Gleichung 4·9273849 = log. x.

Der gegebene Logarithmus ist 4·9273849 = log. x

in den Tafeln findet man 4·9273806 = log. 84602

Rest 43

D = 52, also gehört zu 42 die Ziffer 8

und zu 1·0 » 2

folglich ist 4·9273849 = log. 8,1602·82,

nähmlich es ist x = 84602·82.

IV. Besteht die gegebene Zahl aus 8 oder mehreren Ziffern, so läßt sich der zugehörige Logarithmus mit den gewöhnlichen Tafeln, in denen die Logarithmen nur mit 7 Decimalen enthalten sind, nicht mehr bestimmen, oder die achte und folgende Ziffern der gegebenen Zahl bringen in den 7 ersten Stellen der Mantisse keine Änderung mehr hervor. In solchen Fällen müßte man sich also größerer Tafeln — wie Vega's Thesaurus — bedienen, oder seine Zuflucht zu den Hülfsmitteln der höhern Analysis nehmen. Übrigens wird man im gemeinen Leben nie in den Fall kommen, dieß thun zu müssen.

Digitized by Google

§. 193.

Fast bey allen practischen Rechnungen bedient man sich der gemeinen Logarithmen ihrer Bequemlichkeit wegen; allein bey höhern Rechnungen ist man oft gezwungen, sich der sogenannten **natürlichen Logarithmen** zu bedienen, deren Grundzahl $e = 2{\cdot}718281828459\ldots$ ist. Man bezeichnet die natürlichen Logarithmen durch Log. nat., um sie von den gemeinen, die durch Log. vulg. (Logarithmus vulgaris), oder schlechtweg durch Log. bezeichnet werden, zu unterscheiden.

Setzt man nun die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= e$, die der gemeinen $= g = 10$, und ist Log. nat. $N = n$, und log. vulg. N $=$ log. $N = n'$, so ist (nach §. 184.)

$$N = e^n \text{ und } N = g^{n'},$$

$$\text{folglich } e^n = g^{n'},$$

$$\text{mithin auch } \log. e^n = \log. g^{n'},$$

$$\text{d. i. } n \log. e = n' \log. g,$$

und wenn man unter log. die gemeinen Logarithmen versteht, so ist, weil log. g = log. $10 = 1$ ist (§. 186. Zus. 4.)

$$n \log. e = n',$$

und durch Substitution

$$\log. \text{nat. } N \times \log. e = \log. N,$$

$$\text{also } \log. \text{nat. } N = \frac{1}{\log. e} \cdot \log. N.$$

Weil nun $e = 2{\cdot}718281828459\ldots$, und

log. vulg. e = log. $e = 0{\cdot}434294481 9\ldots$, also

$$\frac{1}{\log. e} = 2{\cdot}302585093 0\ldots$$

wie in der höhern Analysis gezeigt wird, so erhalten wir folgende Gleichungen:

1) $\log. N = \log. e \times \log. \text{nat. } N = 0{\cdot}434294481 9 . \log. \text{nat. } N,$

2) $\log. \text{nat. } N = \frac{1}{\log. e} . \log. N = 2{\cdot}302585093 0 . \log. N,$

d. h. **der gemeine Logarithmus einer Zahl N wird gefunden, wenn man den natürlichen Logarithmus derselben Zahl N mit 0·434294481 9 multiplizirt, und umgekehrt:**

Der natürliche Logarithmus einer Zahl N wird gefunden, wenn man den gemeinen Logarithmus der gegebenen Zahl N mit 2·302585093 0 multiplizirt.

Digitized by Google

§. 194.

Von der dekadischen Ergänzung.

Die dekadische Ergänzung oder das arithmetische Complement ist die Differenz zwischen einer gegebenen Zahl und der nächst höhern dekadischen Einheit. So z. B. ist 2 das arithmetische Complement von 8, weil $8+2=10$ oder $10-2=8$ ist, und eben so ist 20 die dekadische Ergänzung von 80, weil $80+20=100$, oder $100-20=80$ ist. Die dekadische Ergänzung eines Logarithmus ist demnach der Unterschied zwischen 10 und dem gegebenen Logarithmus. So z. B. ist log. v. $495 = 2{\cdot}6946052$, und daher die dekad. Erg. log. $495 = 10 - 2{\cdot}6946052 = 7{\cdot}3053948$, also auch umgekehrt log $495 = 10$ — dek. Erg. log. $495 = 10 - 7{\cdot}3053948 = 2{\cdot}6946052$.

Weil nun $\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b$, und $\log. b = 10 -$ dek. Erg. log. b, so ist auch $\log. \frac{a}{b} = \log. a - (10 -$ dek. Erg. log. b) $= \log. a - 10 +$ dek. Erg. log. b oder $\log. \frac{a}{b} = \log. a +$ dek. Erg. log. b $- 10$, durch welchen Kunstgriff also die Subtraction der Logarithmen in eine Addition verwandelt wird, was bisweilen sehr vortheilhaft ist.

So z. B. ist

$$\log. \frac{45}{13} = \log. 45 - \log. 13 = \log. 45 + \text{dek. Erg. log. } 13 - 10$$

$$= \left\{ \begin{array}{rl} \log. 45 = & 1{\cdot}6532125 \\ -\log. 13 = & -1{\cdot}1139434 \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$\log. \frac{45}{13} = 0{\cdot}5392691$$

$$= \left\{ \begin{array}{rl} \log. 45 = & 1{\cdot}6532125 \\ +\text{dek. Erg. log. } 13 = & +8{\cdot}8860566 - 10 \end{array} \right\}.$$

$$= 10{\cdot}5392691 - 10$$

Eben so, wenn $x = \frac{3129 \cdot 2845}{713 \cdot 4928}$, ist

$\log. x = \log. 3129 + \log. 845 - \log. 713 - \log. 4928$

$= \log. 3129 + \log. 845 +$ dek. Erg. log. 713 + dek. Erg. log. $4928 - 20$, und weil

Digitized by Google

log. 3129 = 3·4954036
+ log. 2845 = 3·4540823 . . . . . = 6·9494879
+ dec. Erg. log. 713 = 7·1469105—10 oder — log. 713 = — 2·8530895
+ dec. Erg. log. 4928 = 6·3073293—10 » — log. 4928 = — 3·6926707

mithin log. x = 20·4037277—20 = 0·4037277.

Zieht man einen Logarithmus mit einer negativen Charakteristik von 10 ab, so wird dieselbe positiv, und muß demnach zum Complemente addirt werden. So z. B. ist log. 0·0425 = 0·6283889 — 2, mithin

dec. Erg. log. 0·0425 = 10 — (0·6283889 — 2) = 10 — 0·6283889 + 2
= 12 — 0·6283889 = 11·3716111.

Wäre also z. B. $x = \frac{0{\cdot}7316}{0{\cdot}0425}$; so erhielte man

log. x = log. 0·7376 — log. 0·0425
= log. 0·7376 + dec. Erg. log. 0·0425 — 10,
und weil log. 0·7376 = 0·8678209 — 1
und dec. Erg. log. 0·0425 = 11·3716111 — 10

so ist log. x = 12·2394320 — 11 = 1·2394320.

* Anwendungen von den Logarithmen werden in den folgenden Kapiteln vorkommen.

Digitized by Google

Eilftes Kapitel.

Von den Gleichungen im Allgemeinen.

§. 195.

Vorbegriffe.

I. Einen doppelten Ausdruck für eine und dieselbe Größe nennt man eine Gleichung, die beyden Ausdrücke selbst aber die Seiten der Gleichung, und die durch + und — auf jeder Seite der Gleichung verbundenen Größen Glieder oder Theile der Gleichung. So ist z. B. in der Gleichung $mx+n-p=a+2mn$ die Größe $mx+n-p$ die eine, und $a+2mn$ die andere Seite der Gleichung. Die erste Seite besteht hier aus drey, und die andere aus zwey Gliedern.

II. Weil jede Seite der Gleichung wenigstens ein Glied enthält, so ist jede Gleichung wenigstens zweygliedrig. Was man unter einer mehr- oder vielgliedrigen Gleichung zu verstehen habe, ist nun für sich klar.

III. Eine Gleichung heißt identisch, wenn ihre beyden Seiten nicht nur einander gleich, sondern völlig einerley sind, oder wenigstens auf einen solchen Ausdruck führen, wie z. B. $A=A$, $\sqrt{(n-x)^2}=n^2-2nx+x^2$, u. s. w.

IV. Der Satz, welcher verlangt, aus gewissen Bedingungen den Werth einer unbekannten (relativen, d. i. abhängigen) Größe aufzufinden, heißt Aufgabe (Problem).

Bedingungen sind nichts anders, als Sätze, welche gewisse Eigenschaften aussprechen, die den in Frage gestellten Unbekannten zukommen, oder gewisse Beziehungen (Relationen), in welchen die Unbekannten theils unter sich, theils mit bekannten Größen stehen.

V. Die angegebenen Bedingungen ganz der Aufgabe gemäß mittelst der arithmetischen Zeichen in eine Gleichung bringen, heißt die Aufgabe ansetzen, oder die Gleichung bilden (formiren). — Die Bildung der bestimmten Gleichung, d. i. die Übersetzung des Wortau-

Digitized by Google

drucks einer Aufgabe in die algebraische Zeichensprache, ist ein Werk der Urtheilskraft, und kann demnach nicht gelehrt, sondern nur durch Übung an Beyspielen erleichtert werden. Man muß sich daher bemühen, Fertigkeit in der genannten algebraischen Zeichenschrift zu erlangen, und die Aufgaben in ihre Bedingungen zu zerlegen, diese mögen wörtlich ausgedrückt seyn, oder im Sinne der Frage verborgen liegen.

Bey der Bildung der Gleichungen mag Folgendes für den ersten Anfänger einiger Maßen leitende Vorschrift seyn: »Man bezeichne die Größen, deren Werthe gesucht werden, mit den letztern Buchstaben des Alphabets, nähmlich durch z, y, x, w . . ., und verbinde dann diese mit den bekannten Größen durch jene arithmetische Operationen, welche in den Bedingungen der Aufgabe ausgesprochen sind. Hierauf setze man den so erhaltenen Ausdruck dem Werthe gleich, welchen er der Aufgabe gemäß haben soll, welcher Werth in der Aufgabe entweder unmittelbar gegeben ist, oder welcher ebenfalls erst durch gewisse angegebene Verbindungen erhalten wird. Ist endlich auf diese Art die Gleichung gebildet, so schreitet man zur Auflösung derselben.

VI. Eine Gleichung **auflösen** heißt das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Größe von den bekannten durch einen algebraischen Ausdruck (Formel) anschaulich darstellen. So sieht man z. B. aus der aufgelösten Gleichung: $x = \frac{\sqrt[3]{m^2+n^2}}{2mn} \cdot p$, wo m, n und p bekannte Größen bezeichnen sollen, deutlich, welche arithmetische Operationen mit den bekannten Größen m, n, p zur Bestimmung der unbekannten x vorgenommen werden müssen.

Man betrachtet eine Gleichung als aufgelöst, wenn die Unbekannte x positiv, bloß mit dem Coefficienten 1 in der ersten Potenz, ganz allein auf einer Seite der Gleichung steht, und alle bekannten Größen nach richtigen arithmetischen Grundsätzen auf die andere Seite gebracht worden sind, wie dieß im vorigen Beyspiele der Fall ist. — Von der Richtigkeit der Auflösung einer Gleichung überzeugt man sich dadurch, daß man den für die Unbekannte gefundenen Werth in der, den Bedingungen der Aufgabe gemäß gebildeten Gleichung substituirt, wodurch der doppelte Ausdruck erhalten werden muß, wie ihn die Aufgabe verlangt. Der Werth für x, welcher der Aufgabe Genüge leistet, heißt auch **Wurzel** der Gleichung.

Digitized by Google

§. 196.

Grundregeln zur Auflösung der Gleichungen.

1) Es ist für sich klar, daß, wenn $A = B$, auch $B = A$ seyn müsse, d. h. man kann der Gleichheit unbeschadet die Seiten der Gleichung verwechseln.

2) Gleiches zu Gleichem addirt, oder Gleiches von Gleichem abgezogen, gibt wieder Gleiches; wenn nähmlich $A = B$, so ist auch $A \pm C = B \pm C$.

Wenn demnach $A + C = B$,

so ist auch $A + C - C = B - C$,

d. i. (a) $A = B - C$.

Eben so ist, wenn $A - D = B$,

auch $A - D + D = B + D$,

nähmlich (b) $A = B + D$.

Hieraus sehen wir also, daß man, ohne die Gleichheit aufzuheben, ein beliebiges Glied der Gleichung von der einen Seite auf die andere bringen könne, wenn man dasselbe mit verändertem Zeichen überträgt.

Wenn z. B. $x - b + m = a - 2x$, so ist auch

$x + 2x = a + b - m$

oder $3x = a + b - m$.

Kommen demnach auf beyden Seiten der Gleichung gleiche Größen mit einerley Zeichen vor, so kann man diese geradezu weglassen.

Wenn z. B. $mx - a + b = n - a + b$, so ist auch

$mx = n - a + b + a - b$, d. i.

$mx = n$.

3) Aus der Gleichung $A - B = C - D$ folgt (nach 2)

$-C + D = -A + B$, also auch (nach 1)

$-A + B = -C + D$,

d. h. die Gleichheit zweyer Ausdrücke wird nicht aufgehoben, wenn man durchaus die Zeichen ändert.

4) Jede Gleichung läßt sich auf o bringen, wenn man alle Glieder derselben auf eine Seite bringt. Denn wenn z. B.

$A - B = C - D + E$, so ist auch (nach 2)

$A - B - C + D - E = o$.

5) Die Gleichheit wird nicht gestört, wenn man die ganze Gleichung, d. i. alle ihre Glieder mit derselben Zahl multiplizirt. Ist nähmlich

Digitized by Google

$A = B$; so ist auch

$$m \cdot A = mB.$$

Dieser Satz biethet uns das Mittel dar, eine gegebene Gleichung von den Brüchen zu befreyen. Denn es sey z. B.

$\frac{a}{m} - \frac{x}{n} + c = \frac{a+x}{n} - m$, so ist, wenn man mit m multiplizirt,

$a - \frac{mx}{n} + cm = \frac{m(a+x)}{n} - m^2$, und nun mit n multiplizirt, erhält man

$an - mx + cmn = m(a+x) - m^2 n$.

Kürzer verfährt man, wenn man die ganze Gleichung gleich mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplizirt.

Ist z. B. $\frac{3x}{4} - 5 + \frac{x}{6} = \frac{x-3}{12} + \frac{5-x}{2}$, so erhält man durch Multiplication mit 12 sogleich:

$$\frac{3x}{4} \cdot 12 - 60 + \frac{x}{6} \cdot 12 = x - 3 + \frac{5-x}{2} \cdot 12,$$

nähmlich $9x - 60 + 2x = x - 3 + 30 - 6x$

oder $11x - 60 = 27 - 5x$.

Haben demnach alle Glieder der Gleichung denselben Nenner, so kann man diesen der Gleichheit unbeschadet hinweglassen.

6) Wenn $A = B$

$C = D$

$E = F$

. . . . . so ist auch (nach 5)

$ACE \ldots = BDF \ldots$

Setzt man hier $A = C = E = \ldots$ und $B = D = F = \ldots$, so erhält man

$AAA \ldots = BBB \ldots$, und wenn die Anzahl der Factoren $= n$ ist, so ist $A^n = B^n$,

d. h. gleiche Größen auf gleiche Potenzen erhoben geben wieder Gleiches, oder, die Gleichheit wird nicht gestört, wenn man beyde Seiten der Gleichung auf dieselbe Potenz erhebt.

Ist demnach $\sqrt[m]{A} = B$, so ist auch

$(\sqrt[m]{A})^m = B^m$, oder $A = B^m$.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, eine Gleichung, in welcher irrationale Glieder vorkommen, rational zu machen.

Es sey z. B. $3a + \sqrt{2x - n} = m - 3\sqrt{x}$, so erhält man erstlich

$\sqrt{2x} + 3\sqrt{x} = m + n - 3a$, und dann

$(\sqrt{2x} + 3\sqrt{x})^2 = (m + n - 3a)^2$, nähmlich

Digitized by Google

$$2x+6\sqrt{2x^2+9x}=(m+n-3a)^2, \text{ und hieraus folgt}$$
$$6\sqrt{2x^2}=(m+n-3a)^2-11x, \text{ mithin auch}$$
$$(6\sqrt{2x^2})^2=[(m+n-3a)^2-11x]^2, \text{ oder}$$
$$72x^2=[(m+n-3a)^2-11x]^2.$$

7) Eine Gleichung bleibt auch beständig, wenn man alle Glieder derselben durch dieselbe Größe dividirt; ist nähmlich

$$A=B, \text{ so ist auch } \frac{A}{C}=\frac{B}{C}.$$

Haben demnach alle Theile der Gleichung einen gemeinschaftlichen Factor, so wird die Gleichung dadurch einfacher, wenn man durch jenen Factor dividirt. Ist z. B. $mx^2-3mx=m^3-mn^2$; so ist auch

$$x^2-3x=m^2-n^2.$$

Man kann daher auch jedes beliebige Glied einer Gleichung von seinem Coefficienten befreyen, wenn man die ganze Gleichung durch denselben dividirt. Hat man z. B. $ax=m-n$, und man will vom Gliede ax den Factor a trennen, so erhält man $x=\frac{m-n}{a}$.

8) Man kann ferner der Gleichheit unbeschadet auf beyden Seiten der Gleichung die Wurzel desselben Grades ausziehen. Ist nähmlich $A=B$, so ist auch $\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}$; eben so, wenn $x^n=A$, ist auch $x=\sqrt[n]{A}$.

§. 197.

Eintheilung der Gleichungen.

1) Man theilt die Gleichungen nach der Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Größen in Gleichungen mit einer und mit mehrern unbekannten Größen.

2) Nach der höchsten Summe der Exponenten, mit welchen die unbekannten Größen in einem und demselben Gliede behaftet sind, theilt man die Gleichungen in Gleichungen des ersten, zweyten, dritten u. s. w., allgemein des n^{ten} Grades, je nachdem die höchste Summe der Exponenten 1, 2, 3... oder n ist. So sind z. B. $ax+b=c$, und $ax+by=c$ Gleichungen des ersten Grades, oder einfache Gleichungen; eben so sind $ax^2=b$, $ax^2+bx=c$, $axy=b$ u. s. w. Gleichungen des zweyten Grades, oder quadratische Gleichungen; $ax^3=b$, $ax^3+bx^2+cx=d$, $x^2+axy^2+bxy^2=c$ u. s. f. Gleichungen des dritten Grades, oder kubische Gleichungen; ferner

Digitized by Google

sind $ax^4 = b$, $ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx = e$, $x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = c$, $ax^4 + bx^2 = c$, ꝛc. Gleichungen des vierten Grades, oder biquadratische Gleichungen, und allgemein sind $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + lx + m = o$, $x^n + ax^{n-m}y^m + bx^{n-p}y^p + \ldots = k$ Gleichungen des n^{ten} Grades.

Jedoch muß bey der Bestimmung des Grades einer Gleichung diese zuvor so viel möglich abgekürzt, und von Brüchen befreyt werden, und wenn die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen erscheint, so muß die Gleichung erst rational gemacht werden. So z. B. scheint die Gleichung $x^{m+n} + ax^{m+n-2} + bx^{m+3} = cx^m$ vom $(m+n)^{ten}$ Grade zu seyn; allein dividirt man dieselbe durch den gemeinschaftlichen Factor x^m, so findet man, daß sie nur vom n^{ten} Grade ist, nähmlich $x^n + ax^{n-2} + bx^3 = c$. Eben so folgt aus der Gleichung $a\sqrt{nx} - cx = a - \frac{m}{x}$, erstlich $ax\sqrt{nx} - cx^2 = ax - m$,

dann $ax\sqrt{nx} = ax - m + cx^2$,

also $(ax\sqrt{nx})^2 = (cx^2 + ax - m)^2$,

nähmlich $a^2nx^3 = c^2x^4 + 2acx^3 + (a^2 - 2cm)x^2 - 2amx + m^2$,

oder $c^2x^4 + (2ac - a^2n)x^3 + (a^2 - 2cm)x^2 - 2amx + m^2 = o$,

welches eine Gleichung vom vierten Grade ist.

3) Gleichungen, die den zweyten Grad übersteigen, heißt man gewöhnlich höhere oder zusammengesetzte Gleichungen. — Die höheren Gleichungen heißen reine, wenn sie die unbekannte Größe nur in einer einzigen Potenz enthalten. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist $Ax^n = B$, wo A und B was immer für bestimmte, von x unabhängige Größen bezeichnen. Unrein, gemischt oder verwickelt aber heißt eine höhere Gleichung, wenn sie die unbekannte Größe in verschiedenen Potenzen enthält, und zwar entweder vollständig oder unvollständig, je nachdem die Unbekannte in allen Potenzen von der ersten bis zur n^{ten} (wenn die Gleichung vom n^{ten} Grade ist) erscheint, oder nicht. So z. B. ist $ax^2 + bx = c$ eine unreine quadratische Gleichung; eben so ist $ax^3 + bx^2 + cx = d$ eine verwickelte kubische Gleichung, und zwar eine vollständige, aber $ax^3 + bx^2 = c$ und $ax^3 + mx = d$ sind unvollständige verwickelte Gleichungen des dritten Grades.

Digitized by Google

4) Eine numerische Gleichung ist eine solche, in welcher die gegebenen Größen lauter bestimmte Zahlen sind, z. B. $3x - \frac{2x}{5} = 12$. Eine Litteral-Gleichung aber ist eine solche, in welcher die gegebenen Größen allgemeine oder unbestimmte Zahlen (Buchstaben) sind.

Begriff und Eintheilung der Algebra.

§. 198.

1) Wenn in einer Gleichung bekannte Größen mit unbekannten so verbunden sind, daß sich daraus der Werth der letztern bestimmen läßt, so nennt man eine solche Gleichung algebraisch, und derjenige Theil der Arithmetik, welcher sich mit der Lehre der algebraischen Gleichungen beschäftigt, heißt Algebra.

2) Die Mathematiker nennen gewöhnlich die Lehre von den einfachen und quadratischen algebraischen Gleichungen gemeine Algebra, die Lehre von den höhern algebraischen Gleichungen aber die allgemeine Algebra; richtiger aber nennen viele die Lehre von den numerischen Gleichungen die gemeine, und die Lehre von den Literalgleichungen die allgemeine Algebra, welche demnach die erstere mit enthält.

Die Lehre von den einfachen und quadratischen Gleichungen pflegt man auch die niedere oder Elementar-Algebra, und die übrigen Lehren die höhere Algebra zu nennen.

3) Wenn in einem vorgelegten Falle die Werthe mehrerer unbekannten Größen zu bestimmen sind, so müssen sich auch aus den Bedingungen der Aufgabe eben so viele verschiedene, von einander unabhängige oder nicht auseinander folgende Gleichungen (Fundamental-Gleichungen — oder Bedingungsgleichungen) bilden lassen, als unbekannte Größen vorkommen, wenn die Aufgabe eine bestimmte seyn soll. Übrigens gibt es aber Aufgaben, welche mehr unbekannte Größen enthalten, als sich Fundamental-Gleichungen bilden lassen, und man nennt solche Aufgaben unbestimmte oder diophantische, weil sie dann meistens mehr als eine Auflösung, oft unzählig viele, zulassen.

Der Theil der Algebra, welcher sich mit der Auflösung der unbestimmten Probleme beschäftigt, heißt unbestimmte Analytik.

Digitized by Google

Vom Ordnen der Gleichungen.

§. 199.

Eine Gleichung ordnen, heißt sie so darstellen, daß sie folgende Eigenschaften erhalte:

1) Die unbekannte Größe darf in keinem Gliede als Divisor erscheinen. — Eigentlich dürfen in einer geordneten Gleichung gar keine Brüche vorkommen, jedoch ist dieß bey Gleichungen des ersten und zweyten Grades, von welchen wir in diesem Elementarbuche ausschließend handeln, nicht absolut nöthig.
2) Alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, müssen auf einer Seite der Gleichung stehen, und die bekannten Theile sämmtlich auf der andern Seite.
3) Die Glieder, welche dieselbe Potenz der unbekannten Größe enthalten, müssen reducirt werden.
4) Die Unbekannte darf unter keinem Wurzelzeichen vorkommen.
5) Die einzelnen Glieder werden nach den fallenden Potenzen der unbekannten Größe geordnet.
6) Das erste Glied, welches demnach die höchste Potenz der gesuchten Größe enthält, muß positiv seyn, und darf nur die Einheit als Coefficienten haben.
7) Endlich suche man die Gleichung in ihrer einfachsten Gestalt darzustellen, indem man dieselbe durch den größten, allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor dividirt.

Die (§. 196) aufgestellten Grundregeln dienen dazu, einer gegebenen Gleichung die hier aufgezählten Eigenschaften zu verschaffen.

Zur Übung dienen folgende Beyspiele:

I. Man ordne die Gleichung $\frac{x+1}{x-1} - 2x = \frac{3x}{x+1} + 5$.

Zuerst erhält man (nach §. 196. 5.)

$$(x+1)^2 - 2x(x^2-1) = 3x(x-1) + 5(x^2-1),$$

mithin $x^2+2x+1-2x^3+2x = 3x^2-3x+5x^2-5$,

oder $-2x^3 + x^2 + 4x + 1 = 8x^2 - 3x - 5$,

also $-2x^3 + x^2 + 4x - 8x^2 + 3x = -6$,

oder $-2x^3 - 7x^2 + 7x = -6$,

folglich $x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x = 3$, wenn man die vorige Gleichung durch -2 dividirt.

Digitized by Google

II. Man ordne die Gleichung $x - 3\sqrt{x} = 10$.

Zuförderſt erhält man $x - 10 = 3\sqrt{x}$,

alſo iſt auch $(x - 10)^2 = (3\sqrt{x})^2$,

oder $x^2 - 20x + 100 = 9x$,

mithin $x^2 - 29x + 100 = 0$,

oder $x^2 - 29x = -100$.

III. Man ordne die Gleichung $\sqrt{1+x} + 2 = 3\sqrt[4]{1+x}$.

Es folgt ſogleich $[\sqrt{1+x} + 2]^4 = [3\sqrt[4]{1+x}]^4$,

oder, wenn man die angezeigte Potenz wirklich entwickelt und reducirt

$$x^2 + 26x + 41 + 8(5+x)\sqrt{1+x} = 81 + 81x,$$

hieraus folgt $40 + 55x - x^2 = (40 + 8x)\sqrt{1+x}$,

mithin iſt $[-x^2 + 55x + 40]^2 = (40 + 8x)^2 (1+x)$,

oder $x^4 - 110x^3 + 2945x^2 + 4400x + 1600 = 64x^3 + 704x^2 + 2240x + 1600$,

alſo $x^4 - 174x^3 + 2241x^2 + 2160x = 0$,

folglich iſt $x^3 - 174x^2 + 2241x + 2160 = 0$,

oder $x^3 - 174x^2 + 2241x = -2160$

die geordnete Gleichung.

Digitized by Google

Zwölftes Kapitel.

Von der Auflösung der Gleichungen des ersten und zweyten Grades ins Besondere.

A. Von der Auflösung der einfachen Gleichungen.

a. Von der Auflösung bestimmter Probleme mit einer unbekannten Größe.

§. 300.

Eine einfache Gleichung mit einer einzigen Unbekannten ist aufgelöst (§. 195. VI.), sobald man mittelst der (§. 196) aufgestellten Grundregeln der Gleichung alle (§. 199) angegebenen Erfordernisse verschafft hat, wie wir an folgenden Beyspielen sehen werden.

I. Es sey die Gleichung $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}-2=\frac{3x}{2}-31$ aufzulösen.

Man erhält zuerst $10x+6x-60=45x-930$,

dann $930-60=45x-10x-6x$,

oder $870=29x$,

folglich $x=870:29=30$.

II. Man löse die Gleichung $\frac{a(b-x)}{n}=\frac{bx+cd}{m}$ auf.

Es ist vorerst $am(b-x)=bnx+cdn$

oder $abm-amx=bnx+cdn$,

also $abm-cdn=amx+bnx=(am+bn)x$,

mithin $x=\frac{abm-cdn}{am+bn}$.

III. Man suche x aus der Gleichung

$$\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{b\sqrt{x}}{c}=p\sqrt{x}+\frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Man findet erstlich $ac-bx=cpx+c^2$,

ferner $ac-c^2=bx+cpx$,

oder $c(a-c)=(b+cp)x$,

oder $x=\frac{c(a-c)}{b+cp}$.

Digitized by Google

IV. Man bestimme aus der Gleichung

$$3x + \sqrt{4x^2 - 3x - 21} = 5x - 2$$ den Werth von x.

Man erhält $\sqrt{4x^2 - 3x - 21} = 2x - 2$,
also auch $4x^2 - 3x - 21 = (2x-2)^2 = 4x^2 - 8x + 4$,
oder $-3x - 21 = -8x + 4$,
woraus $8x - 3x = 21 + 4$,
oder $5x = 25$,
folglich $x = 5$ gefunden wird.

Um dem Anfänger Gelegenheit zur Formation der Gleichungen zu geben, fügen wir folgende Aufgaben bey.

Aufgabe 1.

Es fragte jemand einen Jüngling, wie viel Bücher er habe; dieser antwortete: Mein Bruder und ich haben 24 Bücher zusammen, und wenn ich die drey Bücher, die mir mein Vater gestern versprochen hat, noch erhalten habe, so werde ich nochmahl so viele Bücher besitzen, als mein Bruder. Wie viel Bücher habe ich also?

Anleitung zur Bildung der Gleichung.

Setzen wir, der Jüngling besitze x Bücher, also sein Bruder $24 - x$; so erhalten wir, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, die Fundamental-Gleichung: $x + 3 = 2(24 - x)$.

Hieraus folgt $x + 3 = 48 - 2x$,
mithin $x + 2x = 48 - 3$,
oder $3x = 45$,
folglich $x = 15$.

Aufgabe 2.

Es soll eine gewisse Summe Geldes unter drey Personen A, B und C so vertheilt werden, daß A um 90 fl. weniger als die Hälfte der ganzen Summe, B um 70 fl. weniger als den dritten Theil der Summe, C aber um 40 fl. mehr als $^3/_8$ des Ganzen erhält; wie groß ist die zu vertheilende Summe, und welches ist der Antheil eines jeden?

Anleitung zur Bildung der Gleichung.

Bezeichnen wir die zu vertheilende Summe mit x, so ist der Antheil des

Digitized by Google

$$A = \frac{x}{2} - 90$$

$$B = \frac{x}{3} - 70$$

$$C = \frac{3x}{8} + 40$$

$$\text{Summe} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{3x}{8} - 120 = x \text{ (Bedingungsgleichung).}$$

$$\text{oder } \frac{29x}{24} - 120 = x.$$

Hieraus folgt $29x - 2880 = 24x$,

woraus $5x = 2880$

oder $x = 576$ gefunden wird;

mithin erhielt A) $\frac{x}{2} - 90 = 288 - 90 = 198$ fl.

» » B) $\frac{x}{3} - 70 = 192 - 70 = 122$ »

» » C) $\frac{3x}{8} + 40 = 216 + 40 = 256$ »

Aufgabe 3.

Ein reicher Mann gab auf die Frage, wie hoch sich seine Capitalien beliefen, zur Antwort: Wenn ich mein Geld zu 4 p°/₀ ausstehen hätte, so würden mir jährlich zur Bestreitung meiner Haushaltung 484 Thaler fehlen; weil aber mein Vermögen zu 5 p°/₀ anliegt, so bleiben mir jahrlich 395 Thaler von den Interessen übrig. Wie groß war also das ausgeliehene Capital, und wie hoch beliefen sich die jährlichen Ausgaben dieses Mannes?

Auflösung.

Wenn das Capital mit x bezeichnet wird, so betragen die Interessen zu 4 p°/₀ jährlich $\frac{4x}{100}$ Thlr., zu 5 p°/₀ aber $\frac{5x}{100}$ Thlr., und wir erhalten für seine jährlichen Ausgaben den doppelten Ausdruck:

$$\frac{4x}{100} + 484 = \frac{5x}{100} - 395.$$

Hieraus folgt $4x + 48400 = 5x - 39500$

und $x = 48400 + 39500 = 87900$ Thaler;

also 4.879 + 484 = 4000 Thaler = seinen jährlichen Auslagen.

Digitized by Google

Aufgabe 4.

Wie viel ist ein nach n Jahren zahlbares Capital k gegenwärtig werth, wenn p Procent gerechnet werden?

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß der gegenwärtige Werth des Capitals k, welchen wir mit G bezeichnen wollen, nur eine Summe betragen könne, welche so groß ist, daß sie, zu p Procent angelegt, sammt Zinsen nach n Jahren = k wird. Weil nun aus 100 fl. Capital, in einem Jahre (100 + p) fl., also in n Jahren (100 + np) fl., aus G fl. Capital aber k fl. werden sollen, so erhalten wir die Proportion:

$$100 : G = 100 + np : k,$$

woraus $G = \frac{100 . k}{100 + np}$ gefunden wird.

Beyspiel 1. Es sey k = 4800, p = 5, und n = 10: so wird

$$G = \frac{100 . 4800}{100 + 50} = \frac{100 . 480}{15} = 3200 \text{ fl.},$$

d. h. die Summe von 4800 fl., welche erst nach 10 Jahren ohne Interessen zahlbar ist, ist gegenwärtig nur 3200 fl. werth.

Zusatz.

Aus der Gleichung $G = \frac{100 . k}{100 + np}$ folgt

$$k = \frac{(100 + np) G}{100}, \quad p = \frac{100 (k - G)}{n . G} \text{ und } n = \frac{100 (k - G)}{p . G}.$$

Sind demnach von den vier Größen k, G, p und n drey gegeben, so kann die vierte jedes Mahl bestimmt werden.

Aufgabe 5.

Ein Capital a liegt zu c Procent an, und die jährlichen Interessen werden jedes Mahl zum Capitale geschlagen. Wie groß wird auf diese Art jenes Capital nach n Jahren werden?

Auflösung.

Man kann hier, um gleich das Capital sammt Interessen zu finden, also schließen: Aus 100 fl. Cap. werden in 1 Jahre (100 + c) fl., was wird aus a fl. Cap.? d. i. wir erhalten die Proportion:

Digitized by Google

$$100 : a = 100 + c : x', \text{ oder}$$

$$1 : a = 1 + \frac{c}{100} : x',$$

und hieraus folgt $x' = a\left(1 + \frac{c}{100}\right) = a\,(1+p)$, wenn man der Kürze wegen $\frac{c}{100} = p$ setzt. Diese Größe (x') ist nun das Capital für das zweyte Jahr, und man schließt nun wieder, wie vorhin:

$$1 : a\,(1+p) = (1+p) : x'', \text{ mithin}$$

$x'' = a\,(1+p)^2$, welcher Ausdruck die Größe des Capitals sammt Zinsen am Ende des zweyten Jahres bezeichnet.

Durch Wiederhohlung dieses Schlusses findet man, daß das Capital sammt Zinsen am Ende

des dritten Jahres $= a\,(1+p)^3$
» vierten » $= a\,(1+p)^4$
» fünften » $= a\,(1+p)^5$
. . . . . und allgemein
» n^{ten} » $= a\,(1+p)^n$ sey.

Bezeichnen wir nun den Werth, zu welchem das Capital a in n Jahren angewachsen ist, durch s; so erhalten wir

$$s = a\,(1+p)^n = a\left(1 + \frac{c}{100}\right)^n.$$

Ist nun n eine große Zahl, so bedient man sich der Logarithmen, oder man gebraucht dann die Formel:

$$\log.s = \log.a + n\log.(1+p)$$
$$= \log.a + n\log.(100+c) - n\log.100$$
$$= \log.a + n\log.(100+c) - 2n.$$

Sind nun von den Größen s, a, p (oder c) und n drey gegeben, so kann die vierte unbekannte mit Hülfe dieser Formel gefunden werden. Wir haben nähmlich vier Gleichungen, mittelst welchen alle hieher gehörigen Aufgaben gelöst werden:

I. $\log.s = \log.a + n\log.(100+c) - 2n,$

II. $\log.a = \log.s - n\log.(100+c) + 2n, = \log.s - n\log.(1+p),$

III. $n = \frac{\log.s - \log.a}{\log.(100+c) - 2} = \frac{\log.s - \log.a}{\log.(1+p)},$

IV. $\log.(100+c) = \frac{\log.s - \log.a + 2n}{n} = \frac{\log.s - \log.a}{n} + 2.$

Aus $\log.(100+c)$ wird die entsprechende Zahl $100+c$, und mithin auch c gefunden.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Wäre n eine gemischte Zahl, z. B. $n = m + \frac{1}{w}$, so ist es unrichtig, wenn man $s = a(1+p)^n = a(1+p)^{m+\frac{1}{w}} = a(1+p)^m \cdot \sqrt[w]{1+p}$ setzt, denn in diesem Falle erhält man die Gleichung:

$$s = a(1+p)^m\left(1+\frac{p}{w}\right) = a\left(1+\frac{c}{100}\right)^m\left(1+\frac{c}{100.w}\right),$$

wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann:

Nach m Jahren ist das Capital sammt Zins vom Zinse $= a(1+p)^m$, und diese Summe liegt nur durch $\frac{1}{w}$ Jahr an, demnach ist, weil 100 fl. Cap. in $\frac{1}{w}$ Jahr nur $\frac{c}{w}$ fl. Zins bringen,

$$100 : a(1+p)^m = 100 + \frac{c}{w} : s,$$

oder $$1 : a(1+p)^m = 1 + \frac{c}{100.w} : s,$$

folglich $$s = a(1+p)^m\left(1+\frac{c}{100.w}\right) = a\left(1+\frac{c}{100}\right)^m\left(1+\frac{c}{100.w}\right).$$

Zusatz 2.

Es ist öfters der Fall, daß die Zinsen halbjährig, vierteljährig, oder wohl gar monathlich entrichtet werden, für welchen Fall wir unsere Formel auf folgende Art modificiren müssen:

Man nehme an, daß die Interessen in kleinern Zeiträumen $= \frac{1}{v}$ entrichtet werden müssen, so erhält man, wenn jährlich c Procent festgesetzt wurden, für einen solchen Zeitraum nur $\frac{c}{v}$ %, und es wird dann nach Verlauf des ersten Termines Capital sammt Zinsen $= a\left(1+\frac{c}{100.v}\right)$, am Ende des zweyten Termines $= a\left(1+\frac{c}{100.v}\right)^2$, u. s. w., allgemein am Ende des r^{ten} Termines

$$s = a\left(1+\frac{c}{100\,v}\right)^r = a\left(1+\frac{p}{v}\right)^r.$$

Wir wollen nun die bisher entwickelten Formeln auf einige Beyspiele anwenden.

Digitized by Google

Beyspiel 1. Ein Vater legt für seinen Sohn ein Capital von 15800 Thaler zu 5 % auf Zins vom Zinse, d. i. so an, daß die jährlich zu entrichtenden Zinsen wieder zum Capitale geschlagen werden. Wie viel wird nun der Sohn nach 20 Jahren zu fordern haben?

Hier ist $a = 15800$, $n = 20$, $c = 5$, oder $p = \frac{c}{100} = 0{\cdot}05$ und daher durch Substitution in der Formel I.

$$\log s = \log. a + n \log.(1+p) = \log. 15800 + 20 \log. 1{\cdot}05$$

und weil $\log. 15800 = 4{\cdot}1986571$

$20 \log. 1{\cdot}05 = 20 \times 0{\cdot}0211893 = 0{\cdot}4237860$

so ist $\log. s = 4{\cdot}6224431 = \log. 41922{\cdot}1$,

folglich $s = 41922{\cdot}1$ Thaler beynahe.

Beyspiel 2. Wie groß muß das Capital seyn, welches zu $4^1/_2$ p % auf Zins vom Zins angelegt, in 10 Jahren zu 34890 fl. anwächst?

Hier ist also a unbekannt, $s = 34890$ fl., $c = 4{\cdot}5$ oder $p = 0{\cdot}045$, und $n = 10$; mithin ist die Rechnung zu führen nach Form. II., oder

$$\log. a = \log. s - n \log.(1+p)$$
$$= \log. 34890 - 10 \log. 1{\cdot}045,$$

und da $\log. 34890 = 4{\cdot}5427010$

$-10 \log.. 1{\cdot}045 = -0{\cdot}1911630$

so ist $\log. a = 4{\cdot}3515380 = \log. 22466\,63$,

mithin $a = 22466{\cdot}63$ fl. sehr nahe.

Beyspiel 3. In wie viel Jahren wächst ein Capital von 7800 Gulden zu einer Summe von 30000 fl. an, wenn 6 p % und Zins vom Zins gerechnet werden?

Diese Aufgabe wird durch die Formel III. gelöst. Es ist nähmlich

$$n = \frac{\log. s - \log. a}{\log.(1+p)} = \frac{\log. 30000 - \log. 7800}{\log. 1{\cdot}06}$$

$\log. 30000 = 4{\cdot}4771213$

$-\log. 7800 = -3{\cdot}8920946$

$\log. s - \log. a = 0{\cdot}5850267$

$\log. 1{\cdot}06 = 0{\cdot}0253059$,

mithin $n = 0{\cdot}5850{,}267 : 0{\cdot}02{,}5{,}3{,}0{,}59 = 23{\cdot}12$

789

·30

5

nähmlich $n = 23{\cdot}12$ Jahren $=$ 23 Jahr, 1 Monath, 13 Tagen sehr nahe.

Beyspiel 4. Zu wie viel Procenten muß ein Capital von 8970 fl. angelegt werden, damit es in 12 Jahren zu einer Summe von 20000 fl. anwächst?

Wir finden zuerst nach Formel IV.

$$\log.(100+c) = \frac{\log. 20000 - \log. 8970}{12} + 2,$$

und weil $\log. 20000 = 4{\cdot}3010300$

$$-\log. 8970 = -3{\cdot}9527924$$

$$\text{so ist } \log.(100+c) = 2 + \frac{0{\cdot}3482376}{12}$$

$$= 2{\cdot}0290198 = \log. 106{\cdot}91,$$

mithin ist $100+c = 106{\cdot}91$,

und $c = 6{\cdot}91$ sehr nahe.

Beyspiel 5. Es hat jemand 380 fl. bey einer Sparcasse angelegt, und die Zinsen immer zum Capitale schreiben lassen. Wie viel hat nun dieser Gläubiger nach 20 Jahren zu fordern, wenn die Sparcasse 4 p% zahlt, die Interessen aber vierteljährig gerechnet werden?

Hier müssen wir nach der Formel $s = a\left(1+\frac{c}{100\,v}\right)^r$ des Zus. 2. rechnen.

Es ist $a = 380$ fl., $c = 4$, $v = 4$, und $r = 4 \cdot 20 = 80$;

$$\text{mithin } s = 380\left(1+\frac{4}{4\cdot 100}\right)^{80} = 380(1{\cdot}01)^{80}, \text{ und}$$

$$\log. s = \log. 380 + 80 \log. 1{\cdot}01$$

$$= \begin{cases} \log. 380 = 2{\cdot}5797836 \\ 80 \log. 1{\cdot}01 = 0{\cdot}3457120 \end{cases}$$

$$\log. s = 2{\cdot}9254956 = \log. 842{\cdot}356$$

folglich $s = 842{\cdot}356$ fl.

Würden wir hier nach der Formel $s = a\left(1+\frac{c}{100}\right)^n$ rechnen, so finden wir $s = 832{\cdot}625$ fl., also um 9·73 fl. weniger als vorhin.

Beyspiel 6. A übernahm von B eine Fabrik um 69700 fl., unter der Bedingung, diese Summe erst nach Verlauf von 6 Jahren ohne Interessen zahlen zu dürfen. Ein Jahr darauf wollte B auswandern, und machte dem A den Vorschlag, jene Summe gegen 6 p% Abzug sogleich zu zahlen. Wenn nun A diesen Vorschlag annahm, wie viel hatte er zu zahlen?

Digitized by Google

Diese Frage ist einerley mit folgender: Wie groß muß ein Capital seyn, welches in 5 Jahren zu 6 p % und Zins vom Zins gerechnet, die Größe von 69700 fl. erreichen soll?

Wir haben hier $\log. a = \log. s - n \log. (1+p)$

$= \log. 69700 - 5 \log. (1{\cdot}06)$

$= \left\{ \begin{array}{r} 4{\cdot}8432328 \\ -0{\cdot}1265295 \end{array} \right\}$

$\log. a = 4{\cdot}7167033 = \log. 52083{\cdot}67,$

folglich $a = 52083{\cdot}67$ fl. sehr nahe,

und der Abzug $s - a = 17616{\cdot}33$ beynahe.

* Von A, dem Schuldner des B, sagt man, er discontirt das Capital a, und der Abzug (von 17616·33 fl. in unserem Beyspiele) heißt der Rabatt, oder das zusammengesetzte, auch Leibnitzische, Interusurium. Es ist nähmlich

$$R = s - a = s - \frac{s}{(1+p)^n} = \left(1 - \frac{1}{(1+p)^n}\right) s = \left[1 - \frac{100^n}{(100+c)^n}\right] s.$$

die Leibnitz'sche Rabattformel, nach welcher an verschiedenen Orten, z. B. im Königreiche Sachsen noch gesetzlich gerechnet wird. An vielen Orten aber rechnet man nach der einfachen Rabattformel

$$R = s - a = s - \frac{100.s}{100+cn} = s\left(\frac{cn}{100+cn}\right),$$

welche auch die Hofmannische Rabattformel genannt wird. Es wird nähmlich bey dieser Formel nicht Zins vom Zins gerechnet, sondern es kommen nur die einfachen Interessen in Anschlag, wie in der obigen vierten Aufgabe (Seite 389). Es hat nähmlich ein nach n Jahren ohne Interessen zahlbares Capital s gegenwärtig nur den Werth $a = \frac{100.s}{100+cn}$,

und mithin ist der Rabatt

$$R = s - \frac{100\,s}{100+cn} = s\left(\frac{cn}{100+cn}\right).$$

Nach welcher Formel sollte man eigentlich, die Billigkeit und Gerechtigkeit im Auge behaltend, den Rabatt berechnen?

Das Berechnen des Zinses vom Zinse, welches gewöhnlich im positiven Rechte verboten ist, heißt Anatocismus.

Aufgabe 6.

Aus zwey Röhren A und B strömt mit immer gleichförmiger Geschwindigkeit irgend eine Flüssigkeit aus; die Röhren aber haben verschiedene Durchmesser, denn A füllt in a Stunden ein Gefäß, dessen Capacität = M, aus B aber fließt dieselbe Quantität M in b Stun-

Digitized by Google

den ab. Wenn nun beyde Röhren zugleich geöffnet werden, so fragt es sich, in wie viel Zeit werden beyde zugleich jenes Gefäß anfüllen?

Auflösung.

Man nehme an, das Gefäß würde in x Stunden angefüllt, wenn das Flüssige aus beyden Röhren zugleich ausströmt. Weil nun aus A) M Einheiten in a Stunden ausfließen, so fließen in einer Stunde offenbar $\frac{M}{a}$ Einheiten (z. B. Maße, oder Kubikzolle, u. s. w.) ab, mithin in x Stunden $\frac{Mx}{a}$. Eben so strömten aus B) in 1 Stunde $\frac{M}{b}$ Einheiten aus, also in x Stunden $\frac{Mx}{a}$; und demnach bezeichnet der Ausdruck $\frac{Mx}{a} + \frac{Mx}{b}$ die Menge der Flüssigkeit, welche aus beyden Röhren zugleich in x Stunden abfließt; diese Menge aber soll $= M$ seyn, folglich erhalten wir die Gleichung

$$\frac{Mx}{a} + \frac{Mx}{b} = M, \text{ oder } \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1,$$

und hieraus folgt

$$(a + b)\,x = ab, \text{ also } x = \frac{ab}{a+b}.$$

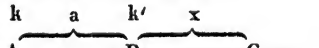
Aufgabe 7.

Es bewegen sich zwey Körper k und k′ in der Richtung einer und derselben Linie; k durchlauft den Raum R in der Zeit T, k′ aber den Raum R′ in der Zeit T′. Die Entfernung der Orte, von welchen aus sie sich zu bewegen anfangen, sey $= a$, und der Unterschied der Zeiten Z und Z′, während welchen beyde Körper sich bewegen, oder in welchen sie ihre Bewegung beginnen, sey $= d$. Man soll nun den Weg, oder auch die Zeit, welche sie zur Zurücklegung desselben nöthig haben, bis zu dem Puncte des Zusammentreffens bestimmen.

Auflösung.

Es können hier zwey Hauptfälle Statt finden, denn entweder bewegen sich k und k′ nach derselben Richtung, oder nach entgegengesetzten Richtungen.

I. Beyde Körper sollen sich nach derselben Richtung bewegen. Zur leichteren Übersicht diene die folgende Figur:



Digitized by Google

Wir nehmen nähmlich an, es befinde sich k im Puncte A, k′ im Puncte B, und k soll den k′ im Puncte C erreichen. Es sey ferner die Entfernung AB = a, und der Weg, welchen k′ zurücklegen muß, nähmlich BC = x, mithin ist AC = AB + BC = a + x der Weg für k. — Da wir nun Gleichförmigkeit der Bewegung voraussetzen, so erhellt (§. 175) von selbst, daß, wenn wir unterdessen x als bekannt annehmen, die Zeiten Z und Z′, in welchen k und k′ die respectiven Räume durchlaufen, durch folgende Proportionen bestimmt werden:

$$R : a+x = T : Z, \text{ also } Z = \frac{(a+x)\,T}{R},$$

$$\text{und } R' : x = T' : Z' \text{ » } Z' = \frac{x\,T'}{R'}.$$

Hier sind nun im Allgemeinen wieder zwey Fälle zu unterscheiden, denn entweder ist $Z \gtrless Z'$, d. i. es kann k oder k′ sich früher zu bewegen anfangen. Nehmen wir also an, es sey

1) $Z > Z'$, nähmlich $Z - Z' = d$ den Bedingungen der Aufgabe gemäß, so erhalten wir durch Substitution der für Z und Z′ gefundenen Werthe die Gleichung:

$$\frac{(a+x)\,T}{R} - \frac{T'x}{R'} = d.$$

Hieraus folgt $aR'T + R'Tx - RT'x = dRR'$,

oder $(R'T - RT')x = R'(dR - aT)$,

$$\text{mithin } x = \frac{R'(dR - aT)}{R'T - RT'} = \frac{R'(aT - dR)}{RT' - R'T}.$$

2) Ist aber $Z' > Z$, d. i. bewegt sich k′ früher als k, ist also $Z' - Z = d$, oder $Z - Z' = -d$; so dürfen wir in der letzten Gleichung nur d negativ setzen, und wir erhalten dann

$$x = \frac{R'(aT + dR)}{RT' - R'T}.$$

Anmerk. a) Modificiren wir die Bedingungen der Aufgabe dahin, daß beyde Körper unter denselben Bedingungen, wie vorhin, sich zu gleicher Zeit zu bewegen beginnen, so dürfen wir nur d = o setzen, und die beyden vorigen Gleichungen gehen über in

$$x = \frac{aTR'}{RT' - R'T}.$$

b) Gehen k und k′ von demselben Puncte B aus, so wird a = o, demnach

$$x = \frac{\mp dRR'}{RT' - R'T};$$

Digitized by Google

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem k oder k' sich früher zu bewegen beginnt.

c) Würden beyde Körper k und k' von demselben Puncte B aus zu gleicher Zeit sich bewegen, so wäre $a = o$ und $d = o$, mithin

$$x = \frac{o}{R T' - R' T} = o;$$

d. i. sie werden sich dann nie einhohlen, sondern, wenn sie verschiedene Geschwindigkeiten haben, sich immer mehr von einander entfernen, oder immer beysammen bleiben, wenn sie sich mit einerley Geschwindigkeit bewegen, wie aus der Natur der Sache von selbst folgt.

d) Setzen wir $T = T' = 1$, so wird

$$x = \frac{R' (a \mp d R)}{R - R'},$$

wo wieder das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem k oder k' früher abging.

e) Setzen wir wieder $T = T'$ und $R = R'$, d. h. nehmen wir an, daß beyde Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, weil sie in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufen, so finden wir

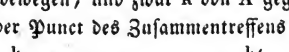
$$x = \frac{R (a \mp d R)}{o} = \infty;$$

d. h. sie hohlen sich erst in einer unendlichen Entfernung, also nie, ein.

f) Wenn beyde Körper von demselben Puncte B aus sich mit einerley Geschwindigkeit gleichzeitig zu bewegen anfangen, d. h. setzen wir $T = T'$, $R = R'$, und $a = d = o$, so gibt es die Natur der Sache, daß beyde Körper beysammen bleiben, und sich also weder von einander entfernen, noch einander einhohlen können; die Formel aber gibt den Ausdruck $x = \frac{o}{o}$, welches im Allgemeinen das Symbol der Unbestimmtheit ist.

g) Wenn x negativ gefunden wird, so heißt das nichts anders, als k' muß sich in einer Richtung bewegen, welche der in der Aufgabe angenommenen gerade entgegengesetzt ist, also von B gegen A und nicht gegen C.

II. Die beyden Körper sollen sich nun in entgegengesetzten Richtungen gegen einander bewegen, und zwar k von A gegen B, und k' von B gegen A; C sey der Punct des Zusammentreffens,



Der Weg von B bis C sey $= x$, und $AC = a - x$, wenn wieder $AB = a$ gesetzt wird; und wir finden eben so wie im ersten Falle, die Zeit $Z = \frac{(a - x) T}{R}$, und $Z' = \frac{x . T'}{R'}$, folglich

$$\frac{(a - x) T}{R} - \frac{T' x}{R'} = \mp d,$$

Digitized by Google

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, je nachdem k früher oder später ausging als k′.

Aus dieser Gleichung folgt nun

$$aR'T - R'Tx - RT'x = \mp dRR',$$
$$(R'T + RT')x = (aT \mp dR)R',$$
$$x = \frac{R'(aT \mp dR)}{R'T + RT'}.$$

* Der Anfänger wird gut thun, wenn er auch hier, wie oben, diese Formel für verschiedene Voraussetzungen modificirt, und sich den Sinn der gefundenen Resultate auf ähnliche Art zu erklären sucht.

Den Gebrauch dieser Formel wollen wir nun durch einige Beyspiele erläutern.

Beyspiel 1. Es reist k von Wien über Prag nach Petersburg, und macht 5 Meilen in 3 Stunden; 12 Stunden später reiste k′ von Prag ebenfalls nach Petersburg, und zwar auf demselben Wege, macht aber nur 7 Meilen in 5 Stunden. Wann wird nun k′ vom k eingeholt werden, wenn die Entfernung zwischen Wien und Prag 40 Meilen beträgt?

Die auflösende Formel ist hier $x = \frac{R'(aT - dR)}{RT' - R'T}$, und weil hier

$$R = 5, \quad R' = 7, \quad a = 40$$
$$T = 3, \quad T' = 5, \text{ und } d = 12,$$

so finden wir $x = \frac{7(40.3 - 12.5)}{5.5 - 7.3} = \frac{7.60}{4} = 105$ Meilen,

d. i. k′ hat 105 Meilen, also k 105 + 40 = 145 Meilen zu machen, bis sie sich begegnen. Weil aber nach der Zeit des Begegnens gefragt wurde, so setze man:

7 Meil. : 105 Meil. = 5 St. : 1 St.

woraus Z′ = 75 Stunden folgt. So viel Zeit braucht nähmlich k′ zur Zurücklegung von 105 Meilen.

Um die Zeit für k zu finden, setze man:

5 Meil. : 145 Meil. = 3 St. : Z St.,

woraus Z = 87 Stunden gefunden wird. Es ist auch wirklich der Unterschied der Zeiten Z − Z′ = (87 − 75) St. = 12 Stunden, wie es die Aufgabe verlangt.

Beyspiel 2. Ein Student k in Wien schrieb seinem Freunde k′ in Linz, er würde am 29. August, Morgens 5 Uhr, von Wien nach Linz abreisen, und es würde ihn freuen, wenn ihm k′ eine Strecke Wegs entgegen reisen würde. k′ wollte seinen Freund überraschen,

Digitized by Google

und reiste an demselben Tage und zu derselben Stunde von Linz nach Wien ab. Wann werden sich nun beyde Freunde begegnet haben, wenn k in 3 Stunden 2 Meilen, k' aber in 7 Stunden 8 Meilen machte, wenn ferner beyde zufälliger Weise 8 Stunden lang marschirten, und Wien von Linz um 26 Meilen entfernt ist?

Diese Frage gehört zum zweyten Falle unserer allgemeinen Aufgabe, wir müssen demnach nach der Formel $x = \frac{R'(aT \mp dR)}{R'T + RT'}$ rechnen, welche, weil hier $d = o$, übergeht in $x = \frac{aR'T}{R'T + RT'}$. Da nun $a = 26$, $R = 2$, $T = 3$, $R' = 8$ und $T' = 7$ ist, so finden wir $x = \frac{26.8.3}{8.3 + 2.7} = \frac{312}{19} = 16\frac{8}{19}$, nähmlich k' hat $16\frac{8}{19}$ Meilen, mithin k $26 - 16\frac{8}{19} = \frac{182}{19} = 9\frac{11}{19}$ Meilen zu machen, bis sie sich begegnen. Um nun die Zeiten zu finden, setze man:

$$2 \text{ M.} : \frac{182}{19} \text{ M.} = 3 \text{ St.} : Z \text{ St.},$$

$$\text{und } 8 \text{ M.} : \frac{312}{19} \text{ M.} = 7 \text{ St.} : Z' \text{ St.}$$

$$\text{woraus } Z = \frac{273}{19} = 14\frac{7}{19} \text{ Stunden,}$$

$$\text{und } Z' = \frac{273}{19} = 14\frac{7}{19} \text{ Stunden gefunden wird, wie}$$

es seyn muß, weil beyde zu gleicher Zeit abreisten. Sie begegneten sich also am 30. August.

Beyspiel 3. Wie viel Uhr ist es, wenn beyde Zeiger der Uhr genau über einander liegen, und der Stundenzeiger zwischen 3 und 4 steht?

Wir denken uns, daß der Stundenzeiger gerade auf 3 stehe, so muß der Minutenzeiger genau auf 12 stehen, und nun fragen wir, wann wird der große Zeiger den kleinen einholen? Da nun der große Zeiger das ganze Zifferblatt durchlauft, bis der kleine Zeiger von 3 bis 4 vorrückt, so ist hier $T = T' = 1$, $d = o$, $a = 15$ (denn von 12 bis 3 sind 15 Raumminuten) $R = 60$ (weil der Umkreis des Zifferblattes in 60 gleiche Theile oder Minuten getheilt ist) und $R' = 5$; folglich

$$x = \frac{aR'}{R - R'} = \frac{15.5}{60 - 5} = \frac{15}{11} = \left(1\frac{4}{11}\right) \text{ Minuten,}$$

Digitized by Google

d. h. der kleine Zeiger muß $1\frac{4}{11}$ Raumminuten durchlaufen, mithin der große Zeiger $15 + 1\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$ Raumminuten, und weil der große Zeiger jede Raumminute in einer Zeitminute durchlauft, so haben beyde Zeiger auch $16\frac{4}{11}$ Minuten Zeit zur Zurücklegung ihrer respectiven Räume bis zu ihrem Zusammentreffen nöthig, folglich ist es in diesem Augenblicke $3^h \left(16\frac{4}{11}\right)' = 3^h\, 16'\, 21''.82$ sehr nahe.

Wäre aber die Frage so gestellt worden: »wie viel Uhr ist es, wenn beyde Zeiger in einer geraden Linie liegen, und der kleine Zeiger zwischen 3 und 4 steht?« so ist zuerst klar, daß der Minutenzeiger zwischen 9 und 10 stehen müsse. Um nun diese Frage durch unsere allgemeine Formel zu beantworten, können wir uns vorstellen, daß wenn der große Zeiger auf 12 steht, mithin der kleine auf 3, in demselben Augenblicke ein dritter Zeiger Z auf 9 stehe, und sich mit derselben Geschwindigkeit, wie der kleine Zeiger, gegen 10 hin sich bewege; und wir können dann die Frage so stellen: Wann wird der große Zeiger den Zeiger Z einholen? Es bleibt demnach alles wie im obigen Beyspiele, nur daß jetzt $a = 45$ wird (nähmlich die Entfernung von 12 gegen die Rechte bis 9). Es ist daher

$$x = \frac{45 \cdot 5}{60 - 5} = \frac{45'}{11} = \left(4\tfrac{1}{11}\right)',$$

wodurch die Größe des Weges für Z, mithin auch für den kleinen Zeiger bezeichnet wird, und der große Zeiger muß $45 + 4\frac{1}{11} = 49\frac{1}{11}$ Raumminuten durchlaufen, wozu er eben so viel Zeit braucht, folglich ist es in diesem Falle $3^h \left(49\frac{1}{11}\right)' = 3^h\, 49'\, 5''.455$ sehr nahe.

Wir hätten auch kurz so schließen können: Da die Geschwindigkeiten beyder Zeiger sich wie 60 : 5 oder wie 12 : 1 verhalten, und der große Zeiger $45 + x$ Raumtheile durchlaufen muß, bis der kleine x solche Theile durchlauft, um mit diesem in gerade Linie zu kommen, die Geschwindigkeiten sich aber in diesem Falle verhalten, wie die durchlaufenen Räume; so erhalten wir die Proportion:

$12 : 1 = 45 + x : x$, oder $12 - 1 : 1 = 45 : x$, folglich $x = \frac{45'}{11}$ wie vorhin.

Digitized by Google

Aufgabe 8.

Man hat zweyerley Materien, A und B; von A sey der Werth der Einheit $= a$, von B aber sey der Werth der Einheit $= b$. Wenn man nun aus beyden eine Mischung M von n Einheiten machen will, und der Werth einer jeden solchen Einheit $= c$ seyn soll; wie viel Einheiten muß man von jeder Materie zur verlangten Mischung nehmen?

Auflösung.

Setzen wir die Menge der Einheiten, welche von A genommen werden müssen, $= x$, so müssen $n - x$ Einheiten von der Materie B genommen werden, weil die ganze Mischung $= n$ seyn soll. Der Werth der x Einheiten von A ist der Aufgabe gemäß $= ax$, der Werth der $n - x$ Einheiten von B aber ist $= (n - x)b$; also der Werth der ganzen Mischung $= ax + (n - x)b$; dieser soll aber auch $= cn$ seyn, wie die Aufgabe verlangt; folglich erhalten wir die Gleichung

$$ax + (n - x)b = cn$$

oder $$(a - b)x = cn - bn$$

und $$x = \frac{(c - b)n}{a - b}$$

also $$n - x = n - \left(\frac{c - b}{a - b}\right)n$$

$$= n\left(\frac{a - b - c + b}{a - b}\right) = n\left(\frac{a - c}{a - b}\right).$$

Zusatz.

Aus den Gleichungen $x = \left(\frac{c - b}{a - b}\right)n$ und $n - x = n\left(\frac{a - c}{a - b}\right)$ folgt:

1) $a - b : c - b = n : x$

und 2) $a - b : a - c = n : n - x$

also ist auch $c - b : a - c = x : n - x$ (§. 174. 2.),

und $(a - c) + (c - b) : c - b = n : x$

endlich $(a - c) + (c - b) : a - c = n : n - x$ } (§. 168. 3),

Hieraus fließt die Regel für die Alligations-Rechnung, welche sich von der Vermischungsrechnung dadurch unterscheidet, daß in ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß.

Digitized by Google

Die obigen Proportionen geben uns folgende praktische Regel zur Berechnung der hieher gehörigen Beyspiele: »Man schreibe den höhern und geringern Werth unter einander, und links zwischen beyde den mittlern Werth. Rechts setze man zum größern Werthe die Differenz zwischen dem mittlern und dem geringern Werthe, zu dem letztern aber den Unterschied zwischen dem höhern und mittlern Werthe; so bilden diese Unterschiede die Verhältnißzahlen, nach welchen die gegebenen Materien zur verlangten Mischung genommen werden müssen.«

Zur Erläuterung folgende Beyspiele:

Beyspiel 1. Es hat jemand nur zweyerley Sorten Wein, A und B. Von A kostet die Maß 1 fl., von B aber 3 fl. Nun verlangt jemand 3 Eimer Wein, die Maß zu einem Thaler; wie viel Maß muß man demnach von A und B nehmen, um die Mischung M zu erhalten?

Man setze:

1 fl. 30 kr. = 90 kr. = c | 3 fl. = 180 kr. = a | 30 = c — b
1 fl. = 60 kr. = b | 90 = a — c

180 60 = 120 = a—b;

d. i. die Mischung muß in dem Verhältnisse 30:90 oder 1:3 gemacht, oder es müssen 30 Theile von der bessern Gattung, und 90 Theile von der geringern Gattung genommen werden. — Daß hier 30+90=120 genau die Menge der gesuchten Mischung bezeichnet, ist blos zufällig.

Beyspiel 2. Ein Silberarbeiter soll mehrere Gefäße, deren Gewicht zusammen 25 Mark beträgt, aus 13löthigem Silber verfertigen. Da nun der Silberarbeiter nur zweyerley Silbergattungen A und B hat, von welchen A 15löthig und B 10löthig ist, so fragt es sich, in welchem Verhältnisse muß er jene beyden Silbergattungen zusammen schmelzen, um die verlangte Mischung zu erhalten, oder wie viel Mark muß er von A und wie viel von B nehmen, um 13löthiges Silber zu erhalten?

Man setze:

13 = c | 15 = a | 3 = c — b
10 = b | 2 = a — c

Er muß also 3 Theile von A und 2 Theile von B nehmen, oder das Mischungsverhältniß ist 3:2. Man setze demnach:

5 Mk. : 25 Mk. = 3 : x, also x = 15 Mk. von A,
und 5 Mk. : 25 Mk. = 2 : 25—x, » 25—x= 10 Mk. » B.

Digitized by Google

Beyspiel 3. Ein Goldarbeiter hat 20 Mark 18karatiges Gold. Wie viel 13karatiges Gold muß er zusetzen, damit die Mischung 15 Karat fein werde?

$$15 \left| \begin{array}{l|l} 18 & 15 - 13 = 2 \\ 13 & 18 - 15 = 3 \end{array} \right. \quad 3 + 2 = 5;$$

d. h. er muß $\frac{2}{5}$ vom 18karatigen und $\frac{3}{5}$ der ganzen Mischung vom 13karatigen Golde nehmen, mithin $\frac{2}{5}$. 20 Mark = 8 Mark von ersterem und $\frac{3}{5}$. 20 Mark = 12 Mark von letzterem.

Aufgabe 9.

Als A gefragt wurde, wie alt er sey, gab er folgende Antwort: Mein Sohn ist um 2 Jahre älter als mein Neffe, und ich bin fünf Mahl so alt als mein Neffe; meine Tochter aber ist nur $^1/_6$ Mahl so alt, als ich vor 2 Jahren war. Wenn Sie nun mein Alter durch das Alter meiner beyden Kinder dividiren, so finden Sie 2 zum Quotienten und den fünften Theil meines Alters zum Reste. Wie alt bin ich also, und wie alt sind meine Kinder?

Auflösung.

Bezeichnen wir das gegenwärtige Alter des Vaters durch x, so bezeichnet $\frac{x}{5}$ das Alter des Neffen, und $\frac{x}{5} + 2$ das Alter des Sohnes; ferner war der Vater vor 2 Jahren $x - 2$, mithin ist die Tochter jetzt $\frac{x-2}{6}$ Jahre alt, folglich haben beyde Kinder zusammen $\left(\frac{x}{5} + 2 + \frac{x-2}{6}\right)$ Jahre $= \frac{11x-50}{30}$ Jahre, und wir erhalten der Aufgabe gemäß folgende Bedingungsgleichung:

$$x : \frac{11x+50}{30} = 2 + \left(\frac{x}{5} : \frac{11x+50}{30}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{30x}{11x+50} = 2 + \frac{6x}{11x+50}, \text{ oder } \frac{30x}{11x+50} - \frac{6x}{11x+50} = 2, \text{ d. i.}$$

$$\frac{24x}{11x+50} = 2, \text{ mithin } 24x = 22x + 100, \text{ oder}$$

$$2x = 100, \text{ also } x = 50.$$

Digitized by Google

Da also der Vater 50 Jahre alt ist, so hat der Sohn $\frac{x}{5}+2=12$ Jahre, und die Tochter $\frac{x-2}{2}=8$ Jahren.

Aufgabe 10.

Carl fragte seinen Vater, wie viel baares Geld er habe, und erhielt folgende Antwort: Ich habe mehrere Ducaten, noch ein Mahl so viel Thaler, und so viele Zwanziger, als das Product aus der Anzahl meiner Ducaten in die Anzahl meiner Thaler beträgt, endlich einen Groschen mehr als die halbe Anzahl meiner Zwanziger anzeigt. Wenn sich nun die Anzahl der Groschen zur Anzahl der Thaler verhält wie 113 : 15; so kannst du leicht berechnen, wie viel Stücke ich von jeder Geldsorte habe.

Auflösung.

Bezeichnen wir die Anzahl der Ducaten mit x,

so ist » » » Thaler $=2x$,

» » » Zwanziger $=2x^2$,

» » » Groschen $=x^2+1$,

und wir erhalten die Bedingungsgleichung:

$$x^2+1 : 2x = 113 : 15.$$

Würden wir hier das Product der äußern Glieder dem Producte der mittleren gleich setzen, so würden wir eine Gleichung des zweyten Grades erhalten, welche wir noch nicht aufzulösen wissen; wir müssen demnach suchen, eine einfache Gleichung zu erhalten, und diesen Zweck erreichen wir auf folgende Art. Aus unserer Proportion folgt (nach §. 168. 4.)

$$x^2+1+2x : x^2+1-2x = 113+15 : 113-15,$$

oder $x^2+2x+1 : x^2-2x+1 = 128 : 98$,

d. i. $(x+1)^2 : (x-1)^2 = 64 : 49$, also auch (nach

§. 172. 7.) $x+1 : x-1 = \sqrt{64} : \sqrt{49}$,

oder $x+1 : x-1 = 8 : 7$,

woraus $7x+7=8x-8$, und $x=15$ gefunden wird.

Die Anzahl der Ducaten war also $= x = 15$,

mithin » » » Thaler » » $= 2x = 30$,

» » » Zwanziger » » $= 2x^2 = 450$

und » » » Groschen » » $= x^2+1 = 226$.

Digitized by Google

b) Auflösung bestimmter Probleme mit zwey und mehreren Unbekannten.

§. 201.

Wir haben schon (§. 198) erinnert, daß sich aus den Bedingungen bestimmter Aufgaben eben so viele verschiedene, von einander unabhängige Gleichungen bilden lassen müssen, als unbekannte Größen vorkommen. Führt nun eine Aufgabe auf zwey oder mehrere Gleichungen mit zwey oder mehreren Unbekannten, welche wir ein System von Gleichungen nennen wollen, so muß man suchen durch gewisse Kunstgriffe, wovon wir die vorzüglichsten sogleich angeben werden, eine Unbekannte wegzuschaffen (zu eliminiren), und also ein neues System von Gleichungen zu bilden, welches eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält, als das gegebene System. Mit dem erhaltenen neuen Systeme verfährt man wieder auf dieselbe Art, wodurch dann ein drittes System erhalten wird, in welchem zwey Gleichungen weniger als im gegebenen Systeme, oder in welchem wieder eine Gleichung weniger als im zweyten Systeme vorkommt. Auf diese Art fährt man fort, bis man endlich auf eine einzige Gleichung mit einer einzigen Unbekannten kommt, welche dann nach §. 200 aufgelöst werden kann. Den für die in der letzten Gleichung vorkommende unbekannte Größe gefundenen Werth substituirt man dann in einer der beyden Gleichungen des vorhergehenden Systemes, wodurch der Werth einer zweyten Unbekannten bestimmt wird. Die beyden so gefundenen Werthe substituirt man wieder in einer der Gleichungen des nächst vorhergehenden Systems, wodurch eine Gleichung mit einer unbekannten Größe erhalten wird, aus welcher demnach ihr Werth bestimmt werden kann. Auf diese Art fährt man fort, bis alle unbekannten Größen bestimmt sind.

Wir wollen nun die verschiedenen Methoden, eine Unbekannte zu eliminiren, zuerst an einem Systeme von zwey Litteral-Gleichungen (§. 197. 4.) mit zwey Unbekannten, erläutern, und dieselbe dann auf Systeme von mehreren zusammen gehörigen numerischen Gleichungen anwenden.

§. 202.

Aufgabe.

Aus den beyden zusammen gehörigen Gleichungen,

$$1)\quad ax + by = c$$
$$2)\quad a'x + b'y = c',$$

Digitized by Google

wo a, b, a′ und b′ bekannte oder gegebene Größen bezeichnen, die Werthe von x und y bestimmen.

Erste Auflösungs-Methode.

Die aus beyden Gleichungen für dieselbe unbekannte Größe gefundenen Werthe (indem man die andere Unbekannte vorläufig als bekannt ansieht) werden einander gleich gesetzt.

Aus 1) folgt: $y = \frac{c - ax}{b}$ ... A)

» 2) » $y = \frac{c' - a'x}{b'}$ ... B);

mithin $\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}$,

also auch $b'c - ab'x = bc' - a'bx$

und $a'bx - ab'x = bc' - b'c$,

oder $(a'b - ab')x = bc' - b'c$,

folglich $x = \frac{bc' - b'c}{ab - ab'} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$.

Wird dieser Werth in einer der beyden Gleichungen A) und B) substituirt, so findet man nach (§. 200)

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

* Man würde dieselben Resultate gefunden haben, wenn man aus jeder der beyden gegebenen Gleichungen den Werth von y gesucht, und durch Gleichstellung dieser beyden Werthe eine Gleichung, welche bloß x enthält, gebildet hätte.

** Manche Schriftsteller nennen diese Methode die Comparation, welche sich auf den Grundsatz stützt: Größen, die derselben dritten Größe gleich sind, sind auch unter sich gleich.

Zweyte Methode.

Man entwickle den Werth für eine Unbekannte aus einer der beyden gegebenen Gleichungen, und substituire denselben für jene Unbekannte in der andern Gleichung, wodurch eine einfache Gleichung mit einer einzigen Unbekannten gefunden wird.

So folgt z. B. aus der ersten der obigen Gleichungen

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

Digitized by Google

dieſen Werth in die zweyte Gleichung geſetzt, erhält man:

$$a'x + b' \cdot \frac{c - ax}{b} = c', \text{ und hieraus folgt:}$$

$$a'bx + b'c - ab'x = bc',$$

oder $(a'b - ab')x = bc' - b'c,$

folglich $x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$, wie oben.

Dieſen für x gefundenen Werth ſubſtituirt man nun wieder in einer der beyden gegebenen Gleichungen, wodurch man eine Gleichung in y erhält, aus welcher dann nach der bekannten Methode y ſelbſt beſtimmt werden kann.

* Dieſe Methode pflegt man die Subſtitutions-Methode zu nennen.

Dritte Methode.

Man addirt die beyden gegebenen Gleichungen, oder man ſubtrahirt die eine von der andern, nachdem man die Glieder, in welchen die zu eliminirende Größe vorkommt, dadurch einander gleich gemacht hat, daß man jede Gleichung mit dem Coefficienten der wegzuſchaffenden Größe in der andern Gleichung multiplizirt.

Hat man wieder die beyden obigen Gleichungen, und will man y eliminiren, ſo erhält man, wenn man

die 1) Gleichung mit b' multiplizirt: A) $ab'x + bb'y = b'c$, und

» 2) » » a' » B) $a'bx + bb'y = bc'$,

— — —

oder durch Subtraction: $(ab' - a'b)x = b'c - bc'$,

mithin $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$, wie oben.

Hätten die Glieder, welche y enthalten, in beyden Gleichungen verſchiedene Zeichen gehabt, ſo hätten wir ſie addirt, um y zu eliminiren. — Hätte man x eliminiren wollen, ſo hätte man die Gleichung 1) mit a' und die Gleichung 2) mit a multipliziren müſſen.

Zuſatz.

Ein ähnliches allgemeines Verfahren, eine unbekannte Größe aus Gleichungen vom erſten Grade zu eliminiren, hat Bézout angegeben, welches darin beſteht, daß man eine der gegebenen Gleichun-

Digitized by Google

gen mit einer vor der Hand als bekannt angenommenen Größe multiplizirt, dann die Gleichungen addirt, und den Coefficienten einer der unbekannten Größen = o setzt, wodurch diese letztere Größe verschwindet, und sich zugleich der Werth jener angenommenen Größe bestimmt. Wenn wir nun dieses Verfahren auf die oben gegebenen Gleichungen anwenden, und die erste derselben mit der unbestimmten Größe n multipliziren, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & anx + bny = cn \\ 2) & a'x + b'y = c' \end{array}\right\} \text{ also durch Addition}$$

$$(an + a')x + (bn + b')y = cn + c' \ldots \text{ (N).}$$

Wollen wir nun zunächst x bestimmen, so setzen wir $bn + b' = o$, mithin $n = -\frac{b'}{b}$, und wir erhalten dann

$$\left(-\frac{b'}{b} \cdot a + a'\right)x = -\frac{b'}{b} \cdot c + c',$$

$$\text{oder } (a'b - ab')x = bc' - b'c,$$

$$\text{also } x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}, \text{ wie oben.}$$

Hätte man aber zuerst y bestimmen sollen, so hätten wir

$$an + a' = o, \text{ mithin } n = -\frac{a'}{a}$$

gesetzt, und hätten folgende Gleichung erhalten:

$$\left(-\frac{a'}{a} \cdot b + b'\right)y = -\frac{a'}{a} \cdot c + c',$$

$$\text{oder } (ab' - a'b)y = ac' - a'c,$$

$$\text{also } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}, \text{ wie oben.}$$

* Diese dritte Methode nennt man vorzugsweise die Eliminations-Methode.

** Welche von diesen drey Methoden in einem praktischen Falle anzuwenden sey, um am schnellsten zum Ziele zu gelangen, muß die Urtheilskraft jedes Mahl entscheiden.

Anwendung dieser Methoden.

§. 202.

Aufgabe 1.

Man soll zwey Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihre Summe = s, und ihre Differenz = d sey.

Digitized by Google

Auflösung.

Bezeichnet man die beyden gesuchten Zahlen durch x und y, so erhält man die beyden Gleichungen:

1) $x+y=s$,
2) $x-y=d$,

und durch Addition $2x=s+d$, also $x=\frac{s+d}{2}=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$,

durch Subtraction aber $2y=s-d$, » $y=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$;

d. h. die größere Zahl ist gleich der halben Summe mehr der halben Differenz, und die kleinere gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

Wenn z. B. die Summe zweyer Zahlen = 30, und der Unterschied derselben = 18 seyn soll, so ist die größere $x=15+9=24$, und die kleinere $y=15-9=6$.

Aufgabe 2.

Man suche zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Differenz ihrer Quadrate zum Siebenfachen ihres Unterschiedes wie 2 zu 1, die Summe ihrer Quadrate aber zum Doppelten der ersten Zahl, wie das 53fache der andern zu 45 sich verhalte.

Auflösung.

Der Aufgabe gemäß erhalten wir die beyden Proportionen:

A) $x^2-y^2 : 7(x-y) = 2 : 1$
B) $x^2+y^2 : 2x = 53y : 45$.

Aus A) folgt $x+y : 7 = 2 : 1$, also $x+y=14$... (C).
» B) » $x^2+y^2 : 2xy=53 : 45$ (§. 170. Zus. 2.),
mithin auch $x^2+2xy+y^2 : 2xy = 53+45 : 45$ (§. 168. 1.),
oder $(x+y)^2 : 2xy = 98 : 45$... (D).

Ferner folgt aus B)

$x^2-2xy+y^2 : 2xy = 53-45 : 45$ (§. 168. 1.),
oder $(x-y)^2 : 2xy = 8 : 45$... (E)

Aus D) und E) aber erhalten wir:

$(x+y)^2 : (x-y)^2 = 98 : 8$ (§. 174. 2.)
$= 49 : 4$
also auch $x+y : x-y = 7 : 2$ (§. 172. Zus. 7.)

oder statt x + y seinen Werth aus C) gesetzt:

Digitized by Google

$$14 : x-y = 7 : 2$$

oder $2 : x-y = 1 : 2,$

folglich $x - y = 4 \ldots$ (F).

Aus C) und F) folgt nun nach Aufg. 1.

$$x = 7 + 2 = 9, \text{ und } y = 7 - 2 = 5.$$

Wir hätten übrigens auch auf folgende Art verfahren können: Den Werth für $x+y$ aus C) in D) substituirt, erhält man die Proportion:

$$14^2 : 2xy = 98 : 45,$$

oder $14.14 : 2xy = 7.14 : 45,$

also auch $14 : 2xy = 7 : 45$

und $2 : 2xy = 1 : 45,$

demnach $2xy = 90,$ oder $4xy = 180 \ldots$ (G).

Aus C) folgt aber auch $x^2+2xy+y^2 = 14^2 = 196 \ldots$ (H), und G von H abgezogen: $x^2-2xy+y^2 = 196-180 = 16,$

oder $(x-y)^2 = 4^2,$

also $x-y = 4,$ wie vorhin.

Aufgabe 3.

Man bestimme die Werthe von x, y und z aus folgenden Gleichungen:

A) $5x + 3y + 2z = 94$

B) $3x + 7y - 6z = 20$

C) $18x - 5y - 5z = 6$

Auflösung.

Man multiplizire A) mit 3, so erhält man

$$15x+9y+6z = 282,$$

zu dieser Gleichung B), oder $3x+7y+6z = 20$ addirt, so findet man

$$18x+16y = 302,$$

oder $9x+8y = 151 \ldots.$ (D).

Multiplizirt man ferner A) durch 5, und C) durch 2; so erhält man

$$25x + 15y + 10z = 470$$

$$36x - 10y - 10z = 12$$

also durch Addition: $61x + 5y = 482 \ldots.$ E).

Die Gleichungen D) und E) bilden nun das zweyte System (§. 201), aus welchem wir nun y eliminiren wollen. Zu diesem Zwecke multiplizire man D) durch 5, und E) durch 8, so erhält man:

Digitized by Google

$$45x + 40y = 755 \ldots \text{(a)}$$
$$488x + 40y = 3856 \ldots \text{(b)}$$

und a) von b) abgezogen, gibt: $443x = 3101$,
woraus dann $x = 3101 : 443 = 7$ folgt.

Diesen für x gefundenen Werth in der Gleichung D) substituirt, erhält man:

$$63 + 8y = 151, \text{ mithin } y = \frac{151 - 63}{8} = \frac{88}{8} = 11.$$

Setzt man endlich die für x und y gefundenen Werthe in die Gleichung A), so erhält man:

$$35 + 33 + 2z = 94,$$
$$\text{oder} \quad 68 + 2z = 94,$$
$$\text{also} \quad z = \frac{94 - 68}{2} = 47 - 34 = 13.$$

* Der Anfänger wird gut thun, wenn er diese Aufgabe auch nach den übrigen Methoden behandelt.

Aufgabe 4.

Fünf Personen, welche wir A, B, C, D und E nennen wollen, traten in Compagnie, und gewannen mit ihrer Einlage gerade 25 Procent. Der D hatte um 100 Gulden mehr eingelegt, als die doppelte Einlage des B betrug; die Einlage des E aber überstieg die Hälfte der Einlagen des A, B und C um den fünfzehnten Theil der Einlage des D. Bey der Vertheilung des Gewinnes zeigte sich, daß A und D zusammen 600 fl., A, B und C zusammen 650 fl. und E doppelt so viel als B gewonnen habe. Wie viel hat nun jeder eingelegt? Wie viel hat jeder gewonnen, und wie groß war der ganze Gewinn?

Auflösung.

Nehmen wir an, die Einlagen wären folgende gewesen:

Die des A) x fl.
» » B) y »
» » C) z »; so war der Aufgabe gemäß
» » D) $2y + 100$,
» » E) $\frac{x+y+z}{2} + \frac{2y+100}{15} = \frac{15x+19y+15z+200}{30}$.

Da nun der Gewinn 25 p%, oder den vierten Theil $\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4}\right)$

Digitized by Google

von der Einlage betrug, so hatte

A) $\frac{x}{2}$ fl.

B) $\frac{y}{4}$ »

C) $\frac{z}{4}$ »

D) $\frac{2y-100}{4} = \frac{y+50}{2} = \frac{y}{2} + 25$

und E) $\frac{15x+19y+15z+200}{120}$ gewonnen.

Hieraus erhalten wir nun, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, folgende Gleichungen:

1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + 25 = 600,$

1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{4} = 650,$

3) $\frac{15x+19y+15z+200}{120} = 2 \cdot \frac{y}{4} = \frac{y}{2}.$

Ordnen wir nun diese Bedingungsgleichungen, so finden wir:

a) .. $x + 2y = 2300$

b) .. $x + y + z = 2600$

c) .. $15x - 41y + 15z = -200.$

Nun multiplizire man b) mit 15, und ziehe von dieser umgewandelten Gleichung die Gleichung c) ab, so erhält man

15.b) $15x + 15y + 15z = 39000$

— c) $15x - 41y + 15z = -200$

$- + - +$

$56y = 39200$

demnach $y = 39200 : 56 = 700.$

Diesen Werth in a) gesetzt, erhält man

$x + 1400 = 2300,$

mithin $x = 2300 - 1400 = 900,$

und nun folgt aus b)

$z = 2600 - (x+y) = 2600 - 1600 = 1000.$

Es war demnach die Einlage

Digitized by Google

des A) $x = 900$ fl. und sein Gewinn $= 225$ fl.
» B) $y = 700$ » » » » $= 175$ »
» C) $z = 1000$ » » » » $= 250$ »
» D) $= 2y + 100 = 1500$ fl. » » » $= 375$ »
» E) $= 1300 + \frac{1500}{15} = 1400$ fl. » » » $= 350$ fl.

Summe $= 5500$ fl. Summe $= 1375$ fl. $= \frac{5500}{4}$ fl.

Aufgabe 5.

Man hat zweyerley Materien, A und B, von verschiedenem specifischen Gewichte. Ein Kubikzoll von A wiegt a Unzen, und ein Kubikzoll von B wiegt b Unzen. Man soll eine Mischung machen, deren Raumesinhalt (Volumen) $= m$ Kubikzoll, und deren Gewicht $= n$ Unzen ist. Wie viel muß man von beyden Materien nehmen?

Auflösung.

Setzen wir, daß x Kubikzolle von A, und y Kubikzolle von B genommen werden müssen; so erhalten wir, weil das Gewicht der erstern $= ax$ Unzen, und das der letztern $= by$ Unzen ist, folgende Bedingungsgleichungen:

$$1) \quad x + y = m$$
$$2) \quad ax + by = n.$$

Aus 1) folgt $y = m - x$, welcher Werth in 2) gesetzt, die Gleichung gibt:

$$ax + b(m - x) = n,$$
$$\text{mithin ist} \quad (a - b)x + bm = n,$$
$$\text{woraus} \quad x = \frac{n - bm}{a - b} \text{ folgt.}$$

Demnach finden wir

$$y = m - x = m - \frac{n - bm}{a - b} = \frac{am - n}{a - b} = \frac{n - am}{b - a}.$$

Beyspiel. Man soll Gold und Silber legiren, so daß die Mischung von 51 Kubikzollen 32 Pfd., 8 Unzen Apoth. Gew. wiege. Wenn nun 1 Kubikzoll Gold $10^1/_{12}$ Unzen, und 1 Kubikzoll Silber $5^5/_9$ Unzen wiegt, wie viel Gold und wie viel Silber muß man zu der verlangten Mischung nehmen?

Digitized by Google

Hier ist $a = 10\frac{1}{12} = \frac{121}{12}$, $b = 5\frac{5}{9} = \frac{50}{9}$, $m = 51$ und $n = 32$ Pfd. 8 Unz. $= 392$ Unz, also erhalten wir durch Substitution in den obigen Formeln:

$$x = \frac{392 - \frac{50}{9} \cdot 51}{\frac{121}{12} - \frac{50}{9}} = \frac{4\,(3528 - 2550)}{363 - 200} = \frac{4\,978}{163} = 24 \text{ Unz. Gold,}$$

und $$y = \frac{\frac{121}{12} \cdot 51 - 392}{\frac{121}{12} - \frac{50}{9}} = \frac{3\,(6171 - 4704)}{363 - 200} = \frac{3.1467}{163} = 27 \text{ Unz. Silb.}$$

Aufgabe 6.

Man hat dreyerley Materien A, B, C, welche aus denselben Bestandtheilen, z. B. aus Gold, Silber und Kupfer zusammengesetzt sind. Wenn nun in irgend einer Gewichtseinheit, z. B. in einer Mark bey A) a Theile Gold, a′ Theile Silber und a″ Theile Kupfer,
» B) b » » b′ » » » b″ » »
» C) c » » c′ » » » c″ » »
enthalten sind, und wenn aus A, B und C eine Mischung D von der Art gemacht werden soll, daß in ihr auf dieselbe Gewichtseinheit m Theile Gold, n Theile Silber und p Theile Kupfer kommen, so fragt es sich, wie viel Theile müssen von jeder der drey gegebenen Mischungen A, B und C zur verlangten Mischung D genommen werden?

Auflösung.

Man setze, daß man von der Mischung
A) welche a Th. G. a′ Th. S. a″ Th. K. enthält, x Gew. Th. von
B) » b » b′ » b″ » » y » »
C) » c » c′ » c″ » » z » also v. d. Misch.
D) » m » n » p » » x+y+z » nehmen müsse, so wird offenbar die Mischung D)

1) $ax + by + cz = m$ Theile Gold,
2) $a'x + b'y + c'z = n$ » Silber und
3) $a''x + b''y + c''z = p$ » Kupfer enthalten.

Multiplizirt man nun die 1) Gleichung mit der unbestimmten Zahl v, die 2) Gleichung aber mit der unbestimmten Zahl w; so erhält man:

Digitized by Google

$$a v x + b v y + c v z = m v$$
$$a' w x + b' w y + c' w z = n w,$$ und zu diesen beyden Gleichungen
$$a'' x + b'' y + c'' z = p$$ addirt, so erhält man:

$$(G)\quad (av + a'w + a'')x + (bv + b'w + b'')y + (cv + c'w + c'')z = mv + nw + p,$$

aus welcher Gleichung wir nach und nach alle drey Unbekannten bestimmen können. Um x zu finden, eliminire man y und z, indem man $b v + b' w + b'' = o$
und $c v + c' w + c'' = o$ setzt.

Aus diesen beyden Gleichungen folgt:

$$v = \frac{b'' c' - b' c''}{b' c - b c'}, \quad \text{und} \quad w = \frac{b c'' - b'' c}{b' c - b c'},$$

für welche Werthe die Gleichung G) übergeht in folgende:

$$\left[\frac{a.(b'' c' - b' c'')}{b' c - b c'} + a' . \frac{(b c'' - b'' c)}{b' c - b c'} + a''\right] x =$$
$$= m\left(\frac{b'' c' - b' c''}{b' c - b c'}\right) + n\left(\frac{b c'' - b'' c}{b' c - b c'}\right) + p,$$

und demnach finden wir

$$x = \frac{m(b'' c' - b' c'') + n(b c'' - b'' c) + p(b' c - b c')}{a(b'' c' - b' c'') + a'(b c'' - b'' c) + a''(b' c - b c)} =$$
$$= \frac{m(b' c'' - b'' c') + n(b'' c - b c'') + p(b c' - b' c)}{a(b' c'' - b'' c') + a'(b'' c - b c'') + a''(b c' - b' c)}.$$

Auf dieselbe Art findet man aus der Gleichung G) durch Elimination von x und z, dann durch die Elimination von x und y

$$y = \frac{m(a' c'' - a'' c') + n(a'' c - a c'') + p(a c' - a' c)}{b(a' c'' - a'' c') + b'(a'' c - a c'') + b''(a c' - a' c)}, \text{ und}$$
$$z = \frac{m(a' b'' - a'' b') + n(a'' b - a b'') + p(a b' - a' b)}{c(a' b'' - a'' b') + c'(a'' b - a b'') + c''(a b' - a' b)}.$$

Diese für x, y und z gefundenen Ausdrücke haben alle einerley Nenner, wovon man sich durch bloße Vergleichung der einzelnen Glieder sogleich überzeugen kann, oder man darf nur die im Nenner der Werthe von y und z angezeigten Producte entwickeln, und immer jene zwey Glieder zusammen nehmen, welche a, oder a' oder a'' zum gemeinschaftlichen Factor haben.

Beyspiel. Man habe 3 Stangen A, B, C zusammengeschmolzenes Metall von folgender Beschaffenheit:

A) enthält in 1 ℔ der Mischung 16 Lth. Gold, 10 Lth. Silb. u. 6 Lth. Kup.
B) » » » » » 9 » » 15 » » 8 »
C) » » » » » 18 » » 14 » » 0 »

Digitized by Google

Wenn man nun aus diesen drey Stangen eine solche Mischung D machen will, daß auf 1 Pfd. der Mischung 12 Lth. G., 13 Lth. S. und 7 Lth. K. kommen, wie viel Theile muß man von jeder der drey vorhandenen Stangen nehmen?

Hier ist $a = 16$, $b = 9$, $c = 18$, $m = 12$,
$a' = 10$, $b' = 15$, $c' = 14$, $n = 13$,
$a'' = 6$, $b'' = 8$, $c'' = 0$, $p = 7$,

Mithin erhalten wir die Gleichungen:

1) $16x + 9y + 18z = 12$,
2) $10x + 15y + 14z = 13$,
4) $6x + 8y = 7$.

Multiplizieren wir die Gleichung 1) mit 7 und die Gleichung 2) mit 9; so erhalten wir:

$112x + 63y + 126y = 84$,
$90x + 135y + 126y = 117$, also durch Subtraction

$22x - 72y = -33$, und hiezu das Neunfache der Gleichung 3)
$54x + 72y = 63$ addirt, erhält man

$76x = 30$, oder $38x = 15$, also $x = \frac{15}{38}$.

Nun folgt aus der Gleichung 3)

$$8y = 7 - 6x = 7 - 6 \cdot \frac{15}{38} = 7 - \frac{45}{19} = \frac{133 - 45}{19} = \frac{88}{19} = 8 \cdot \frac{11}{19},$$

demnach $y = \frac{11}{19} = \frac{22}{38}$.

Substituirt man die für x und y gefundenen Werthe in einer der beyden ersten Gleichungen, so findet man $z = \frac{1}{38}$.

Es verhalten sich demnach

$$x : y : z = \frac{15}{38} : \frac{22}{38} : \frac{1}{38} = 15 : 22 : 1,$$

d. h. man muß, um die verlangte Mischung zu erhalten, 15 Theile von der Stange A, 22 Theile von B, und einen Theil von C nehmen. Wenn nun das Gewicht der ganzen Mischung D) 5 Pfd. 15 Lth. = = 190 Lth. betragen soll, wie viel Loth müssen von jeder Stange genommen werden?

* Es ist nützlich und nothwendig, daß sich der Anfänger in der Bildung und Auflösung der Gleichungen fleißig übe, um sich Fertigkeit im Rechnen überhaupt zu verschaffen, besonders aber um mit mannigfaltigen Kunstgriffen der Arithmetik vertraut zu werden, und dadurch seine Urtheilskraft zu schär-

Digitized by Google

fen. Zu diesem Zwecke sind von vielen Schriftstellern Sammlungen von Aufgaben und Beyspielen verfaßt worden, von welchen also der fleißige Schüler eine zur Hand nehmen muß. Einige jener Sammlungen sind:

Meier Hirsch, Sammlung von Beyspielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin, 1804.

T. Beskiba, Prof., Auflösungslehre der Gleichungen des ersten und zweyten Grades, sammt einer Sammlung von Aufgaben, ꝛc. Wien und Triest, 1819.

J. Salomon, Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beyspielen aus der Arithmetik und Algebra, ꝛc. Wien und Triest, 1824.

B) Von der Auflösung der Gleichungen des zweyten Grades.

§. 204.

1) Es ist $ax^2 = b$, oder $x^2 = \frac{b}{a}$ die allgemeine Form einer reinen

und $ax^2 + bx = c$, » $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ die allgemeine Form einer gemischten quadratischen Gleichung (§. 197.), d. h. jede Gleichung des zweyten Grades läßt sich, wenn sie geordnet wird (§. 199), auf eine dieser beyden Formen bringen. Setzen wir der Kürze wegen $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so erhalten wir die beyden Gleichungen:

$$A)\quad x^2 = p,$$
$$B)\quad x^2 + px = q,$$

wo p und q was immer für positive oder negative Zahlen bezeichnen.

2) Wenn man eine Zahl um ihr Quadrat vermehrt, so heißt die so gefundene Summe eine Pronikzahl, z. B. $x^2 + x = m$.

3) Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind diejenigen Zahlen, welche statt x gesetzt, die erste Seite der Gleichung wirklich der zweyten Seite gleich machen, und diese Zahlen suchen, heißt die Gleichung auflösen. So z. B. sind die Zahlen 12 und -2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 10x = 24$, weil sowohl $(12)^2 - 10.12 = 144 - 120 = 24$, also auch $(-2)^2 - 10 \times -2 = 4 + 20 = = 24$ ist.

§. 205.

Jede reine geordnete Gleichung des zweyten Grades wird aufgelöst, wenn man auf beyden Seiten die Quadratwurzel auszieht (§. 196.8.).

Digitized by Google

Ist nähmlich $x^2 = p$, so erhält man $x = \pm\sqrt{p}$ (§. 128.), denn es ist sowohl $(+\sqrt{p})^2 = +p$ als auch $(-\sqrt{p})^2 = +p$.

Es hat demnach jede reine quadratische Gleichung zwey Wurzeln, die zwar der absoluten Größe nach gleich, aber einander entgegen gesetzt sind.

Ist p negativ, z. B. $x^2 = -a^2$, so erhält man $x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$, also beyde Wurzeln unmöglich.

§. 206.

Die Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung mit einer unbekannten Größe zu finden.

1) Ordnet man die vorgelegte Gleichung, so erhält sie die Form $x^2 + px = q$. Vergleicht man die erste Seite $x^2 + px$ mit $(x+n)^2 = x^2 + 2nx + n^2$, und setzt $p = 2n$, mithin $n = \frac{p}{2}$ und $n^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$; so sieht man, daß man nur auf beyden Seiten der geordneten Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten vom zweyten Gliede addiren dürfe, um auf der linken Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat zu erhalten; man findet nähmlich

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q,$$

$$\text{oder} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2+4q}{4},$$

$$\text{mithin} \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2+4q}{4}\right)} = \pm\frac{\sqrt{p^2+4p}}{2} \text{ (§. 129)}$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

$$\text{oder} \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

2) Es hat also auch die unreine quadratische Gleichung zwey Wurzeln, es ist nähmlich entweder

$$x = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}, \text{ oder } x = \frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

3) Wenn p und q mögliche (reelle) Größen bezeichnen, so sind diese beyden Werthe für x nur dann reell, wenn $p^2 + 4q$ positiv, mithin $\sqrt{p^2+4q}$ möglich ist. Weil nun p^2 immer positiv seyn muß, es mag p selbst positiv oder negativ seyn (§. 54. Zus. 3.); so hängt

Digitized by Google

die Möglichkeit (Realität) der beyden Wurzeln lediglich von q ab. Ist nähmlich q positiv in der gegebenen Gleichung, so sind die beyden Wurzeln stets reell, im entgegengesetzten Falle aber nur dann, wenn $p^2 > 4q$, oder $\left(\frac{p^2}{4}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ ist.

4) Welcher von beyden Werthen für x genommen werden müsse, entscheidet in vorkommenden Fällen die Urtheilskraft oder die Natur der Aufgabe.

Zusatz 1.

Wenn das erste Glied mit einem Coefficienten behaftet ist, durch welchen der Coefficient des zweyten Gliedes nicht theilbar ist, so ist es öfters vortheilhafter, auf folgende Art zu verfahren.

Es sey $ax^2 + bx = c$ die aufzulösende Gleichung, wo a gegen b und c eine Primzahl ist.

Man multiplizire die gegebene Gleichung mit dem vierfachen Coefficienten des ersten Gliedes, nähmlich mit 4a, und addire auf beyden Seiten dieser neuen Gleichung das Quadrat des zweyten Coefficienten, so erhält man auf der einen Seite ein vollkommenes Quadrat, und dann verfährt man wie oben. Man erhält nähmlich zuerst

$$ax^2 + bx = c$$
$$\times 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$
$$b^2 = b^2 \quad \text{also durch Addition}$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$
d. i. $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$,
mithin $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 + 4ac}$,
woraus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ gefunden wird.

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2 + 4ac}{a^2}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} + 4\cdot\frac{c}{a}\right)},$$

und setzt man $\frac{b}{a} = p$, also $\frac{b^2}{a^2} = p^2$, und $\frac{c}{a} = q$, so geht diese Gleichung über in $x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, welches genau der oben gefundene Ausdruck ist.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Jede höhere Gleichung, welche auf die Form $ax^{2n} + bx^n = c$ gebracht werden kann, läßt sich wie eine Gleichung des zweyten Grades behandeln. Denn setzt man $x^n = z$, also $x^{2n} = (x^n)^2 = z^2$; so erhält man durch Substitution $az^2 + bz = c$, woraus nach Zusatz 1.

$$z = x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$ gefunden wird, und hieraus folgt endlich

$$x = \sqrt[n]{\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}\right)} = \frac{1}{(2a)} \sqrt[n]{(2a)^{n-1}(-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac})}.$$

Zusatz 3.

Auch die Gleichungen von der Form

$$A\sqrt[n]{a + bx^m} + B\sqrt[2n]{a + bx^m} = C$$

lassen sich wie quadratische Gleichungen behandeln. Denn setzt man $\sqrt[2n]{a + bx^m} = y$, also $(\sqrt[2n]{a + bx^m})^2 = \sqrt[n]{a + bx^m} = y^2$ (§. 131. Zus. 2.); so erhält man mittelst Substitution:

$$A \cdot y^2 + By = C,$$

woraus $$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

gefunden wird; demnach ist auch

$$\sqrt[2n]{a + bx^m} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

mithin (nach §. 196. b.)

$$a + bx^m = \left[\frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}\right]^{2n} = \frac{(-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC})^{2n}}{2^{2n} A^{2n}},$$

und hieraus folgt

$$x = \sqrt[m]{\left[\frac{(-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC})^{2n}}{2^{2n} A^{2n} \cdot b} - \frac{a}{b}\right]}.$$

Digitized by Google

Anwendung dieser Lehre auf die Auflösung bestimmter Aufgaben.

§. 207.

Aufgabe 1.

Man löse die Gleichung $5x^2 - 20x = 585$.

Zuerst läßt sich diese Gleichung durch 5 dividiren, und man erhält: $x^2 - 4x = 117$

und hiezu $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$ addirt

$$x^2 - 4x + 2^2 = 121$$

oder $(x-2)^2 = 121$,

also $x - 2 = \pm\sqrt{121} = \pm 11$,

folglich $x = \pm 11 + 2$; nähmlich es ist

entweder $x = +11 + 2 = 13$, oder

$x = -11 + 2 = -9$.

Aufgabe 2.

Man bestimme aus der Gleichung $x^2 + 5x + 5 = 0$ den Werth von x.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$x^2 + 5x = -5$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4},$$

d. i. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$,

mithin $x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$,

also $x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$,

nähmlich es ist entweder

$x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, oder $x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

Digitized by Google

Aufgabe 3.

Man löse die Gleichung: $3x^4 - 10x^2 = 153$.

Auflösung.

Nach §. 206. Zus. 1. finden wir durch Multiplication mit $4 \cdot 3 = 12$ die Gleichung:

$$36x^4 - 120x^2 = 1836, \text{ und hiezu}$$
$$10^2 = 100 \text{ addirt,}$$
$$36x^4 - 120x^2 + 10^2 = 1936,$$
$$\text{oder} \quad (6x^2 - 10)^2 = 1936,$$
$$\text{also} \quad 6x^2 - 10 = \pm\sqrt{1936} = \pm 44,$$
$$\text{oder} \quad 3x^2 - 5 = \pm 22,$$
$$\text{mithin} \quad x^2 = \frac{\pm 22 + 5}{3},$$

nähmlich es ist entweder

1) $x^2 = \frac{22+5}{3} = 9$, oder 2) $x^2 = \frac{-17}{9}$.

Aus dem ersten Ausdrucke für x^2 folgt: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, und aus dem zweyten: $x = \pm\sqrt{\frac{-17}{9}} = \pm\frac{\sqrt{-17}}{3}$. Es hat demnach x hier vier verschiedene Werthe, nähmlich es ist entweder

$x = +3$	oder $x = +\frac{1}{3}\sqrt{-17}$,
oder $x = -3$	» $x = -\frac{1}{3}\sqrt{-17}$.

* Es läßt sich allgemein zeigen, daß jede Gleichung so viele Wurzeln haben müsse, als der höchste Potenzexponent der Unbekannten Einheiten enthält.

Aufgabe 4.

Man bestimme aus der Gleichung $\sqrt{3+x} + 36 = 13\sqrt[4]{3+x}$ den Werth von x.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$\sqrt{3+x} - 13\sqrt[4]{3+x} = -36,$$
$$\text{oder} \quad (\sqrt[4]{3+x})^2 - 13(\sqrt[4]{3+x}) = -36, \text{ und } \sqrt[4]{3+x} = z \text{ gesetzt,}$$
$$z^2 - 13z = -36,$$

Digitized by Google

demnach ist auch

$$z^2 - 13z + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169-144}{4} = \frac{25}{4},$$

$$\text{d. i. } z - \frac{13}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2},$$

$$\text{mithin } z = \frac{13 \pm 5}{2}, \text{ nähmlich es ist}$$

$$\text{entweder } z = \frac{13+5}{2} = 9, \text{ oder } z = \frac{13-5}{2} = 4;$$

$$\text{folglich ist auch } \sqrt[4]{3+x} = 9, \text{ oder } \sqrt[4]{3+x} = 4.$$

Aus der erstern dieser beyden Gleichungen erhalten wir daher $3+x = 9^4 = 6561$, also $x = 6558$, und aus der andern $3+x = 4^4 = 256$, » $x = 253$.

Zusatz.

Man kann hier auch folgenden, freylich weit beschwerlicheren Weg einschlagen. Man ordne die gegebene Gleichung nach §. 199; so findet man:

$$[\sqrt{3+x} + 36]^2 = [13\sqrt[4]{3+x}]^2 = 169\sqrt{3+x},$$

$$\text{oder } 3+x+72\sqrt{3+x} + 1296 = 169\sqrt{3+x}.$$

$$\text{oder } x+1299 = 169\sqrt{3+x} - 72\sqrt{3+x} = 97\sqrt{3+x};$$

$$\text{also auch } (x+1299)^2 = (97)^2(3+x),$$

$$\text{d. i. } x^2 + 2598x + 1687401 = 28227 + 9409x,$$

$$\text{demnach } x^2 - 6811x = -1659174,$$

$$\text{also auch } x^2 - 6811x + \left(\frac{6811}{2}\right)^2 = \frac{46389721}{4} - 1659174,$$

$$\text{d. i. } \left(x - \frac{6811}{2}\right)^2 = \frac{39753025}{4},$$

$$\text{also } x - \frac{6811}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{39753025}{4}\right)} = \pm\frac{6305}{2}$$

$$\text{und } x = \frac{6811 \pm 6305}{2}, \text{ demnach ist entweder}$$

$$x = \frac{6811+6305}{2} = \frac{13116}{2} = 6558, \text{ oder}$$

$$x = \frac{6811-6305}{2} = \frac{506}{2} = 253, \text{ wie oben.}$$

Digitized by Google

Aufgabe 5.

Es hatte jemand während der Osterferien einem Lehrer 175 fl. mit der Bestimmung übergeben, dieselben unter seine armen Schüler in gleichen Theilen zu vertheilen. Bis zum Anfange des Unterrichtes war aber einer jener Schüler gestorben, und einer war ausgetreten; und so kam es, daß jeder der übrigen 10 fl. mehr erhielt, als er früher erhalten hätte. Wie groß war die Anzahl der noch übrigen Theilnehmer?

Auflösung.

Nehmen wir an, daß früher x arme Schüler vorhanden gewesen, wo also jeder derselben $\frac{175}{x}$ fl. erhalten hätte, so waren später nur noch $x-2$ Schüler vorhanden, deren jeder demnach $\frac{175}{x-2}$ fl. erhielt, und es ist der Aufgabe gemäß

$$\frac{175}{x-2} = \frac{175}{x} + 10.$$

Hieraus folgt nun:

$$175x = 175(x-2) + 10x(x-2),$$
$$\text{oder } 175x = 175x - 350 + 10x^2 - 20x,$$
$$\text{d. i. } 10x^2 - 20x = 350,$$
$$\text{oder } x^2 - 2x = 35,$$
$$\text{also } x^2 - 2x + 1 = 36$$
$$\text{d. i. } (x-1)^2 = 36$$
$$\text{also } x - 1 = \pm\sqrt{36} = \pm 6,$$
$$\text{nähmlich } x = \pm 6 + 1.$$

Es ist also $x = 6 + 1 = 7$, denn der negative Werth $x = -5$ ist der Natur der Aufgabe gemäß hier nicht zuläßig, und demnach ist die Anzahl der noch übrigen Theilnehmer $= 5$.

Aufgabe 6.

A gab auf die Frage, wie alt er sey? folgende Antwort: Ich bin 11 Mahl so alt wie mein Sohn. Wenn Sie nun mein Alter in 7 Jahren durch mein Alter vor 13 Jahren dividiren, so ist der Quotient um 1 kleiner als die Zahl, welche meines Sohnes Alter ausdrückt. Wie alt bin ich also?

Digitized by Google

Auflösung.

Bezeichnen wir das wirkliche Alter des A mit x, so wird das Alter seines Sohnes durch $\frac{x}{11}$ bezeichnet werden müssen, und wir erhalten folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{x+7}{x-13}+1=\frac{x}{11}.$$

Hieraus folgt:

$$11(x+7)+11(x-13)=x(x-13),$$

oder $11x+77+11x-143=x^2-13x,$

oder $22x-66=x^2-13x,$ mithin

$x^2-35x=-66,$ also (nach §. 206.)

$$x^2-35x+\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{1225}{4}-66=\frac{1225-264}{4}=\frac{961}{4}=\frac{31^2}{4},$$

daher $x-\frac{35}{2}=\pm\frac{31}{2}$, und $x=\frac{35\pm31}{2}$,

folglich $x=\frac{66}{2}=33$, oder $x=\frac{4}{2}=2.$

Allein die Natur der Aufgabe lehrt uns, daß wir nur den ersten Werth, nähmlich $x=33$ nehmen können.

Aufgabe 7.

Ein Kaufmann kaufte zwey Stücke Leinwand, die wir mit A und B bezeichnen wollen. Vom ersten Stücke kostete die Elle 39 kr., und er verkaufte das ganze Stück wieder um 50 fl. Das Stück B hielt 8 Ellen weniger als das Stück A, und es kostete ihm jede Elle 2 kr. mehr als das ganze Stück (B) Ellen hatte. Als er nun das Stück B um 8 Gulden theurer verkauft hatte, als das Stück selbst Ellen enthielt, so sah er zu seinem Erstaunen, daß er bey jedem Stücke verhältnißmäßig gleichviel gewonnen habe. Wie viel Ellen hielt jedes Stück? Wie viel kostete ihm jede Elle von B? Wie viel hat er bey jeder Elle gewonnen?

Auflösung.

Bezeichnen wir die Anzahl der Ellen vom Stücke A mit x, so ist der Einkaufspreis des ganzen Stückes A offenbar 39 x, und der Verkaufspreis = 50 fl.; ferner bezeichnet $x-8$ die Anzahl der Ellen bey B, und $(x-8)+2=x-6$ der Einkaufspreis jeder Elle, also $(x-6)(x-8)$ der Einkaufspreis des ganzen Stückes B, wel-

Digitized by Google

ches um $(x-8)+8=x$ fl. wieder verkauft wurde. Da nun bey jedem Stücke der Gewinn verhältnißmäßig war, so müssen die Einkaufspreise beyder Stücke den Verkaufspreisen gerade proportional seyn; wir erhalten demnach:

$$39x : (x-6)(x-8) = 50 : x,$$

d. h. für $39x$ kr. erhielt er 50 fl.; wie viel fl. erhielt er für $(x-6)(x-8)$ Kreuzer? Aus dieser Proportion folgt nun,

$$39x^2 = 50(x-6)(x-8) = 50(x^2-14x+48),$$

oder $39x^2 = 50x^2 - 700x + 2400$,

als $11x^2 - 700x = -2400$, mithin ist auch

$\times 4.11.$

$$484x^2 - 44.700x + 700^2 = 700^2 - 44.2400,$$

d. i. $(22x-700)^2 = 384400 = (620)^2$,

demnach $22x-700 = \pm 620$,

und $x = \frac{700 \pm 620}{22}$,

nähmlich es ist entweder $x = \frac{700+620}{22} = 60$,

oder $x = \frac{700-620}{22} = \frac{40}{11} = 3\frac{7}{11}$.

Daß aber hier nur der erste Werth genommen werden müsse, geht aus den Bedingungen der Aufgabe von selbst hervor; denn würden wir $x = \frac{40}{11}$ annehmen, so erhielten wir

$$x - 8 = \frac{40}{11} - 8 = \frac{40-88}{11} = -\frac{48}{11},$$

d. i. eine negative Zahl für die Anzahl der Ellen des Stückes B, was keinen Sinn hat.

Es hielt daher das Stück A 60 Ellen, welche um $39'.60$ kr. $= 39$ fl. eingekauft, und um 50 fl. verkauft wurden; demnach betrug der Gewinn bey jeder Elle $\left(\frac{50-39}{60}\right)$ fl. $= \frac{11}{60}$ fl. $= 11$ kr., und im Ganzen 11 fl.

Das Stück B aber hielt $x-8 = 60-8 = 52$ Ellen; deren jede um 54 kr. eingekauft, und um

$$\frac{x \text{ fl.}}{x-8} = \frac{60 \text{ fl.}}{52} = \frac{15 \text{ fl.}}{13} = 1 \text{ fl. } 9\frac{3}{13} \text{ kr.}$$

verkauft wurde. Also wurde bey jeder Elle von B $15\frac{3}{13}$ kr. gewon-

Digitized by Google

nen, und im Ganzen $\left(15\frac{3}{13}\text{ fr.}\right).52 = \left(\frac{198}{13}.52\right)$ fr. =
= 198.4 fr. = 792 fr. = 13 fl. 12 fr.

* Wollen wir den Gewinn nach Procenten bestimmen, so dürfen wir nur folgende Proportionen bilden:

bey A 39 fl. Capit.: 100 fl. Cap. = 11 fl. Gew. : y fl. Gew.... (g),

» B $\frac{54.52}{60}$ fl. C.: 100 » » = 13 fl. 12 kr. G.: z fl. » ... (g'),

woraus $y = z = \frac{1100}{39} = 28\frac{8}{39}$ gefunden wird, d. h. der Kaufmann hat sowohl beym ersten als zweyten Verkauf $28\frac{8}{39}$ Procent gewonnen.

Aufgabe 8.

A gab auf die Frage, wie theuer er sein Reitpferd gekauft habe, folgenden Bescheid: Ich habe es heute eben wieder verkauft, weil ich 36 Thaler mehr dafür bekommen habe. Hätte ich das Pferd um 100 Thaler gekauft, so hätte ich 40 Thaler weniger bekommen müssen, als das Doppelte des wirklichen Einkaufspreises betragen hat, um dieselben Procente zu gewinnen, die ich so gewonnen habe. Wie theuer wurde also das Pferd gekauft?

Auflösung.

Nehmen wir an, das Pferd sey um x Thaler gekauft worden, so ist der Verkaufspreis $x+36$, und weil zu denselben Procenten aus 100 Thaler der Aufgabe gemäß $2x-40$ Thaler werden sollen, bey einerley Zinsfuß und gleicher Zeit aber die Capitalien den Interessen proportional sind; so erhalten wir die Proportion:

x Thlr. Cap. : 100 Thlr. Cap. = (x + 36) Thlr. : (2x − 40) Thlr.

und hieraus folgt $x(2x-40) = 100\,(x+36)$, oder

$$2x^2 - 40x = 100x + 3600,$$

$$\text{oder } x^2 - 70x = 1800$$

$$\text{also auch } x^2 - 70x + (35)^2 = 1800 + 1225 = 3025,$$

$$\text{oder } (x-35)^2 = 55^2,$$

$$\text{mithin } x - 35 = \pm 55,$$

$$\text{und } x = 35 \pm 55.$$

Da die Natur unserer Aufgabe keinen negativen Werth zuläßt, so ist also $x = 35 + 55 = 90$, d. i. das Pferd wurde um 90 Thlr.

Digitized by Google

gekauft, und um (90 + 36) Thlr. = 126 Thlr. verkauft, wobey also 40 Procent gewonnen wurden, oder das Pferd hätte um 140 Thlr. = = (2.90 — 40) Thlr. verkauft werden müssen, wenn der Einkaufspreis 100 Thaler gewesen wäre.

§. 208.

Wenn zwey oder mehrere zusammengehörige Gleichungen mit zwey oder mehreren Unbekannten gegeben sind, von welcher die eine oder mehrere oder auch alle quadratische Gleichungen sind, so darf man nur aus der einen der gegebenen Gleichungen den Werth der einen gesuchten Zahl durch die übrigen unbekannten Größen ausdrücken, und diesen Werth in die andern Gleichungen setzen, und überhaupt nach der §. 201 gegebenen Vorschrift verfahren.

Da jedoch dieß Verfahren gewöhnlich auf Gleichungen von höheren Graden führt, deren Auflösungsmethoden außer den Gränzen dieser Schrift liegen, so beschränken wir uns hier nur auf die Auflösung einiger einfacheren Aufgaben, die auf quadratische oder höhere Gleichungen führen, welche sich jedoch durch Kunstgriffe nach den bereits vorgetragenen Lehren behandeln lassen.

Aufgabe 1.

Man suche zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihr Product = 60, ihre Summe aber = 16 werde.

Auflösung.

1) Wir erhalten die beyden Gleichungen:

$$1) \quad xy = 60,$$
$$2) \quad x+y = 16.$$

Aus 1) folgt $y = \frac{60}{x}$, welcher Werth in 2) substituirt die Gleichung

$$x + \frac{60}{x} = 16 \text{ gibt.}$$

Hieraus folgt: $x^2 + 60 = 16x$, oder
$x^2 - 16x = -60$,
also auch $x^2 - 16x + 8^2 = 64 - 60 = 4$,
oder $(x - 8)^2 = 4$,
mithin $x - 8 = \pm 2$

und $x = 8 \pm 2$, d. i. $x = 10$, oder $x = 6$,

folglich $y = \frac{60}{x} = \frac{60}{10} = 6$, oder $y = \frac{60}{6} = 10$.

2) Übrigens hätten wir auch auf folgende Art verfahren können:

Aus der Gleichung 2) folgt:

$$(x + y)^2 = 16^2, \text{ oder}$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 256,$$

aus der Gleich. 1) aber $\quad 4xy \quad = 240$

$$\text{also } x^2 - 2xy + y^2 = 16,$$
$$\text{oder } x - y = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

Da nun $x + y = 16$, und $x - y = \pm 4$, so ist nach §. 203. Aufgabe 1.

$x = \frac{16 \pm 4}{2}$, also $x = 10$, oder $x = 6$,

und $y = \frac{16 \mp 4}{2}$, » $y = 6$, » $y = 10$, wie vorhin.

Aufgabe 2.

Man suche x und y aus den beyden Gleichungen:

a) $x + y = 22$,

b) $x^2 + y^2 = 250$.

Auflösung.

1) Aus a) folgt $y = 22 - x$, und diesen Werth in b) gesetzt, findet man

$$x^2 + (22 - x)^2 = 250,$$
oder $\quad x^2 + 484 - 44x + x^2 = 250,$
» $\quad 2x^2 - 44x = 250 - 484 = -234,$
» $\quad x^2 - 22x = -117,$
also $\quad x^2 - 22x + 11^2 = 121 - 117,$
oder $\quad (x - 11)^2 = 4,$
mithin $\quad x - 11 = \pm 2$, oder $x = 11 \pm 2$, mithin ist
entweder $\quad x = 13$ » $x = 9$, folglich
$y = 22 - x = 22 - 13 = 9$, oder $y = 22 - 9 = 13$.

2) Man hätte auch auf folgende Art verfahren können:

Aus a) folgt $(x + y)^2 = 22^2$, oder $x^2 + 2xy + y^2 = 484$,
hievon die Gleichung b) $\quad x^2 \quad + y^2 = 250$ ab-

Digitized by Google

gezogen, so erhält man $2xy = 234$, und diese Gleichung von b) subtrahirt, so ist $x^2 - 2xy + y^2 = 250 - 234 = 16$, oder $(x-y)^2 = 16$, mithin $x-y = \pm 4$, und da nun nebst der Summe der beyden Zahlen ihre Differenz bekannt ist; so sind die beyden Zahlen selbst bekannt.

Auf ähnliche Art bestimmt man die Werthe von x und y aus den Gleichungen: a) $x^2+y^2=500$, und b) $x-y=10$.

Aufgabe 3.

Man soll zwey Zahlen von der Art finden, daß ihr Unterschied $= 2$, der Unterschied ihrer Würfel aber $= 26$ werde.

Auflösung.

1) Wir haben der Aufgabe gemäß die folgenden zwey Gleichungen:

a) $x - y = 2$,

b) $x^3 - y^3 = 26$.

Dividiren wir die Gleichung b) durch die Gleichung a), so finden wir

c) $\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2 = \frac{26}{2} = 13$; aus a) folgt

d) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4$; und wenn d) von c) abgezogen wird: $3xy = 9$, oder $xy = 3$; diese Gleichung addire man zu c); so erhält man $x^2 + 2xy + y^2 = 16$, d. i. $(x+y)^2 = 16$, mithin $x+y = \pm 4$, und weil $x-y=2$ gegeben, so ist

$x = \frac{\pm 4+2}{2}$, d. i. $x = 3$, oder $x = -1$,

und $y = \frac{\pm 4-2}{2}$, d. i. $y = 1$, „ $y = -3$.

2) Diese Gleichungen lassen sich auch auf folgende Art auflösen:

Aus a) erhält man $x = y + 2$, und dieser Werth in b) gesetzt, gibt:

$(y+2)^3 - y^3 = 26$, oder $y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 = 26$, d. i.

$6y^2 + 12y = 18$, oder $y^2 + 2y = 3$, mithin

$y^2 + 2y + 1 = 4$, oder $(y+1)^2 = 4$, demnach $y+1 = \pm 2$, und $y = \pm 2 - 1$, nähmlich $y = 2 - 1 = 1$,

oder $y = -2 - 1 = -3$,

folglich $x = y + 2 = \pm 2 - 1 + 2 = \pm 2 + 1$, nähmlich $x = 3$,

oder $x = -1$, wie vorhin.

Digitized by Google

Aufgabe 4.

Zwey Zahlen zu suchen, deren Product $= 96$, und deren Würfel zusammengenommen $= 2240$.

Auflösung.

1) Wir haben also die beyden Gleichungen:

a) $xy = 96$, b) $x^3 + y^3 = 2240$.

Erhebt man die Gleichung b) auf's Quadrat; so findet man:

c) $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 5017600$; ferner ist

$(xy)^3 = x^3y^3 = 96^3 = 884736$, also

d) $4x^3y^3 = 3538944$, und d) von c) abgezogen, gibt $x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = 1478656$, oder

$(x^3 - y^3)^2 = 1216^2$, mithin $x^3 - y^3 = \pm 1216$, welche Gleichung in Verbindung mit $x^3 + y^3 = 2240$ nach 203 Aufgabe 1.

$$x^3 = \frac{2240 \pm 1216}{2} = 1120 \pm 608, \text{ und}$$

$$y^3 = \frac{2240 \mp 1216}{2} = 1120 \mp 608 \text{ gibt.}$$

Demnach ist $x^3 = 1728$, folglich $x = \sqrt[3]{1728} = 12$,

oder $x^3 = 512$, oder $x = \sqrt[3]{512} = 8$,
und $y^3 = 512$, » $y = 8$
oder $y^3 = 1728$, » $y = 12$.

2) Auf gewöhnliche Art wird also verfahren:

Aus a) folgt: $y = \frac{96}{x}$, und dieser Werth in b) gesetzt, gibt

$x^3 + \left(\frac{96}{x}\right)^3 = 2240$, oder $x^3 + \frac{884736}{x^3} = 2240$, und hieraus

$$x^6 - 2240x^3 = -884736,$$

also auch $x^6 - 2240x^3 + 1120^2 = 1254400 - 884736 = 369664$,
oder $x^3 - 1120 = \pm \sqrt{369664} = \pm 608$,
folglich $x^3 = 1120 \pm 608$, und demnach $y^3 = 1120 \mp 608$ wie oben.

Aufgabe 5.

Die Differenz zweyer Zahlen ist $= \frac{1}{4}$, und die Summe ihrer Würfel beträgt nur $\frac{3}{16}$ von ihrer Summe. Wie heißen diese beyden Zahlen?

Digitized by Google

Auflösung.

1) Diese Aufgabe führt auf folgende Gleichungen:

a) $x - y = \frac{1}{4}$,

b) $x^3 + y^3 = \frac{3}{16}(x+y)$.

Dividirt man die Gleichung b) durch $(x+y)$, so findet man:

c) $x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{16}$, und hievon

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ abgezogen, so ist

$xy = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, mithin $3xy = \frac{3}{8}$, und diese Gleichung

zu c) addirt: $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$, d. i.

$(x+y)^2 = \frac{9}{16}$, mithin $x + y = \pm\frac{3}{4}$.

Da nun $x+y = \pm\frac{3}{4}$, und $x - y = \frac{1}{4}$; so ist

$x = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$, also $x = \frac{1}{2}$, oder $x = -\frac{1}{4}$,

und $y = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$, » $y = \frac{1}{4}$. » $y = -\frac{1}{2}$.

2) Auf gewöhnliche Art steht die Rechnung folgender Maßen:

Aus a) erhält man $x = y + \frac{1}{4}$, und dieser Werth in c) gesetzt, gibt

$$\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{4}\right)y + y^2 = \frac{3}{16},$$

oder $y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} - y^2 - \frac{1}{4}y + y^2 = \frac{3}{16}$,

oder $y^2 + \frac{1}{4}y = \frac{1}{8}$, also ist auch $y^2 + \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{9}{64}$,

d. i. $\left(y + \frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$,

demnach $y + \frac{1}{8} = \pm\frac{3}{8}$, und $y = \pm\frac{3}{8} - \frac{1}{8}$ nähmlich es ist

entweder $y = \frac{1}{4}$, oder $y = -\frac{1}{2}$, und daher

$x = y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, oder $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, wie oben.

Digitized by Google

Aufgabe 6.

Die Summe der Würfel zweyer Zahlen ist $=91000$, die Summe der beyden Zahlen selbst aber $=70$; wie heißen diese Zahlen?

Auflösung.

I. Es ist a) $x^3+y^3=91000$,
b) $x+y=70$.

Aus b) folgt $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=343000$,

und hievon abgezogen $\quad x^3 \qquad\qquad +y^3=91000$;

so findet man: $\quad 3x^2y+3xy^2=252000$,

oder $\quad x^2y+xy^2=84000$,

» $\quad xy(x+y)=84000$,

und für $(x+y)$ den Werth aus b) gesetzt $\quad xy.70=84000$,

folglich c) $\quad xy=1200$.

Verfährt man nun mit den Gleichungen b) und c) nach Aufgabe 1; so findet man $x=35\pm5$ und $y=35\mp5$.

II. Man hätte auch auf folgende Art verfahren können: Man dividire die Gleichung a) durch b); so findet man

$x^2-xy+y^2=1300$ und diese Gleichung von

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=4900$ (aus b) abgezogen:

$3xy=3600$, mithin $xy=1200$, wie vorhin.

Aufgabe 7.

Man suche zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihr Product, ihre Summe und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich werden.

Auflösung.

Es sey $xy=x+y=x^2-y^2$, nähmlich

a) $x^2-y^2=x+y$,

b) $xy=x+y$.

Kürzt man a) durch $(x+y)$ ab, so erhält man

$x-y=1$, mithin $x=y+1$, und dieser Werth in b) gesetzt, gibt

$(y+1)y=y+1+y$, oder

$y^2+y=2y+1$, mithin $y^2-y=1$, woraus

$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, folglich $x=y+1=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

gefunden wird. Sind also gleichwohl die verlangten Zahlen irrational,

Digitized by Google

so sind sie doch möglich, welches aber bey folgender Aufgabe der Fall nicht seyn wird.

Aufgabe 8.

Man suche zwey Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihr Product, ihre Summe und die Summe ihrer Quadrate einander gleich werden.

Auflösung.

Es sey $xy = x+y = x^2+y^2$, nähmlich

a) $x^2+y^2 = xy$

b) $xy = x+y$.

Aus b) folgt $xy - y = x$, mithin $y = \frac{x}{x-1}$, und dieser Werth in a) substituirt, gibt die Gleichung:

$x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{x-1}$, oder durch x^2 dividirt:

$1 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)}$, und hieraus folgt:

$(x-1)^2 + 1 = x-1$, oder $x^2 - 2x + 2 = x - 1$,

demnach ist $x^2 - 3x = -3$, und hieraus findet man

$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$, folglich $y = \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-3}) - 1} =$

$= \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{1 \pm \sqrt{-3}} = \frac{(3 \pm \sqrt{-3})(1 \mp \sqrt{-3})}{(1 \pm \sqrt{-3})(1 \mp \sqrt{-3})} = \frac{6 \mp 2\sqrt{-3}}{1+3} = \frac{3 \mp \sqrt{-3}}{2}$.

Da nun die Werthe für x und y imaginär (unmöglich) sind, so lehren sie uns, daß die Aufgabe selbst etwas Unmögliches oder Ungereimtes verlange, oder sie zeigen uns, daß es gar keine Zahlen von der verlangten Eigenschaft gibt.

Aufgabe 9.

Man löse die Gleichungen:

a) $xy = x-y$,

b) $xy = x^2+y^2$.

Auflösung.

Aus a) folgt: $(x+1)y = x$, oder $y = \frac{x}{x+1}$, und dieser Werth in b) gesetzt, gibt

Digitized by Google

$\frac{x^2}{x+1} = x^1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}$, oder durch x^2 abgekürzt:

$\frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$, und hieraus erhalten wir:

$x+1 = (x+1)^2+1 = x^2+2x+2$, mithin ist

$x^2 + x = -1$, woraus

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, folglich $y = \frac{x}{x+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1 \pm \sqrt{-3}} =$

$= \frac{(\pm\sqrt{-3}-1)^2}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Diese Resultate belehren uns demnach auch hier wieder, daß die Aufgabe etwas Unmögliches verlange.

Aufgabe 10.

Es seyen folgende Gleichungen gegeben:

1) $x^m y^n = a$,

2) $x^p z^q = b$,

3) $y^r z^s = c$;

man bestimme die Werthe von x, y und z.

Auflösung.

I. Aus 2) folgt: $(x^p z^q)^s = b^s$, oder $x^{ps} z^{qs} = b^s$ ... A)

» 3) » $(y^r z^s)^q = c^q$, » $y^{rq} z^{sq} = c^q$ ... B)

Dividirt man nun A) durch B); so erhält man $\frac{x^{ps}}{y^{rq}} = \frac{b^s}{c^q}$, mithin ist $\left(\frac{x^{ps}}{y^{rq}}\right)^n = \left(\frac{b^s}{c^q}\right)^n$, oder $\frac{x^{nps}}{y^{nqr}} = \frac{b^{ns}}{c^{nq}}$ ... C); ferner folgt aus

1) $(x^m y^n)^{qr} = a^{qr}$, oder $x^{mqr} y^{nqr} = a^{qr}$ ... D).

Multiplizirt man nun die Gleichungen C) und D) mit einander, so erhält man: $x^{nps} \cdot x^{mqr} = \frac{a^{qr} b^{ns}}{c^{nq}}$, oder

$x^{nps+mqr} = a^{qr} b^{ns} c^{-nq}$, folglich

$x = \sqrt[nps+mqr]{a^{qr} b^{ns} c^{-nq}}$, welchen Werth wir Kürze halber durch w bezeichnen wollen. Setzen wir also in den Gleichungen 1) und 2) $x = w$; so finden wir

$w^m y^n = a$, mithin $y = \sqrt[n]{\frac{a}{w^m}}$,

und $w^p z^q = b$, » $z = \sqrt[q]{\frac{b}{w^p}}$.

Digitized by Google

Beyspiel.

Es sey 1) $x^2y^3 = 486$, 2) $x^3z^3 = 512$, und 3) $y^2z^2 = 1$.

Die beyden letzten Gleichungen lassen sich einfacher darstellen, denn es ist $x^3z^3 = (xz)^3 = 512 = 8^3$, mithin $xz = 8$, und $y^2z^2 = (yz)^2 = 1$, also $yz = 1$. Dividirt man diese beyden letzten Gleichungen durch einander, so erhält man $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y} = 8$, also $x = 8y$. Substituirt man diesen Werth in der Gleichung $x^2y^3 = 486$; so findet man $(8y)^2 . y^3 = 8^2y^2 . y^3 = 64y^5 = 486$, oder

$32y^5 = 243$, und $y^5 = \frac{243}{32} = \frac{3^5}{2^5}$, folglich $y = \frac{3}{2}$.

Hieraus folgt nun $x = 8y = 8 . \frac{3}{2} = 12$, und $z = \frac{8}{x} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 11.

Man soll drey Zahlen von folgender Beschaffenheit finden: Das Product der ersten in die Summe der beyden andern sey $= 102$, das Product der zweyten in die Summe der beyden übrigen $= 126$, und das Product der dritten Zahl in die Summe der beyden ersten $= 120$.

Auflösung.

Wir haben folgende Gleichungen:

1) $x(y+z) = 102$, also $xy + xz = 102$,
2) $y(x+z) = 126$, » $xy + yz = 126$,
3) $z(x+y) = 120$, » $xz + yz = 120$.

Durch Addition dieser drey Gleichungen erhält man

$$2xy + 2xz + 2yz = 348,$$

oder wenn man durch 2 dividirt:

$$xy + xz + yz = 174.$$

Subtrahirt man nun von dieser Gleichung nach und nach jede der gegebenen Gleichungen, so erhält man:

4) $yz = 72$,
5) $xz = 48$,
6) $xy = 54$.

Durch Multiplication dieser drey Gleichungen erhält man: $x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 186624 = 432^2$, folglich $xyz = 432$, welche Gleichung nach und nach durch die Gleichungen 4, 5, 6 dividirt, folgende Gleichungen gibt:

Digitized by Google

$$\frac{xyz}{yz} = \frac{432}{72}, \text{ oder } x = 6,$$
$$\frac{xyz}{xz} = \frac{432}{48}, \quad » \quad y = 9,$$
$$\frac{xyz}{xy} = \frac{432}{54}, \quad » \quad z = 8.$$

Aufgabe 12.

Das Product dreyer Zahlen durch die Summe der beyden ersten dividirt, gibt 14·4, durch die Summe der ersten und dritten dividirt aber 12, und endlich durch die Summe der beyden letzten dividirt, 24 zum Quotienten; wie heißen diese drey Zahlen?

Auflösung.

Der Aufgabe gemäß ist

a) $\frac{xyz}{x+y} = 14{\cdot}4$, also $xyz = 14{\cdot}4\,(x+y)$,

b) $\frac{xyz}{x+z} = 12$ » $xyz = 12\,(x+z)$,

c) $\frac{xyz}{y+z} = 24$ » $xyz = 24\,(y+z)$,

und hieraus folgt:

$$xyz = 14{\cdot}4\,(x+y) = 12\,(x+z) = 24\,(y+z),$$

oder wenn durch 12 dividirt wird:

$$1{\cdot}2\,(x+y) = x+z = 2\,(y+z);$$ nähmlich es ist

$1{\cdot}2(x+y) = x+z$, oder $x+6y-5z=0$, ... d)

und $x+z = 2y+2z$ » $x-2y-z=0$, ... e),

---

also durch Subtraction $8y-4z=0$,

mithin $2y = z$, oder $y = \frac{1}{2}z$.

Dieser Werth in e gesetzt, gibt $x-z-z=0$, also $x=2z$, und daher $xyz = 2z.\frac{1}{2}z.z = z^3$. Durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung b) erhält man demnach $z^3 = 12(2z+z) = 12.3z = 36z$, also $z^2 = 36$, folglich $z = \pm 6$, mithin $y = \frac{1}{2}z = \pm 3$, und $x = 2z = \pm 12$.

* Wie ließe sich diese Aufgabe noch auflösen?

Digitized by Google

Dreyzehntes Kapitel.

Von den Progressionen.

§. 209.

Eine Folge von Größen, die nach einem bestimmten Gesetze entstehen, heißt Reihe, jede einzelne Größe für sich heißt Glied der Reihe, und die Zahl, welche angibt, das wievielste Glied in der Reihe eine Größe ist, heißt der Zeiger — Index — des Gliedes. Der Ausdruck, welcher das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe gebildet werden, anschaulich darstellt, also der Ausdruck für das Bildungsgesetz der Reihe, heißt das allgemeine Glied der Reihe, und die Formel für die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern der Reihe heißt das summatorische Glied oder die Summenformel.

Die Reihe heißt steigend (divergent), oder fallend (convergent), je nachdem die Glieder derselben wachsen oder abnehmen. — Die Reihe wird ferner eine endliche oder unendliche genannt, je nachdem die Anzahl ihrer Glieder begränzt oder unbegränzt ist.

Haben die auf einander folgenden Glieder einer Reihe immer dasselbe Verhältniß, so wird die Reihe vorzugsweise Progression genannt, die demnach entweder eine arithmetische (progression par différences), oder eine geometrische (progression par quotiens) ist, je nachdem jede drey auf einander folgenden Glieder der Reihe eine stätige arithmetische oder geometrische Proportion bilden. Die Progressionen theilt man, wie die Reihen überhaupt, in steigende und fallende. Der Exponent des beständigen Verhältnisses, in welchem jede zwey angränzenden Glieder der Progression stehen, heißt die Differenz oder (vorzugsweise) der Exponent der Progression, je nachdem diese eine arithmetische oder geometrische ist.

Digitized by Google

A. Von den arithmetischen Progressionen.

§. 210.

1) Eine arithmetische Progression ist dem im vorigen Paragraphe Gesagten zu Folge, eine Reihe, deren Glieder immer um dieselbe Größe (Differenz) wachsen oder abnehmen. So z. B. bilden die Zahlen 1, 5, 9, 13, 17,... eine steigende arithmetische Progression, in welcher die auf einander folgenden Glieder immer um 4 Einheiten wachsen, und die Zahlen 30, 24, 18, 12, 6, 0, — 6, — 12, — 18, ... bilden eine fallende arithmetische Progression, weil jedes folgende Glied um 6 Einheiten kleiner ist, als das unmittelbar vorhergehende.

2) Daß die Zahlen 1, 5, 9, 13, 17,... eine arithmetische Progression bilden, pflegt man also zu bezeichnen: ÷ 1.5.9.13.17....

3) Die Differenz der Reihe wird gefunden, wenn man irgend ein Glied derselben von dem nächst folgenden abzieht. Je nachdem nun diese Differenz positiv oder negativ gefunden wird, ist die Progression steigend oder fallend.

4) Ist demnach irgend ein Glied der Progression nebst der Differenz, oder sind zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder der Reihe gegeben, so kann die Progression auf beyden Seiten beliebig fortgesetzt werden. Sind z. B. 6 und 9 zwey neben einander liegende Glieder der Progression, mithin die Differenz derselben $= 9 - 6 = 3$; so ist die Reihe diese: ÷ ... — 9. — 6. — 3. 0. 3. 6. 9. 12.... Ist aber 13 irgend ein Glied einer Progression, deren Differenz $= 5$ ist; so ist die Reihe folgende: ÷ .... — 12. — 7. — 2. 3. 8. 13. 18. 23. 28. 35...

5) Bezeichnet man demnach das erste Glied einer arithmetischen Progression mit a, und die beständige Differenz mit δ, so erhält man

÷ $\overset{1}{a}.(a+\delta).\overset{3}{(a+2\delta)}.\overset{4}{(a+3\delta)}.\overset{5}{(a+4\delta)}....\overset{n}{(a+(n-1)\delta)}$....

welches die allgemeine Form der arithmetischen Progressionen ist. Man sieht hier, daß alle Glieder im Allgemeinen in der Form zweygliedriger Größen erscheinen, deren erstes Glied immer a, und das andere ein Vielfaches von δ ist, und zwar das so Vielfache, als der um 1 verminderte Index anzeigt. Daher ist das unbestimmte, oder allgemeine Glied, wenn wir es mit l, seinen Zeiger aber mit n bezeichnen, $l = a + (n-1)\delta$, wo n die Werthe 1, 2, 3, 4,.... haben kann.

Digitized by Google

6) Die allgemeine Form $\div a . (a+\delta) . (a+2\delta) . (a+3\delta) \ldots .$ bezeichnet eine steigende oder fallende Progression, je nachdem δ positiv oder negativ ist. — Liest man eine fallende Reihe rückwärts, so erhält man eine steigende, und umgekehrt.

§. 211.

In jeder arithmetischen Progression mit einer begränzten Anzahl von Gliedern ist die Summe der beyden äußersten Glieder (des ersten und letzten) gleich der Summe von je zwey andern, deren eines so weit vom ersten, als das andere vom letzten Gliede absteht.

Es sollen die Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots . z_{m-3}, z_{m-2}, z_{m-1}, z_m$ die auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Progression seyn; so ist zu erweisen, daß $z_1 + z_m = z_2 + z_{m-1} = z_3 + z_{m-2} = z_4 + z_{m-3} =$ &c. und allgemein daß $z_1 + z_m = z_r + z_{m-(r-1)}$ sey, wo z_r das r^{te} Glied von der Linken gegen die Rechte, und $z_{m-(r-1)}$ das r^{te} Glied von der Rechten gegen die Linke gezählt, also das $(m-(r-1))^{te}$ Glied von vorne an gerechnet, bezeichnet.

Das allgemeine Glied der Progression, deren erstes Glied mit a, und deren Differenz mit δ bezeichnet wird, ist $l = a + (n-1)\delta$ (§. 210. 5.); demnach ist für

$l = z_m$, $a = z_1$, und $n = m$, offenbar
$z_m = z_1 + (m-1)\delta$, ferner für
$l = z_r$, $a = z_1$, und $n = r$, offenbar
$z_r = z_1 + (r-1)\delta$, und für
$l = z_{m-(r-1)}$, $a = z_1$, und $n = m-r+1$, offenbar
$z_{m-(r-1)} = z_1 + (m-r)\delta$; mithin finden wir
$z_1 + z_m = z_1 + [z_1 + (m-1)\delta] = 2z_1 + (m-1)\delta$, und
$z_r + z_{m-(r-1)} = [z_1 + (r-1)\delta] + [z_1 + (m-r)\delta] =$
$= 2z_1 + (r-1)\delta + (m-r)\delta = 2z_1 + (m-1)\delta$;
folglich ist auch $z_1 + z_m = z_r + z_{m-(r-1)}$.

Schreibt man unter die Glieder einer arithmetischen Progression dieselbe Reihe in umgekehrter Ordnung, und addirt die gerade über einander stehenden Glieder, so wird die obige Wahrheit anschaulich.

z. B.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25
	25.	21.	17.	13.	9.	5.	1
Summen	26.	26.	26.	26.	26.	26.	26.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Der obige Satz ließe sich auch auf folgende Art erweisen:

Wenn δ die Differenz der arithmetischen Reihe $\div a.b.c.d....w, x, y, z$ ist, so läßt sich diese Reihe auch so darstellen:

$\div a, a+\delta, a+2\delta, a+3\delta, \ldots z-3\delta, z-2\delta, z-\delta, z,$

so daß diese Reihe in umgekehrter Ordnung heißt:

$z, z-\delta, z-2\delta, z-3\delta, \ldots a+3\delta, a+2\delta, a+\delta, a.$

Hier stehen nun die Glieder, welche von den beyden äußersten Gliedern der Reihe gleich weit abstehen, gerade unter einander, und man findet durch Addition die Summe eines jeden solchen Paares von Gliedern $a+z$, was zu erweisen war.

Zusatz 2.

Ist die Anzahl n der Glieder einer Reihe ungerade, z. B. $n = 2m+1$; so hat man ein mittleres Glied M, dessen Zeiger $= m+1$, denn m Glieder gehen ihm voraus, und m Glieder folgen noch nach, also ist $M = a + m\delta$. In diesem Falle aber ist $l = a + (n-1)\delta = a + 2m.\delta$, also $a + l = 2a + 2m\delta = 2(a+m\delta) = 2.M$, mithin ist $M = \frac{a+l}{2}$, d. h. die Summe der beyden äußersten Glieder ist gleich dem doppelten mittleren Gliede, oder das mittlere Glied der Reihe ist gleich der halben Summe der beyden äußersten Glieder.

§. 212.

Die Summe einer arithmetischen Progression von n Gliedern zu finden.

Es bezeichne s die Summe der arithmetischen Progression:

$$\div a.b.c.d....k.l,$$

es sey nähmlich

$s = a+b+c+d+\ldots+k+l$, oder

$s = l+k+c+h+\ldots+b+a$, so ist durch Addit. dieser Gleich.

$2s = (a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(k+b)+(l+a)$, oder, weil (nach §. 211) $a+l = b+k = c+i =$ &c., und n solche Summenausdrücke vorkommen,

$2s = (a+l).n$, folglich $s = \frac{(a+l).n}{2} = \left(\frac{a+l}{2}\right)n = (a+l)\frac{n}{2}$.

Also wird die Summe einer arithmetischen Progression mit einer bestimmten Anzahl von Gliedern gefunden, wenn man das Product

Digitized by Google

aus der Summe der beyden äußersten Glieder in die Anzahl der Glieder durch 2 dividirt, oder wenn man die halbe Summe der beyden äußersten Glieder mit der Anzahl der Glieder, oder die Summe der beyden äußern Glieder mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt.

Beyspiele.

1) Man suche die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, oder man summire die Progression: $\div 1.2.3.4 \ldots (n-1).n$.

Hier ist $a=1$, $l=n$, $\delta=1$, mithin $S=(1+n)\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

2) Man bestimme die Summe der n ersten ungeraden Zahlen, oder man summire die Progression: $\div 1, 3, 5, 7, 9, \ldots (2n-1)$.

Hier ist $a=1$, $\delta=2$, $l=2n-1$, mithin ist

$$S=(1+2n-1).\frac{n}{2}=n.n=n^2.$$

3) Man summire die n ersten geraden Zahlen, oder die Progression:

$\div 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots (2n-2)$.

Hier ist $a=0$, $\delta=2$, $l=2n-2=2(n-1)$;

folglich $S=(0+2(n-1))\frac{n}{2}=n(n-1)$.

Zusatz.

Setzt man in der Summenformel $S=\frac{(a+l)n}{n}$ statt l seinen Werth $a+(n-1)\delta$ (§. 210. 5.); so findet man

$$S=[a+a+(n-1)\delta]\frac{n}{2}=(2a+(n-1)\delta)\frac{n}{2}=an+\frac{n(n-1)}{2}.\delta.$$

§. 213.

Die beyden Gleichungen I) $l=a+(n-1)\delta$ und II) $S=(a+l)\frac{n}{2}$ enthalten die fünf Größen a, δ, l, n und s, von welchen a, l, n in beyden Gleichungen vorkommen. Sind nun drey von diesen fünf Größen gegeben, so können die beyden andern mit Hülfe dieser zwey Formeln bestimmt werden.

Substituirt man den Werth von l in der Gleichung II), so erhält man, wie wir schon (§. 212. Zus.) gesehen haben, die Gleichung

$$\text{III.}\quad S=an+\frac{n(n-1)}{2}.\delta.$$

Digitized by Google

Aus I) folgt ferner $a = l - (n-1)\delta$, und diesen Werth in II) gesetzt, gibt:

$$s = [l - (n-1)\delta + l]\frac{n}{2} = (2l - (n-1)\delta)\frac{n}{2}, \text{ oder}$$

$$\text{IV.} \quad s = ln - \frac{n(n-1)}{2}\delta.$$

Aus I) folgt endlich auch noch

$$(n-1) = \frac{l-a}{\delta}, \text{ oder } n = \frac{l-a}{\delta} + 1 = \frac{l-a+\delta}{\delta},$$

und wenn man diesen Werth in der Gleichung II) setzt, so erhält man

$$\text{V.} \quad s = \frac{a+l}{2} \cdot \frac{l-a+\delta}{\delta}.$$

Betrachtet man diese fünf Gleichungen mit einiger Aufmerksamkeit, so sieht man sogleich, daß jede der fünf Größen a, δ, l, n und s in vier verschiedenen Gleichungen vorkommt, und demnach läßt sich auch jede derselben auf vier verschiedene Arten ausdrücken, wodurch wir die folgenden 20 Gleichungen erhalten, mittelst welchen alle Aufgaben rücksichtlich der arithmetischen Progressionen aufgelöst werden können.

N.	Gesucht	Gegeben	Formeln	
1	a	l, n, δ,	$a = l - (n-1)\delta$	I
2	a	l, n, s,	$a = \frac{2s}{n} - l$	II
3	a	n, δ, s,	$a = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot \delta$	III
4	a	l, δ, s,	$a = \frac{1}{2}\delta \pm \sqrt{\left(l + \frac{\delta}{2}\right)^2 - 2\delta s}$	V
5	δ	a, l, n,	$\delta = \frac{l-a}{n-1}$	I
6	δ	a, n, s,	$\delta = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$	III
7	δ	a, l, s,	$\delta = \frac{(a+l)(l-a)}{2s-(a+l)} = \frac{l^2 - a^2}{2s-(a+l)}$	V
8	δ	n, l, s,	$\delta = \frac{2(nl-s)}{n(n-1)}$	IV

Digitized by Google

N.	Gesucht	Gegeben	Formeln	
9	l	a, n, δ,	$l = a + (n-1)\delta$	I
10		a, n, s,	$l = \frac{2s}{n} - a$	II
11		δ, n, s,	$l = \frac{2s + n(n-1)\delta}{2n}$	IV
12		a, δ, s,	$l = \frac{-\delta}{2} \pm \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\delta\right)^2 + 2\delta s}$	V
13	n	a, δ, l,	$n = \frac{l + \delta - a}{\delta} = \frac{l - a}{\delta} + 1$	I
14		a, δ, s,	$n = \frac{-(2a-\delta) \pm \sqrt{(2a-\delta)^2 + 8\delta s}}{2\delta}$	III
15		a, l, s,	$n = \frac{2s}{a + l}$	II
16		δ, l, s,	$n = \frac{(2l+\delta) \pm \sqrt{(2l+\delta)^2 - 8\delta s}}{2\delta}$	IV
17	s	a, l, n,	$s = \frac{(a + l)n}{2}$	II
18		a, δ, n,	$s = an + \frac{n(n-1)\delta}{2}$	III
19		a, l, δ,	$s = \frac{(a + l)(l + \delta - a)}{2\delta}$	V
20		l, n, δ,	$s = ln - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \delta$	IV

* a bezeichnet immer das erste, l das letzte Glied, δ die Differenz, n die Anzahl der Glieder und s die Summe von n Gliedern der Progression.

Die den Formeln beygesetzten römischen Ziffern beziehen sich auf die im Paragraphe aufgestellten fünf Gleichungen, aus welchen die Formeln abgeleitet sind.

Zusatz.

Da von den fünf Größen a, δ, l, n, s jedes Mahl drey gegeben seyn müssen, um die beyden andern aus den beyden Grundgleichungen I) und II) bestimmen zu können, und weil sich fünf Größen zu zweyen nur zehn Mahl verbinden lassen, so sind in allem nur zehn

Digitized by Google

verschiedene Aufgaben möglich, welche wir hier kurz zusammen stellen wollen.

Gegeben	Gesucht	Wird aufgelöst durch die Formel
a, δ, n,	l	9
	s	18
a, δ, l,	n	13
	s	19
a, δ, s,	n	14
	l	12
a, n, l,	δ	5
	s	17
a, n, s,	δ	6
	l	10
a, l, s,	δ	7
	n	15
δ, n, l,	a	1
	s	20
δ, n, s,	a	3
	l	11
δ, l, s,	a	4
	n	16
n, l, s,	a	2
	δ	8

§. 214.

Zwischen zwey gegebenen Zahlen a und b eine beliebige Anzahl (z. B. m) Glieder so einzuschalten, daß diese mit den gegebenen Zahlen eine arithmetische Progression bilden.

Es soll also hier eine Progression gebildet werden, worin a das erste, b das letzte Glied, und $m + 2$ die Anzahl aller Glieder ist. Es kommt demnach hier lediglich darauf an, die Differenz der Progression zu bestimmen, weil dann die ganze Reihe leicht dargestellt werden kann; diese ist aber allgemein $\delta = \frac{l - a}{n - 1}$ (§. 213. Form. 5), und

Digitized by Google

da hier $l = b$, und $n = m + 2$, mithin $n - 1 = m + 1$ ist; so ist $\delta = \frac{b-a}{m+1}$; folglich die gesuchte Reihe diese:

$$\div a \cdot \left(a + \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right), \ldots$$
$$\left(a + m \cdot \frac{b-a}{m+1}\right); b,$$

oder $\div a; \frac{ma+b}{m+1} \cdot \frac{(m-1)a+2b}{m+1} \cdot \frac{(m-2)a+3b}{m+1} \ldots$
$$\frac{a+mb}{m+1} \cdot b.$$

Sollen z. B. vier mittlere arithmetische Proportionalzahlen zwischen die Zahlen 5 und 25 eingeschaltet werden, so erhält man

$$\delta = \frac{b-a}{m+1} = \frac{25-5}{4+1} = \frac{20}{5} = 4;$$

mithin ist die gesuchte Progression

$$\div 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 25.$$

§. 215.

Wir wollen die bisherigen Lehren auf die Auflösung einiger Aufgaben anwenden.

Aufgabe 1.

Es wollte jemand sein Glück in der Zahlenlotterie versuchen, und setzte das erste Mahl 6 kr., dann 12 kr., und so jedes folgende Mahl um 6 kr. mehr, bis er endlich in der 30sten Ziehung gewann. Wie viel hat der Spieler im Ganzen gesetzt, und wie hoch belief sich der letzte Einsatz?

Auflösung.

Hier ist $a = 6$, $\delta = 6$, und $n = 30$, wenn wir die Bezeichnung, wie im §. 213, beybehalten, und demnach ist nach Form. 18 des dort aufgestellten Schema

$$s = an + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\delta = 6 \cdot 30 + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot 6 = 180 + 2610 =$$
$$= 2790 \text{ kr.} = 46 \text{ fl. } 30 \text{ kr.},$$

und (nach §. 213. Form. 9.)

$$l = a + (n-1)\delta = 6 + (30-1)\,6 = 6 + 29 \cdot 6 = 180 \text{ kr.} = 3 \text{ fl.}$$

Wir hätten auch zuerst l und dann s nach Form. 17 (§. 213) be-

Digitized by Google

rechnen können. Weil nähmlich l = 180 kr. gefunden wurde, so ist $s = \left(\frac{a+l}{2}\right) n = \frac{6+180}{2} . 30 = 93 . 30 = 2790$ kr. = 46 fl. 30 kr. wie vorhin.

Aufgabe 2.

Ein Vater versprach seinem Sohne für die erste fehlerfreye Aufgabe in jedem Monathe 5 kr. Conv. M., und für jede folgende fehlerfreye Aufgabe immer um 5 kr. mehr, und so mußte der Vater seinem Sohne für die am letzten Januar fehlerfrey gelieferte Aufgabe einen Thaler zahlen. Wie viel fehlerfreye Aufgaben hat nun der Sohn im Januar geliefert, und wie viel Geld hat er von seinem Vater in diesem Monathe erhalten?

Auflösung.

Wir haben hier die Progression ÷ 5 . 10 . 15 .... 90 (weil 1 Thaler = 90 kr. ist), worin die Anzahl der Glieder und die Summe zu bestimmen ist. Hier ist a = 5, δ = 5, l = 90, mithin (nach §. 213. Form. 13 und §. 19)

$$n = \frac{l-a}{\delta} + 1 = \frac{90-5}{5} + 1 = 17 + 1 = 18,$$

und $s = \frac{(a+l)(l+\delta-a)}{2\delta} = \frac{(5+90)(90+5-5)}{2 . 5} = \frac{95 . 90}{10} = 855,$

d. i. der Sohn hat 18 fehlerfreye Aufgaben geliefert, und dafür 855 kr. = 14 fl. 15 kr. erhalten.

Aufgabe 3.

A hatte zu einer Unternehmung 2000 Gulden hergegeben. Im ersten Jahre wurden nur 2 Procent, im zweyten 4, im dritten 6, und so in jedem folgenden Jahre 2 Procent mehr gewonnen. Wie groß ist der Zinsfuß im 50sten Jahre, und wie hoch belaufen sich die Zinsen binnen 50 Jahren?

Auflösung.

Um die erste Frage zu beantworten, müssen wir das 50ste Glied der Progression ÷ 2 . 4 . 6 . 8 .... bestimmen, und dieses ist (nach §. 213. Form. 9.)

$$l = a + (n-1)\delta = 2 + 49 . 2 = 100,$$

d. h. im 50sten Jahre rentirte sich das Capital mit 100 Procent.

Digitized by Google

Um die zweyte Frage zu beantworten, verfahre man wie folgt:

100 : 2000 = 2 : x, also x = 40, nähmlich im ersten Jahre betrugen die Zinsen nur 40 fl., also im zweyten 80 fl., im dritten 120 fl. u. s. f., endlich im 50sten Jahre 2000 fl.; wir haben demnach die Summe der Reihe ÷ 40. 80. 120..... 2000 zu bestimmen. Diese ist aber

$$s = (a+l)\frac{n}{2} = (40+2000)\frac{50}{2} = 2040 \cdot 25 = 51000 \text{ fl.}$$

Aufgabe 4.

Ein Jugendfreund übergab einem Lehrer eine gewisse Summe Geldes, um sie unter seine 25 arme Schüler auf folgende Art zu vertheilen. Der Lehrer sollte eine schriftliche Ausarbeitung machen lassen, die Schüler nach der Qualität ihrer Arbeit classificiren, und dem ersten das Meiste geben, dem zweyten etwas weniger, dem dritten um eben so viel weniger als dem zweyten, u. s. w. Auf diese Art erhielt der dritte und vierzehnte zusammen 30 fl., der siebente und letzte aber zusammen 20 fl. Wie viel erhielt jeder dieser vier Schüler, und wie viel erhielten alle 25 Schüler zusammen?

Auflösung.

Setzen wir, der erste habe x fl., der zweyte und jeder folgende aber um y Gulden weniger als der unmittelbar vorhergehende bekommen; so haben wir die arithmetische Reihe:

÷ x, x — y, x — 2y, x — 3y,.... x — 23y, x — 24y.

Das dritte und vierzehnte Glied zusammen ist demnach

(x — 2y) + (x — 13y) = 30, oder 2x — 15y = 30... (A),

das 7te und 25ste Glied zusammen aber

(x — 6y) + (x — 24y) = 20, oder 2x — 30y = 20... (B).

Aus dieser Gleichung folgt 2x = 30y + 20, und dieser Werth für 2x in die Gleichung A) gesetzt, gibt

30y + 20 — 15y = 30, oder 15y = 10, also $y = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Setzt man diesen Werth in A), so findet man

$$x = \frac{15 \cdot y + 30}{2} = \frac{15 \cdot \frac{2}{3} + 30}{2} = 20.$$

Die gesuchte Reihe ist demnach

÷ 20, $19\frac{1}{3}$, $18\frac{2}{3}$, , 18, $17\frac{1}{3}$....

Digitized by Google

Es erhielt demnach der dritte Schüler

$$x - 2y = 20 - \frac{4}{3} = 18\frac{2}{3} \text{ fl.} = 18 \text{ fl. } 40 \text{ kr.},$$

der vierzehnte $x - 13y = 20 - \frac{26}{3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$ fl. $= 11$ fl. 20 kr.
der siebente $x - 6y = 20 - 4 = 16$ fl.,
und der letzte $x - 24y = 20 - 16 = 4$ fl.;
alle zusammen erhielten aber

$$S = \left(\frac{a+l}{2}\right) n = \frac{20+4}{2} \cdot 25 = 12 \cdot 25 = 300 \text{ fl.}$$

Aufgabe 5.

Wie viel Tauben hast du hier? so fragte ein Herr einen Bauernjungen. Dieser erwiederte: Wenn Sie meine Tauben kaufen wollen, so zahlen Sie mir für die erste einen Groschen, für die zweyte vier Kreuzer, und so für jede folgende einen Kreuzer mehr, in Summa also 6 fl. 5 Groschen. Der Herr nahm die Tauben um den verlangten Preis, und fand, daß ihm jede Taube im Durchschnitte weniger kostete, als die Anzahl der Tauben anzeigte. Wie viel Tauben waren es, und wie hoch kam eine im Durchschnitte?

Auflösung.

Wir haben hier die Progression $\div 3, 4, 5 \ldots\ldots$, deren Summe $= 6$ fl. 5 Gr. $= 375$ kr. seyn soll, zu suchen aber ist die Anzahl der Glieder. Da nun $a = 3$, $\delta = 1$ und $s = 375$ gegeben sind, so ist (nach §. 213. Form. 14.)

$$n = \frac{-(2a-\delta) \pm \sqrt{(2a-\delta)^2 + 8\delta s}}{2\delta} = \frac{-(6-1) \pm \sqrt{(6-1)^2 + 8.375}}{2} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{3025}}{2} = \frac{-5 \pm 55}{2},$$

mithin $n = \frac{-5+55}{2} = 25$, denn der negative Werth $n = -30$ kann dem Sinne der Aufgabe gemäß nicht Statt finden, und demnach kam jede Taube auf $\frac{375}{25} = 15$ kr. zu stehen.

Aufgabe 6.

Man soll eine steigende arithmetische Progression von der Beschaffenheit bilden, daß die Summe des vierten und achten Gliedes

Digitized by Google

$= 3$, das Product aus dem dritten und sechsten Gliede $= \frac{9}{8}$, das letzte Glied aber $= 3$ werde. Welche Zahlen bilden diese Reihe? Wie viel Glieder hat die Reihe, und wie groß ist ihre Summe?

Auflösung.

Man setze das erste Glied $= x$, die Differenz der Reihe $= y$ und die Anzahl der Glieder $= z$; so erhält man der Aufgabe gemäß folgende Gleichungen:

$G_4 + G_8 = (x+3y)+(x+7y) = 3$, oder $2x+10y = 3$, ...(A)

$G_2 \cdot G_6 = (x+2y)\ (x+5y) = \frac{9}{8}$, » $x^2+7xy+10y^2 = \frac{9}{8}$, ...(B)

und $G_z = x+(z-1)y = 3$....(C).

Aus A) folgt $x = \frac{3}{2} - 5y$, also $x^2 = \left(\frac{3}{2}-5y\right)^2 =$

$$= \frac{9}{4} - 15y + 25y^2,$$

und diese Werthe in B) substituirt, erhält man

$$\frac{9}{4} - 15y + 25y^2 + 7\left(\frac{3}{2} - 5y\right)y + 10y^2 = \frac{9}{8},$$

woraus $y = \frac{1}{4}$ gefunden wird. Also ist $x = \frac{3}{2} - 5y = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$, und endlich mittelst Substitution in C)

$$\frac{1}{4} + (z-1)\frac{1}{4} = 3, \text{ folglich } z = 12.$$

Es ist demnach die gesuchte Reihe diese:

$$\div \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{12}{4}, \text{ oder}$$

$$\div \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 3.$$

Aufgabe 7.

Ein Vater hatte eine aus mehreren Bänden bestehende Reisebeschreibung, welche seinem studirenden Sohne ungemein gefiel, so daß dieser ihn oft bath, er möge ihm doch dieses herrliche Buch schenken. Endlich sagte der Vater, daß er seiner Bitte willfahren wolle, wenn er aus folgenden Angaben die Anzahl der Bände jenes Werkes berechnen könne. »Wie theuer ich den ersten Band gekauft habe, weiß ich nicht mehr, wohl aber kann ich mich erinnern, daß ich für jeden fol-

Digitized by Google

genden Band 30 kr. mehr bezahlen mußte, als für den jedes Mahl vorhergehenden, weil immer Karten und Zeichnungen zu den frühern Bänden beygelegt wurden. Dividire ich den Preis des ganzen Werkes durch den Preis des letzten Bandes, so ist der Quotient um einen halben Gulden größer, als der Preis des letzten Bandes. Hätte ferner das ganze Werk 13 Bände, und würde jeder so viel gekostet haben als der letzte Band, so wäre mir das Werk noch ein Mahl so hoch zu stehen gekommen.« Nun weißt du alles, mein Sohn, was zur Antwort auf meine Frage nöthig ist.

Auflösung.

Wir wollen annehmen, daß das Buch aus x Bänden bestehe, daß der letzte Band y Gulden, und das ganze Werk z Gulden gekostet habe, so erhalten wir der Aufgabe gemäß, zuerst folgende Gleichungen:

$$\frac{z}{y} = y + \frac{1}{2}, \text{ also } z = y^2 + \frac{1}{2}y \ldots\ldots (1)$$

$$\text{und } 13.y = 2.z, \text{ also } z = \frac{13}{2}.y \ldots\ldots (2).$$

Setzt man diese beyden Werthe für z einander gleich, so erhält man:

$$y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{13}{2}y, \text{ mithin } y + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}, \text{ folglich } y = \frac{13}{2} - \frac{1}{2} = 6,$$

$$\text{und } z = \frac{13}{2}.y = \frac{13}{2}.6 = 39.$$

Es kostete also der letzte Band 6 Gulden, und das ganze Werk 39 Gulden, und es bleibt uns demnach nur noch übrig, n zu bestimmen. Da nun die Preise der auf einander folgenden Bände eine steigende arithmetische Progression bilden sollen, deren Differenz 30 kr. oder $^1/_2$ fl. ist, so erhalten wir, weil nebst der Differenz der Reihe auch ihr letztes Glied und ihre Summe bekannt ist (nach §. 213. Form. 16.),

$$n = \frac{(2l+\delta) \pm \sqrt{(2l+\delta)^2 - 8\delta s}}{2\delta} = \frac{\left(12+\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(12+\frac{1}{2}\right)^2 - 4.39}}{2.\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 156} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 156} =$$

$$= \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{25 \pm 1}{2},$$

Digitized by Google

nähmlich es ist entweder $n = 13$, oder $n = 12$; weil aber die Antwort entscheidend seyn soll, so wollen wir noch den Preis des ersten Bandes bestimmen. Es ist (§. 213.) $a = 1 - (n-1)\delta$,

mithin für $n = 12$, $a = 6 - 11 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

und für $n = 13$, $a = 6 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 0$,

und hieraus erkennen wir, daß $n = 12$ gesetzt werden müsse, weil sonst der erste Band nichts gekostet haben würde, welches der Natur der Aufgabe nicht zusagt.

B. Von den geometrischen Progressionen.

§. 216.

1) Eine geometrische Progression oder Reihe ist eine Folge von Größen, von denen jede zur nächst folgenden einerley geometrisches Verhältniß hat (vergl. 209); es kann demnach jedes folgende Glied der Reihe als ein Product aus dem nächst vorhergehenden in irgend eine beständige (unveränderliche) Zahl (den Exponenten der Reihe) betrachtet werden. So z. B. bilden die Zahlen 2, 6, 18, 54, 162,.... eine geometrische Progression, wo der Exponent (§. 208) 2 ist.

2) Daß die Zahlen 2, 6, 18, 54, 162 eine geometrische Progression bilden, pflegt man auf folgende Art anzudeuten:

$$\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162.$$

3) Bezeichnen k und l zwey auf einander folgende Glieder einer geometrischen Progression, und e den Exponenten der Reihe; so ist, weil $l = ke$, wie aus dem Begriffe von selbst folgt, umgekehrt $e = \frac{l}{k}$, d. h. der Exponent der geometrischen Reihe wird gefunden, wenn man irgend ein Glied derselben durch das unmittelbar vorhergehende dividirt. Aus diesem Grunde wird der Exponent der geometrischen Progression auch der Quotient der Reihe genannt.

4) Die Reihe heißt steigend (divergent) oder fallend (convergent), je nachdem $e > 1$ oder $e < 1$ gefunden wird.

5) Ist demnach irgend ein Glied der geometrischen Progression nebst dem Exponenten, oder sind zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder der geometrischen Progression gegeben; so kann diese auf beyden Seiten ohne Ende fortgesetzt werden. Sind z. B. 8 und 16 zwey neben einander liegende Glieder einer geometrischen Progression, mithin

Digitized by Google

der Exponent derselben $= \frac{16}{8} = 2$; so ist die Reihe diese:

$$\div \ldots \tfrac{1}{16} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : \ldots.$$

6) Bezeichnet demnach a das erste Glied, und e den Exponenten einer geometrischen Progression; so läßt sich diese allgemein so darstellen:

$$\div \underset{1}{a} : \underset{2}{ae} : \underset{3}{ae^2} : \underset{4}{ae^3} : \underset{5}{ae^4} : \underset{6}{ae^5} \ldots.$$

Hier ist also, weil $a = ae^0$, jedes Glied ein Product aus zwey Factoren, deren einer das erste Glied a und der andere eine Potenz vom Exponenten e ist, und zwar ist diese Potenz jedes Mahl um einen Grad niedriger als der Zeiger (Index) angibt. Bezeichnen wir nun das n^{te} Glied der Progression mit z, so ist das allgemeine Glied

$$z = a \cdot e^{n-1}.$$

§. 217.

1) Weil $a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = \ldots.$; so sieht man, daß jedes Glied der geometrischen Progression die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem vorhergehenden und dem nachfolgenden Gliede sey.

2) Wenn a und b die beyden ersten Glieder, und allgemein $\underset{r}{G}$ das r^{te} Glied einer geometrischen Progression bezeichnen, deren Exponent wieder e seyn mag; so ist

$$\underset{1}{G} : \underset{2}{G} = a : b = a : ae, \text{ oder}$$

$$\underset{1}{G} : \underset{2}{G} = 1 : e, \text{ also auch } (\S.\ 172.\ \text{Zus. } 4.)$$

$$\underset{1}{G^{r-1}} : \underset{2}{G^{r-1}} = 1 : e^{r-1}, \text{ und}$$

$$\underset{1}{G^{r-1}} : \underset{2}{G^{r-1}} = a : ae^{r-1}, \text{ d. i.}$$

$$\underset{1}{G^{r-1}} : \underset{2}{G^{r-1}} = \underset{1}{G} : \underset{r}{G}.$$

d. h. in jeder geometrischen Progression verhält sich das erste Glied zum r^{ten}, wie die $(r-1)^{te}$ Potenz des ersten Gliedes zu derselben Potenz des zweyten Gliedes.

Sind demnach die beyden ersten Glieder einer Progression gegeben, so kann mittelst dieses Satzes jedes beliebige andere Glied gefunden werden.

3) Wenn in einer geometrischen Reihe a, t, u, z gleich weit von einander abstehende Glieder bezeichnen, und es ist $t = ae^{r-1}$, also

Digitized by Google

$u = t \cdot e^{r-1}$ und $z = u \cdot e^{r-1}$, so verhält sich $a : t = u : z$, denn es ist durch Substitution:

$$a : ae^{r-1} = u : ue^{r-1},$$
$$\text{oder } 1 : e^{r-1} = 1 : e^{r-1}.$$

Hieraus folgt nun, daß $az = tu$, d. h. daß das Product der beyden äußersten Glieder einer geometrischen Reihe gleich sey dem Producte aus je zwey andern Gliedern, von welchen das eine so weit vom ersten, als das andere vom letzten absteht.

Schreibt man unter die Glieder einer geometrischen Progression dieselbe Reihe in umgekehrter Ordnung, und multiplizirt die gerade über einander stehenden Glieder mit einander, so wird diese Wahrheit anschaulich. Z. B.

$$\begin{array}{l} \div \quad 1 : 2 : 4 : 8 \cdot 16 : 32 : 64 : 128 \\ \div 128 : 64 : 32 : 16 \quad 8 : 4 : 2 : 1 \\ \hline \text{Producte } 128. 128. 128. 128. 128. 128. 128. 128 \end{array}$$

§. 218.

Die Summe einer geometrischen Progression von n Gliedern zu finden.

Es bezeichne s die Summe der Reihe:

$$\div a : ae : ae^2 : ae^3 : \ldots : ae^{n-3} : ae^{n-2} : ae^{n-1},$$

es sey nähmlich $s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-3} + ae^{n-2} + ae^{n-1}$,

so ist auch $se = \quad ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-3} + ae^{n-2} + ae^{n-1} + ae^n$

also durch Subt. $s - se = a \qquad - ae^n$,

oder $s(1-e) = a(1-e^n)$, also $s = \frac{a(1-e^n)}{1-e} = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$.

Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Art: Weil $a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = \ldots = ae^{n-3} : ae^{n-2} = ae^{n-2} : ae^{n-1}$, so ist auch (nach §. 165 1.)

$$(a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-3} + ae^{n-2}) :$$
$$: (ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1}) = a : ae = 1 : e,$$

wo das erste Glied der Proportion die Summe der ganzen gegebenen Reihe, weniger dem letzten Gliede derselben, das zweyte Glied der Proportion aber die Summe der gegebenen Reihe weniger dem ersten Gliede derselben ist; folglich erhält man durch Substitution:

Digitized by Google

$(s - a e^{n-1}) : (s - a) = 1 : e$, woraus

$(s - a e^{n-1}) e = s - a$, oder

$se - a e^n = s - a$, also

$se - s = a e^n - a$, oder

$s(e - 1) = a(e^n - 1)$, mithin

$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ gefunden wird.

Beyspiele.

1) Man suche die Summe folgender Reihe:

$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$,

oder $s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$.

Hier ist $a = 1$, $e = 2$, und $n = 9$, mithin findet man durch Substitution:

$$s = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{512 - 1}{1} = 511.$$

2) Man summire folgende Progression:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^8},$$

oder $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{256}$.

Hier ist wieder $a = 1$, $n = 9$ und $e = \frac{1}{2}$; folglich ist

$$s = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2^9} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{512} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-511}{512} : \frac{-1}{2} = \frac{511}{512} \cdot 2 =$$

$$= \frac{511}{256} = 1\frac{255}{256}.$$

Zusatz 1.

Es ist $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a \cdot e^n - a}{e - 1} = \frac{ae^{n-1} \cdot e - a}{e - 1} = \frac{ze - a}{e - 1}$

(§. 216. 6.), d. h. die Summe einer geometrischen Progression wird auch gefunden, wenn man das Product aus dem letzten Gliede in den Exponenten der Reihe um das erste Glied vermindert, und diese Differenz durch den um 1 verminderten Exponenten dividirt.

Zusatz 2.

Wenn das erste Glied der Reihe $= 1$ ist, so erhält man die geometrische Progression:

Digitized by Google

$$\div\ 1 : e : e^2 : e^3 : \ldots : e^{n-1},$$

deren Summe $s = \frac{e^n - 1}{e - 1}$ ist.

Wird auch $e = 1$, so geht die vorige Reihe über in $\div 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : \ldots : 1$, und durch Substitution in der Summenformel erhält man $s = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, welches ein Zeichen der Unbestimmtheit ist; allein da $s = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$, und die Reihe n Glieder hat, so wird die Einheit n Mahl zu sich selbst addirt, und demnach ist $s = 1 + 1 + 1 + \ldots = n \cdot 1 = n$, folglich ist hier auch $s = \frac{0}{0} = n$.

Zusatz 3.

1) Für $a = 1$, und $e = \frac{1}{u}$, erhält man die Progression

$$\div\ 1 : \tfrac{1}{u} : \tfrac{1}{u^2} : \tfrac{1}{u^3} : \tfrac{1}{u^n} : \ldots : \tfrac{1}{u^{n-1}},$$ deren Summe

$$s = \frac{\frac{1}{u^n} - 1}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{1 - u^n}{u^n} : \frac{1-u}{u} = \frac{1-u^n}{u^n} \cdot \frac{u}{1-u} =$$

$$= \frac{1-u^n}{u^{n-1}(1-u)} = \frac{u^n - 1}{u^{n-1}(u-1)} \text{ ist,}$$

nähmlich $s = \frac{u^n - 1}{u^{n-1}(u-1)} = \frac{u^n}{u^{n-1}(u-1)} - \frac{1}{u^{n-1}(u-1)} =$

$$= \frac{u^n : u^{n-1}}{u-1} - \frac{1}{u^{n-1}(u-1)},$$

oder es ist $s = \frac{u^n - 1}{u^{n-1}(u-1)} = \frac{u}{u-1} - \frac{1}{u^{n-1}(u-1)}$.

Je größer hier u und n werden, desto kleiner wird der Bruch $\frac{1}{u^{n-1}(u-1)}$, und desto mehr nähert sich s dem Werthe von $\frac{1}{u-1}$, so daß man, wenn n sehr groß wird, $s = \frac{1}{u-1}$ ohne merklichen Fehler setzen kann, indem dann $\frac{1}{u^{n-1}(u-1)}$ beynahe verschwindet.

2) Aus der Gleichung

$$s = 1 + \tfrac{1}{u} + \tfrac{1}{u^2} + \tfrac{1}{u^3} + \tfrac{1}{u^n} + \ldots + \tfrac{1}{u^{n-1}} \text{ folgt}$$

$$s - 1 = s' = + \tfrac{1}{u} + \tfrac{1}{u^2} + \tfrac{1}{u^3} + \tfrac{1}{u^4} + \ldots + \tfrac{1}{u^{n-1}},$$

Digitized by Google

oder $s' = s - 1 = \frac{u^n - 1}{u^{n-1}(u-1)} - 1 = \frac{u^n - 1 - u^{n-1}(u-1)}{u^{n-1}(u-1)} =$

$= \frac{u^n - 1 - u^n + u^{n-1}}{u^{n-1}(u-1)},$

d. i. $s' = \frac{u^{n-1} - 1}{u^{n-1}(u-1)} = \frac{u^{n-1}}{u^{n-1}(u-1)} - \frac{1}{u^{n-1}(u-1)} =$

$= \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u^{n-1}(u-1)}.$

Geht nun die Reihe $\frac{1}{u} : \frac{1}{u^2} : \frac{1}{u^3} : \ldots$ ohne Ende fort, so ist n unendlich groß, und demnach der Bruch $\frac{1}{u^{n-1}(u-1)}$ unendlich klein, d. h. kleiner als jede noch so kleine denkbare Zahl, folglich beynahe $= 0$, und man erhält dann $s' = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^4} + \ldots$ ohne Ende $= \frac{1}{u-1}$.

So z. B. ist

$s' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1;$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2},$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3},$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots = \frac{1}{10-1} = \frac{1}{9}.$

3) Ist $s = \frac{a}{u} + \frac{a}{u^2} + \frac{a}{u^3} + \frac{a}{u^4} + \ldots$ ohne Ende; so erhält man

$s = a\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^4} + \ldots\right) = a \cdot \frac{1}{u-1} = \frac{a}{u-1}.$

Es sey z. B. $s = 0{\cdot}484848\ldots = 0{\cdot}\dot{4}\dot{8} = \frac{48}{10^2} + \frac{48}{10^4} + \frac{48}{10^6} + \ldots$ ohne Ende, so erhält man, weil $a = 48$, und $u = 10^2 = 100$ ist, durch Substitution aus der allgemeinen Formel

$$s = \frac{48}{100-1} = \frac{48}{99} = \frac{16}{33}.$$

Zusatz 4.

Wenn der Exponent der Reihe negativ ist, z. B. $e = -q$, so erhält man die Progression $\mp a : -aq : aq^2 : -aq^3 : \ldots$; deren Summe $s = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - aq^5 + \ldots \pm aq^{n-1}$ ge-

Digitized by Google

funden wird, wenn man $z = \pm aq^{n-1}$ in der obigen Gleichung für s setzt; es ist nähmlich hier

$$s = \frac{\pm aq^{n-1} \times -q-a}{-q-1} = \frac{\mp aq^n - a}{-q-1} = \frac{\pm aq^n + a}{q+1} = \frac{a(\pm q^n + 1)}{q+1}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Man könnte übrigens auch auf folgende Art verfahren:

Ist n eine ungerade Zahl, z. B. $n = 2m+1$, mithin $n-1 = 2m$; so ist dann

$$\begin{aligned}
s &= a - aq + aq^2 - aq^3 + \ldots - aq^{2m-1} + aq^{2m} = \\
&= (a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m}) - (aq + aq^3 + aq^5 + \ldots + aq^{2m-1}) \\
&= (a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m-2} + aq^{2m}) - \\
&\qquad - q(a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m-2}) \\
&= (a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m-2}) + aq^{2m} - \\
&\qquad - q(a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m-2}) \\
&= (a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2m-2})(1 - q) + aq^{2m} \\
&= \frac{q^2 . aq^{2m-2} - a}{q^2 - 1} \times -(q-1) + aq^{2m} \\
&= (aq^{2m} - a) \times -\left(\frac{q-1}{q^2-1}\right) + aq^{2m} = (a - aq^{2m}) \frac{q-1}{(q+1)(q-1)} + aq^{2m} \\
&= a(1 - q^{2m}) . \frac{1}{q+1} + aq^{2m} = \frac{a(1 - q^{2m}) + aq^{2m}(q+1)}{q+1} = \\
&= \frac{a(1 - q^{2m} + q^{2m+1} + q^{2m})}{q+1} = \frac{a(1 + q^{2m+1})}{q+1} \text{ wie oben.}
\end{aligned}$$

Ist n eine gerade Zahl, z. B. $n = 2u$, also $n-1 = 2u-1$; so findet man auf dieselbe Art, wie im vorigen Falle

$$s = \frac{a(-q^{2u}+1)}{q+1} = \frac{a(1-q^{2u})}{1+q}.$$

§. 219.

In den Gleichungen $z = ae^{n-1}$ (§. 216. 6.) und $s = \frac{ze-a}{e-1}$ (§. 218. Zus. 1.) kommen 5 verschiedene Größen vor, nähmlich a, e, n, z und s. Sind demnach drey von diesen Größen gegeben, so können die beyden andern mit Hülfe dieser beyden Gleichungen bestimmt werden. Übrigens wird man in einigen Fällen auf höhere Gleichungen kommen, welche wir nicht aufzulösen wissen. Die Hauptgleichungen wollen wir übrigens doch hier zusammen stellen.

Digitized by Google

Es ist I. $z = a e^{n-1}$,

II. $s = \frac{z e - a}{e - 1}$,

III. $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ (§. 218.).

Aus I. folgt $a = \frac{z}{e^{n-1}}$, und dieser Werth in II. gesetzt, gibt:

IV. $s = \frac{ze - \frac{z}{e^{n-1}}}{e - 1} = \frac{z(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}$.

Ferner folgt aus I. $e = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$, und mittelst Substitution dieses Werthes in II.

V. $s = \frac{z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1}$, oder $s\left(\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1\right) = z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - a$.

Jede dieser 5 Gleichungen enthält 4 verschiedene Größen, und demnach kann jede derselben durch die drey andern ausgedrückt werden, wodurch man 20 verschiedene Gleichungen erhält, wie §. 213. Die Aufsuchung dieser Gleichungen überlassen wir dem Fleiße des Anfängers. Fünf Größen geben 10 verschiedene Verbindungen zu zweyen, und demnach sind auch hier wieder 10 verschiedene Fälle möglich, welche aus dem hier beygefügten Schema zu ersehen sind.

1) Es sind gegeben a, e, n, und es werden gesucht z, s;
2) » » » a, e, z, » » » » n, s;
3) » » » a, e, s, » » » » n, z;
4) » » » a, n, z, » » » » e, s;
5) » » » a, n, s, » » » » e, z;
6) » » » a, z, s, » » » » n, e;
7) » » » n, e, z, » » » » a, s;
8) » » » n, e, s, » » » » a, z;
9) » » » e, z, s, » » » » a, n;
10) » » » n, z, s, » » » » a, e;

Hier bezeichnet a das erste, z das letzte Glied, e den Exponenten, n die Anzahl der Glieder und s die Summe der geometrischen Progression.

Digitized by Google

§. 220.

Zwischen zwey gegebenen Zahlen a und b eine bestimmte Anzahl, z. B. m, mittlere geometrische Proportionalzahlen einzuschalten.

Weil hier eine geometrische Progression gebildet werden soll, worin a das erste, b das letzte Glied ist, und worin m die Anzahl der Glieder, a und b nicht mitgerechnet, also $m+2$ die Anzahl aller Glieder seyn soll, so kommt es lediglich darauf an, den Exponenten e der Reihe zu bestimmen, weil dann die Progression selbst gebildet werden kann (§. 216. 5.).

Nun ist aber allgemein $z = a e^{n-1}$, und da hier $z = b$, und $n = m + 2$, also $n - 1 = m + 1$ ist, so ist durch Substitution

$b = a e^{m+1}$, woraus $e = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ gefunden wird.

Es ist demnach die gesuchte Reihe diese:

$$\div\ a : a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^3} : \ldots .$$
$$: a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}},$$

oder $\div\ a : \sqrt[m+1]{a^m b} : \sqrt[m+1]{a^{m-1} b^2} : \sqrt[m+1]{a^{m-2} b^3} : \ldots \sqrt[m+1]{a b^m} : b$ (§. 129. 3. 3).

Sollen z. B. zwischen 7 und 1701 vier mittlere geometrische Proportionalzahlen eingeschaltet (interpolirt) werden; so findet man

$e = \sqrt[5]{\frac{1701}{7}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$, und erhält demnach die Progression: $\div\ 3 : 21 : 63 : 189 : 567 : 1701$.

Anwendung der geometrischen Progressionen.

§. 221.

Aufgabe.

Es legt jemand ein Kapital a zu p Procenten auf Zins vom Zinse an, und vermehrt diesen Fond jährlich um das neue Capital b unter denselben Bedingungen, d. h. er schlägt nicht allein den jährlichen Zins jedes Mahl zum Capitale, sondern gibt überdieß zu dieser

Digitized by Google

Summe jährlich ein neues Capital b zu denselben Procenten, ebenfalls auf Zins vom Zinse. Wie hoch belauft sich das Vermögen dieses Mannes nach n Jahren?

Auflösung.

Das Stamm-Capital a wird nach n Jahren $= s = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n =$

$= a\,(1+\pi)^n$, wenn man der Kürze wegen $\frac{p}{100} = \pi$ setzt, (S. 389).

Der erste Zuschuß b liegt nur $(n-1)$ Jahre, das zweyte b aber $(n-2)$, das dritte $(n-3)$ Jahre auf Zinseszinsen, und so steht ein jedes folgende b um 1 Jahr weniger aus, als das unmittelbar vorhergehende, so daß das letzte b, oder das am Ende des nten Jahres zugeschossene b gar keine Zinsen bringt, weil wir nur die Summe für n Jahre suchen.

Aus dem

ersten b wird demnach nach $(n-1)$ Jahren die Summe $b(1+\pi)^{n-1}$

zweyten » » » $(n-2)$ » » » $b(1+\pi)^{n-2}$,

dritten » » » $(n-3)$ » » » $b(1+\pi)^{n-3}$,

vierten » » » $(n-4)$ » » » $b(1+\pi)^{n-4}$,

. . . . . .

$(n-2)^{ten}$ » » » 2 » » » $b(1+\pi)^2$,

$(n-1)^{ten}$ » » » 1 » » » $b(1+\pi)$,

n^{ten} » » » 0 » » » $b(1+\pi)^0 = b$

(§. 300. Aufg. 5.).

Bezeichnen wir nun die ganze aus diesen successiven Zuschüssen entstandene Summe durch s', so finden wir

$$s' = b(1+\pi)^{n-1} + b(1+\pi)^{n-2} + b(1+\pi)^{n-3} + \ldots$$
$$+ b(1+\pi)^2 + b(1+\pi) + b,$$
$$= b + b(1+\pi) + b(1+\pi)^2 + (1+\pi)^3 + \ldots$$
$$+ b(1+\pi)^{n-3} + b(1+\pi)^{n-2} b(1+\pi)^{n-1},$$

und wir sehen, daß dieser Ausdruck die Summe einer geometrischen Progression ist, weßhalb (nach §. 218.)

$$s' = \frac{b[(1+\pi)^n - 1]}{(1+\pi) - 1} = \frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1].$$

Es ist demnach die gesuchte Summe

$$S = s + s' = a(1+\pi)^n + \frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1).$$

Digitized by Google

Würde man vom Stamm-Capitale und den ihm entsprechenden Zinsen jährlich die Summe b hinwegnehmen, statt b zuzuschießen, so dürfte man nur b, mithin auch s' negativ setzen. Es ist nähmlich für diesen Fall

$$S = s - s' = a(1+\pi)^n - \frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1].$$

Es ist also ganz allgemein:

$$S = s \pm s' = a(1+\pi)^n \pm \frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1],$$

oder $S = a(1+\pi)^n \pm \frac{b}{\pi}(1+\pi)^n \mp \frac{b}{\pi} = (1+\pi)^n\left(a \pm \frac{b}{\pi}\right) \pm \frac{b}{\pi}$,

d. i. I. $S = \frac{(1+\pi)^n (a\pi \pm b) \mp b}{\pi}$.

Ist $b = a$, so findet man dann

II. $S = \frac{(1+\pi)^n (a\pi \pm a) \mp a}{\pi} = \frac{(1+\pi)^n (\pi \pm 1)a \mp a}{\pi} =$

$$= \frac{a}{\pi}[(1+\pi)^n (\pm 1 + \pi) \mp 1].$$

Nimmt man endlich $b(1+\pi)$ als letztes Glied der oben angeführten Progression an, d. i. kommt am Ende des nten Jahres kein b mehr hinzu; so ist

$$S = (1+\pi)^n\left(a \pm \frac{b}{\pi}\right) \mp \frac{b}{\pi} - b = (1+\pi)^n\left(a \pm \frac{b}{\pi}\right) + \frac{\mp b - b\pi}{\pi}$$

oder III. $S = (1+\pi)^n\left(\frac{a\pi \pm b}{\pi}\right) + \frac{-b(\pm 1 + \pi)}{\pi} =$

$$= (1+\pi)^n\left(\frac{a\pi \pm b}{\pi}\right) - \frac{b}{\pi}(\pi \pm 1),$$

und für $b = a$, erhalten wir

$$S = (1+\pi)^n\left(\frac{\pi \pm 1}{\pi}\right) a - \frac{a}{\pi}(\pi \pm 1) =$$

$$= \frac{a}{\pi}[(1+\pi)^n (\pm 1 + \pi) - (\pm 1 + \pi)],$$

oder IV. $S = \frac{a(\pm 1 + \pi)}{\pi}[(1+\pi)^n - 1]$.

Die Formeln II. und IV. finden nur dann vorzüglich ihre Anwendung, wenn b positiv ist, d. i. wenn die obern Zeichen genommen werden müssen, und für diesen Fall erhalten wir

statt II. die Gleichung A) $S = \frac{a}{\pi}[(1+\pi)^{n+1} - 1]$, und

» IV. » » B) $S = \frac{a(1+\pi)}{\pi}[(1+\pi)^n - 1]$.

Digitized by Google

Zusatz.

Auf den hier abgeleiteten Formeln beruht zunächst die Berechnung der Renten. Wenn nähmlich A an B ein Capital a auf Zins vom Zinse unter der Bedingung gibt, daß letzterer das erhaltene Capital a sammt den erwachsenden Zinsen durch die jährliche Abtragung der Summe b in n Jahren abzahlt, so heißt die Summe b die Annuität, Jahr- oder Zeitrente, und das Capital a der Einsatz (mise). Der Gläubiger A heißt Rentirer (Rentenier), welcher die Rente empfängt, der Schuldner B aber, welcher die Mise erhält, und die Reute zu zahlen hat, heißt Unternehmer (Entrepreneur), welcher nach dem Ableben des A die Rente an dessen Erben noch bis zur Verfallzeit zu zahlen verbunden ist. Der hierüber bestehende Vertrag heißt der Annuitäts-Vertrag.

Von der Annuität unterscheidet sich die Leib- und Lebensrente, denn der hierüber bestehende Vertrag verliert seine Gültigkeit mit dem erfolgten Tode des Rentirers, der Annuitäts-Vertrag dagegen behält seine Rechtsgültigkeit bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld. Man kann bey der Schließung des Vertrages die Leibrente als eine Zeitrente betrachten, indem man die Wahrscheinlichkeit für die Lebensdauer des Rentirers nach den Mortalitäts-Tabellen beurtheilt, wobey vorzüglich die individuelle Körperbeschaffenheit des Rentirers, so wie die mehrjährigen Sterbe-Listen für den Aufenthaltsort desselben zu berücksichtigen sind.

Zur Erläuterung unserer Formeln mögen folgende Beyspiele dienen.

Beyspiel 1. Ein Capital von 12000 Gulden steht auf Zinseszinsen zu 5 Procent, und wird am Ende eines jeden Jahres noch um 1000 fl. vermehrt. Wie groß ist das Capital nach 10 Jahren?

Dieses Beyspiel ist nach der Formel $S = \frac{(1+\pi)^n (a\pi + b) - b}{\pi}$ zu rechnen, wo $a = 12000$, $b = 1000$, $\pi = \frac{p}{100} = \frac{5}{100} = 0{\cdot}05$, also $1 + \pi = 1{\cdot}05$, und $n = 10$ ist. Es ist demnach

$$S = \frac{(1{\cdot}05)^{10} (12000 \,.\, 0{\cdot}05 + 1000) - 1000}{0{\cdot}05}$$

$$= \frac{(1{\cdot}05)^{10} (1600) - 1000}{0{\cdot}05} = (1{\cdot}05)^{10} \,.\, 32000 - 20000.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes werden wir logarithmisch behandeln. Es ist nähmlich

Digitized by Google

$$\log.\,(1{\cdot}05)^{10}.32000 = 10.\log.1{\cdot}05 + \log.32000 =$$
$$= \left\{\begin{array}{r} 0{\cdot}2118930 \\ +\,4{\cdot}5051500 \end{array}\right\}$$
$$= \quad 4{\cdot}7170430 = \log.\,52124{\cdot}64 \text{ sehr nahe,}$$
$$-\,377$$
$$53.$$

folglich ist $S = 52124{\cdot}64 - 20000 = 32124{\cdot}64$ fl. beynahe.

Beyspiel 2. Es schuldet jemand an A die Summe von 18000 Thaler zu 5 Procent verzinslich, und zahlt jährlich 1200 Thaler an Capital und Interessen: wie viel wird A nach 20 Jahren noch zu fordern haben?

Die Formel $S = \frac{(1+\pi)^n(a\,\pi - b)+b}{\pi}$ enthält die Antwort auf unsere Frage, und es bezeichnet demnach hier S noch den schuldigen Rest; dieser ist nähmlich für unsern bestimmten Fall

$$S = \frac{(1{\cdot}05)^{20}(18000.0{\cdot}05 - 1200)+1200}{0{\cdot}05} = \frac{(1{\cdot}05)^{20}\times -300+1200}{0{\cdot}05},$$

oder $S = \frac{-300.(1{\cdot}05)^{20}}{0{\cdot}05} + \frac{1200}{0{\cdot}05} = -6000\,(1{\cdot}05)^{20} + 24000.$

Nun ist aber $\log.\,6000\,(1{\cdot}05)^{20} = \log.\,6000 + 20\log.1{\cdot}05$

$$= \left\{\begin{array}{r} 3{\cdot}7781513 \\ +\,0{\cdot}4237860 \end{array}\right\}$$
$$4{\cdot}2019373 = \log.\,15919{\cdot}79$$
$$9158$$
$$215$$
$$-\,190$$
$$25{\cdot}0$$

folglich ist $S = -15919{\cdot}79 + 24000 = 8080{\cdot}21$ Thaler sehr nahe.

Zusatz.

Hätte man gefragt, wie viel A nach 30 Jahren noch zu fordern habe, so hätte man

$$S = -6000\,(1{\cdot}05)^{30} + 24000 \text{ gefunden,}$$

und weil $\log.\,6000 + 30\log.1{\cdot}05 = 4{\cdot}4138303 = \log.\,25931{\cdot}66$, so wäre $S = -25931{\cdot}66 + 24000 = -1931{\cdot}66$ Thlr. d. i. es wäre dann A Schuldner geworden, und müßte die Summe von 1931·66 Thaler seinem frühern Schuldner zurück zahlen.

Digitized by Google

Beyspiel 3. Es hat jemand 6000 Gulden zu 5 Procent auf Zins vom Zinse angelegt, vermehrte sein Capital jährlich um 500 fl. und erhielt nach einer bestimmten Zeit 16062 Gulden, 24 kr. zurück bezahlt. Wie lange war das Capital ausgestanden?

Aus der Gleichung $S = \frac{(1+\pi)^n (a\pi + b) - b}{\pi}$ die für unsern bestimmten Fall übergeht in 16062 fl. 24 kr. $= 16062{\cdot}2 =$

$$= \frac{(1{\cdot}05)^n (6000 \times 0{\cdot}05 + 500) - 500}{0{\cdot}05} = (1{\cdot}05)^n . 16000 - 10000,$$

folgt $(1{\cdot}05)^n . 16000 = 16062{\cdot}2 + 10000 = 26062{\cdot}2,$

oder $(1{\cdot}05)^n = \frac{26062{\cdot}2}{16000} = 1{\cdot}6288875$, mithin

$n \log. (1{\cdot}05) = \log. 1{\cdot}6288875$, oder

$n = \log. 1{\cdot}6288875 : \log. 1{\cdot}05,$

$= 0{\cdot}2118911 : 0{\cdot}0211893 = 10$ sehr nahe,

nähmlich das Capital stand 10 Jahre beynahe aus.

Beyspiel 4. Jemand hat ein Capital von 100000 Gulden zu 5 Procent auf Zinsen stehen, und läßt sich an Capital und Interessen jährlich 6000 Gulden abzahlen, um damit seine Bedürfnisse zu bestreiten. Nach wie viel Jahren wird dieser Mann, wenn er fortfährt, einen solchen großen Aufwand zu machen, ein Bettler werden?

Hier muß $S = \frac{(1+\pi)^n (a\pi - b) + b}{\pi} = 0$ werden, also auch

$(1 + \pi)^n (a\pi - b) + b = 0$, daher

$(1+\pi)^n = -\frac{b}{a\pi - b} = \frac{b}{b - a\pi}$, und

$n \log. (1+\pi) = \log. b - \log. (b - a\pi)$, also

$$n = \frac{\log. b - \log. (b - a\pi)}{\log. (1+\pi)} = \frac{\log. 6000 - \log. (6000 - 100000 . 0{\cdot}05)}{\log. 1{\cdot}05};$$

oder $n = \frac{\log. 6000 - \log. 1000}{\log. 1{\cdot}05} = \frac{\log. 6}{\log. 1{\cdot}05} =$

$= 0{\cdot}7781{,}513 : 0{\cdot}02{,}1{,}1{,}8{,}93 = 36{\cdot}72$

1424

153

25

nähmlich es ist $n = 36{\cdot}72$ Jahren $= 36$ Jahr. 8 Mon. 19 Tagen sehr nahe.

Beyspiel 5. A hat von B ein Haus gekauft, mit der Verpflichtung, 7 Jahre nach einander mit Anfang eines jeden Jahres eine ge-

Digitized by Google

wisse Summe zu zahlen. B stirbt plötzlich, und A kommt mit den Erben des B überein, mit Anfang des siebenten Jahres zur gänzlichen Tilgung des Kaufschillings nebst 4 Procent Zinsen die Summe von 31593 Thaler auf ein Mahl zu zahlen. Wie hoch wurde jedes Ratum angenommen, und wie theuer hat A das Haus gekauft?

Diese Aufgabe ist einerley mit folgender: Welches Capital muß (auf Zins vom Zinse) angelegt werden, damit es, zu 4 Procent gerechnet, binnen 6 Jahren zur Summe von 31593 Thaler emporsteige, vorausgesetzt, daß nicht allein die Zinsen zum Capitale geschlagen werden, sondern daß diese Summe jährlich noch um das ursprüngliche Capital vermehrt wird?

Von dem letzten Ratum, nähmlich von den 4000 Thalern, welche am Ende des sechsten oder im Anfange des siebenten Jahres gezahlt werden, kommen keine Zinsen mehr in Anschlag, folglich muß die Rechnung nach der Formel II., nähmlich nach der Formel

$$S = \frac{(1+\pi)^n(\pi+1)a-a}{\pi} = \frac{a}{\pi}[(1+\pi)^{n+1}-1]$$

durchgeführt werden. Substituiren wir in dieser Formel die oben gegebenen Werthe, so erhalten wir die Gleichung:

$$31593 = \frac{a}{0{\cdot}04}[(1{\cdot}04)^7-1], \text{ woraus}$$

$$a = \frac{31593\times 0{\cdot}04}{(1{\cdot}04)^7-1} = \frac{1263{\cdot}72}{(1{\cdot}04)^7-1} \text{ gefunden wird.}$$

Nun ist $\log.(1{\cdot}04)^7 = 7\,.\log.1{\cdot}04 = 7\times 0{\cdot}0170333 =$

$$= 0{\cdot}1192331 = \log.1{\cdot}3159311 \frac{2229}{102} 30,$$

nähmlich $(1{\cdot}04)^7 = 1{\cdot}3159311$ näherungsweise,

mithin ist $a = \frac{1263{\cdot}72}{0{\cdot}3159311}$ und

$$\log. a = \log. 1263{\cdot}72 - \log. 0{\cdot}3159311.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 3{\cdot}1016509 \\ 0{\cdot}4995923-1 \end{array}\right\}$$

$$\log. a = 3{\cdot}6020586 = \log. 3999{\cdot}99 \frac{491}{95},$$

also $a = 4000$ ohne merklichen Fehler.

Digitized by Google

Um die zweyte Frage, wie theuer A das Haus gekauft habe, zu beantworten, dürfen wir in der Formel I. nur $b = o$ setzen, oder jene Frage so stellen: Wie groß muß ein Capital seyn, welches zu 4 Procent auf Zins vom Zinse angelegt, in 6 Jahren die Summe von 31593 Thaler erreicht? Oder auch: Wie viel ist die Summe von 31593 Thaler, die erst nach 6 Jahren zahlbar sind, jetzt werth?

Wir finden aus der Formel $S = a(1+\pi)^n$ hier

$$a = \frac{s}{(1+\pi)^n} = \frac{31593}{(1{\cdot}04)^6}, \text{ oder}$$

$$\log. a = \log. 31593 - 6 \log. 1{\cdot}04 = \left\{ \begin{matrix} 4{\cdot}4995909 \\ - \ 0{\cdot}1021998 \end{matrix} \right\} =$$

$$\log. a = 4{\cdot}3973911 = \log. 24968{\cdot}42$$

$$3838$$

$$73.$$

Also war der eigentliche Einkaufspreis 24968·42 Thaler.

Beyspiel 6. A hat aus irgend einem Fonde eine jährliche Rente von 3500 Gulden $= b$ noch 8 Jahre hindurch zu beziehen, und will dieselbe verkaufen, weil er seinen Aufenthaltsort ändert. Wie viel beträgt der baare Werth jener Rente, wenn 4 Procent gerechnet werden?

Zur richtigen Auflösung dieser Aufgabe leitet uns folgende Betrachtung.

Da der erste Rentenbetrag erst am Ende des ersten Jahres erhoben werden kann, so können von demselben bis zur Auflösung des Annuitäts-Vertrages nur die Interessen für sieben Jahre in Rechnung gebracht werden, mithin für das zweyte Ratum die Interessen auf 6 Jahre, für das dritte auf 5 Jahre, u. s. w. und demnach für das letzte oder achte Ratum kommen gar keine Zinsen mehr in Anschlag. Würde also A seine Rente jene 8 Jahre hindurch auf Zins vom Zinse liegen lassen, so hätte er am Ende des achten Jahres eine Forderung von $b.(1+\pi)^7 + b(1+\pi)^6 + b(1+\pi)^5 + \ldots +$

$+ b(1+\pi) + b = \frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1]$ Gulden zu machen.

Denselben Ausdruck erhalten wir auch, wenn wir in der Formel I. $a = o$ setzen (?).

Da nun der Werth jenes Betrages im Anfange des ersten Jahres gesucht wird, so haben wir die Frage zu beantworten: Wie groß muß ein Capital seyn, welches zu 4 Procent auf Zins vom Zinse angelegt, in 8 Jahren die Summe von

$\frac{b}{\pi}[(1+\pi)^n - 1] = \frac{3500}{0{\cdot}04}[(1{\cdot}04)^8 - 1] = 87500[(1{\cdot}04)^8 - 1]$

Gulden erreicht? — Setzen wir den gesuchten Werth $= x$, so muß $x\,(1{\cdot}04)^8 = 87500\,[(1{\cdot}04)^8 - 1]$ werden, denn der Werth des Capitales x ist nach 8 Jahren $= x\,(1{\cdot}04)^8$, wenn 4 % gerechnet werden. Aus dieser Gleichung finden wir

$$x = \frac{87500\,[(1{\cdot}04)^8 - 1]}{(1{\cdot}04)^8}.$$

Nun ist $\log. 1{\cdot}04^8 = 8.\log. 1{\cdot}04 = 0{\cdot}1362664 = \log. 1{\cdot}368568$,

mithin ist $x = \frac{87500 \,.\, 0{\cdot}368568}{1{\cdot}368568}$, und

$\log. x = \log. 87500 + \log. 0{\cdot}368568 - \log. 1{\cdot}368568$, aber

$\log. \quad 87500 = 4{\cdot}9420081$

$\log. \; 0\;368568 = 0{\cdot}5665176 - 1$

$+ \text{dec. Erg. } \log. 1{\cdot}368568 = 9{\cdot}8637336 - 10$

also $\log. x = 4{\cdot}3722593 = \log. 23564{\cdot}56$

2490

103

92

11·0,

d. i. der Werth jener Rente ist $x = 23564{\cdot}56$ fl.

Beyspiel 7. A überließ seinem Freunde B einen Meierhof um den baaren Werth von 8400 Thaler, und kam dann mit B überein, daß er diese Summe in sieben jährlichen Terminen, und zwar in gleichen Raten abtragen soll, so nähmlich, daß er am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe zu bezahlen habe. Wie groß wird jedes solche Ratum seyn, wenn 4 Procente gerechnet werden?

Da der Kaufschilling von 8400 Thaler, wenn er gleich bezahlt wird, zu 4 % auf Zins vom Zinse angelegt, in 7 Jahren die Größe $8400\,(1{\cdot}04)^7$ erreicht, die Ratenbezahlung aber unter denselben Bedingungen nur den Werth von $s' = \frac{b}{\pi}[(1{\cdot}04)^7 - 1]$ erhalten (weil $a = 0$), so erhalten wir für die Beantwortung unserer Frage folgende Gleichung:

$$S = s' = \frac{b}{0{\cdot}04}\,[(1{\cdot}04)^7 - 1],$$

wo $S = 8400\,(1{\cdot}04)^7$ (weil $\pi = \frac{p}{100} = \frac{4}{100} = 0{\cdot}04$) und $n = 7$.

Digitized by Google

Demnach ist $8400 . (1{\cdot}04)^7 = \frac{b}{0{\cdot}04}\,[(1{\cdot}04)^7 - 1]$, und hieraus

folgt $b = \frac{0{\cdot}04 . 8400\,(1{\cdot}04)^7}{(1{\cdot}04)^7 - 1} = \frac{336\,(1{\cdot}04)^7}{0{\cdot}315931}$,

denn $\log.(1{\cdot}04)^7 = 7 . \log. 1{\cdot}04 = 0{\cdot}1192331 = \log. 1{\cdot}315931$,

daher ist $(1{\cdot}04)^7 - 1 = 0{\cdot}315931$.

Also ist $\log. b = \log. 336 + 7 \log. 1{\cdot}04 - \log. 0{\cdot}315931$,

und weil

$$\begin{aligned} \log.\ 336 &= 2{\cdot}5263393 \\ 7 \log.\ 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}1192331 \\ +\ \text{dec. Erg. log. } 0{\cdot}315931 &= 10{\cdot}5004077 - 10 \\ \text{mithin } \log. b &= 3{\cdot}1459801 = \log. 1399{\cdot}523 \end{aligned}$$

9729

72,

folglich ist $b = 1399{\cdot}523$ Thaler $= 1399$ Thlr. 47 kr. sehr nahe.

Beyspiel 8. Ein Menschenfreund übergab einem soliden Handelshause 34580 Thaler, mit der Bestimmung, dem Invaliden B, welcher seinem Vaterlande höchst wichtige Dienste geleistet hat, jährlich 2000 Thaler auszuzahlen.

Wie lange kann B diese Rente beziehen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Raisonnirt man hier auf ähnliche Art, wie in der vorigen Aufgabe, so erhält man folgende Gleichung:

$$34580\,(1{\cdot}04)^n = \frac{b}{\pi}\,[(1{\cdot}04)^n - 1] = \frac{2000}{0{\cdot}04}\,[(1{\cdot}04)^n - 1] =$$

$$= 50000\,[(1{\cdot}04)^n - 1],$$

oder $34580\,(1{\cdot}04)^n = 50000\,(1{\cdot}04)^n - 50000$,

also $50000 = (1{\cdot}04)^n . (50000 - 34580) = (1{\cdot}04)^n . 15420$,

und $(1{\cdot}04)^n = \frac{50000}{15420} = \frac{5000}{1542}$,

demnach $n \log. (1.04) = \log. 5000 - \log. 1542$,

und $n = \frac{\log. 5000 - \log. 1542}{\log. 1{\cdot}04}$.

Weil nun $\log. 5000 = 3{\cdot}6989700$

$- \log. 1542 = -\ 3{\cdot}1880844$

$\text{Diff.} = 0{\cdot}5108856$

und $\log. 1{\cdot}04 = 0{\cdot}0170333$,

so ist $n = \frac{0{\cdot}5108856}{0{\cdot}0170333} = \frac{5108856}{170333}$,

Digitized by Google

also $\log. n = \log. 5108856 - \log. 170333$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 6{\cdot}7083237 \\ -\ 5{\cdot}2312988 \end{array} \right\}$$

$$\log. n = 1{\cdot}4770249 = \log. 29{\cdot}99334$$

$$\frac{199}{50},$$

mithin $n = 29{\cdot}99334$ näherungsweise, und demnach kann B die jährliche Rente von 2000 Thalern beynahe 30 Jahre ansprechen.

§. 222.

Aufgabe.

Ein Schuldner kommt mit seinem Gläubiger überein, die ihm schuldige Summe von 1295 Thalern, die er unmöglich auf ein Mahl entrichten kann, in monathlichen Terminen abzutragen, und zwar den ersten Monath 60 Thaler, im zweyten 65 Thaler, und so in jedem folgenden Monathe immer um 5 Thaler mehr als im vorhergehenden. In wie viel Monathen wird der Schuldner jenen ganzen Betrag saldirt haben? und wie viel hat er im letzten Monathe zu entrichten?

Auflösung.

Der Schuldner entrichtet in den auf einander folgenden Monathen die Summen: 60, 65, 70, 75, ... welche eine arithmetische Progression bilden, in welcher $a = 60$, $s = 1295$ und $\delta = 5$ ist. Es ist demnach (nach Form. 14. §. 213.)

$$n = \frac{-(2a-\delta) \pm \sqrt{(2a-\delta)^2+8\delta s}}{2\delta} = \frac{-(120-5) \pm \sqrt{(120-5)^2+8.5.1295}}{10}$$

oder $n = \frac{-115 \pm \sqrt{(115)^2+51800}}{10} = \frac{-115 \pm \sqrt{65025}}{10} = \frac{-115 \pm 255}{10}$,

und da hier nur der positive Werth genommen werden kann (?), so ist

$$n = \frac{-115+255}{10} = \frac{140}{10} = 14, \text{ und}$$

$l = a + (n-1)\delta = 60 + (14-1)5 = 60 + 13.5 = 60+65 = 125$,

d. h. im 14ten Monathe hat der Schuldner 125 Thaler zu bezahlen, und dann ist seine ganze Schuld getilgt.

Übrigens hätte man l auch (nach §. 213. Form. 12.) unabhängig von n aus den gegebenen Größen a, s, δ unmittelbar berechnen können.

Digitized by Google

§. 223.

Aufgabe.

Man bestimme vier Zahlen, die eine geometrische Progression, und vier Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, von der Beschaffenheit aber, daß die Differenzen zwischen den Gliedern der ersten und den gleichnahmigen Gliedern der zweyten Reihe der Ordnung nach die Zahlen 3, 9, 231 und 1965 werden. Wie heißen diese acht Zahlen?

Auflösung.

Man setze die erste der stätigen geometrischen Proportional-Zahlen $= x$, den Exponenten der Progression y; ferner das erste Glied der arithmetischen Reihe $= v$ und die Differenz derselben $= w$; so hat man die Progressionen:

$$\div x : xy : xy^2 : xy^3$$

und $$\div v \div v+w \div v+2w \div v+3w,$$

und der Aufgabe gemäß erhält man die Gleichungen:

I. $x - v = 3$;

II. $xy - v - w = 9$;

III. $xy^2 - v - 2w = 231$.

IV. $xy^3 - v - 3w = 1965$.

Aus I. folgt $v = x - 3$, und dieser Werth in den folgenden Gleichungen gesetzt, gibt nach gehöriger Reduction:

a) $xy - x - w = 6$,

b) $xy^2 - x - 2w = 228$,

c) $xy^3 - x - 3w = 1962$.

Nun ziehe man das Doppelte der ersten Gleichung a) von b) ab, und die Summe der beyden Gleichungen a) und b) von der Gleichung c); so erhält man:

A) $xy^2 - 2xy + x = 216$, oder $x(y^2 - 2y + 1) = x(y-1)^2 = 216$,

und B) $xy^3 - xy^2 - xy + x = 1728$,

oder $x(y^3 - y^2 - y + 1) = x(y-1)^2(y+1) = 1728$,

mithin, wenn man B) durch A) dividirt.

$$\frac{x(y-1)^2(y+1)}{x(y-1)^2} = y + 1 = 8, \text{ also } y = 7.$$

Dieser Werth in A) gesetzt, gibt $x(7-1)^2 = 216$, oder $x \cdot 36 = 216$, also $x = 6$, und demnach erhalten wir

Digitized by Google

$v = x - 3 = 6 - 3 = 3$, und aus II.

$w = xy - v - 9 = 6.7 - 3 - 9 = 42 - 12 = 30$.

Die gesuchten Zahlen sind daher folgende:

$$\div\ 6 : 42 : 294 : 2058$$

und $\div\ 3 \div 33 \div 63 \div 93$.

§. 224.

Aufgabe.

Man zerlege jedes Glied einer geometrischen Progression in m solche Theile, damit alle diese Theile wieder in einer zusammenhängenden Progression stehen, und folglich eine Reihe von m Mahl so viel Gliedern erhalten werde, als die gegebene Progression hat.

Auflösung.

Die gegebene Progression sey

$$\div\ a : ae : ae^2 : ae^3 : ae^4 : \ldots : ae^{n-1},$$

das erste Glied der gesuchten Reihe sey $= x$, und der Exponent derselben $= y$; also

$$\div\ x : xy : xy^2 : \ldots : xy^{m-1} : xy^m : xy^{m+1} \ldots$$
$$: xy^{2m-1} : xy^{2m} : xy^{2m+1} \ldots : xy^{3m-1} : xy^{3m} : \ldots.$$

so ist den Bedingungen der Aufgabe zu Folge

1) $x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1} = a$,

2) $xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = ae$,

oder $y^m (x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1}) = ae$.

Dividirt man diese letzte Gleichung durch die erste, so erhält man

$$\frac{y^m (x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1})}{x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1}} = y^m = \frac{ae}{a} = e, \text{ also } y = \sqrt[m]{e}.$$

Nun folgt ferner aus der ersten Gleichung

$$x (1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^{m-1}) = a,$$

oder (nach §. 218)

$$x \cdot \frac{y^m - 1}{y - 1} = a, \text{ also } x = \frac{a (y-1)}{y^m - 1} = \frac{a [\sqrt[m]{e} - 1]}{e - 1},$$

und demnach ist die gesuchte Reihe folgende:

$$\div\ \frac{a (\sqrt[m]{e} - 1)}{e - 1} : \frac{a (\sqrt[m]{e} - 1) \sqrt[m]{e}}{e - 1} : \frac{a (\sqrt[m]{e} - 1) \sqrt[m]{e^2}}{e - 1} : \frac{a (\sqrt[m]{e} - 1) \sqrt[m]{e^3}}{e - 1} : \ldots. \quad (A).$$

Digitized by Google

Beyspiel. Man zerlege jedes Glied der Reihe

$$\div 3 : 96 : 3072 : 98304 : \ldots.$$

in fünf Theile, so daß diese wieder eine geometrische Progression bilden.

Hier ist $a = 3$, $e = 32$ und $m = 5$, also $y = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$, und $x = \frac{3(\sqrt[5]{32}-1)}{32-1} = \frac{3}{31}$; folglich ist die gesuchte Progression folgende:

$$\div \frac{3}{31} : \frac{6}{31} : \frac{12}{31} : \frac{24}{31} : \frac{48}{31} : \frac{96}{31} : \ldots.$$

Zusatz.

Sucht man die Summe s von n Gliedern der Reihe A; so findet man (nach §. 218)

$$s = a\left(\frac{\sqrt[m]{e}-1}{e-1}\right)\left(\frac{(\sqrt[m]{e})^n-1}{\sqrt[m]{e}-1}\right) = a \cdot \frac{\sqrt[m]{e^n}-1}{e-1} = \frac{a(\sqrt[n]{e^m}-1)}{e-1}.$$

Dieser Ausdruck wird auch erhalten, wenn man in der allgemeinen Summenformel für geometrische Progressionen (§. 218.) $\frac{n}{m}$ statt n setzt.

So ist z. B. im vorigen Beyspiele die Summe der 10 ersten Glieder

$$s = \frac{\frac{3}{31}(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{3(1023)}{31} = \frac{3069}{31} = 99,$$

und wenn wir $\frac{n}{m} = \frac{10}{5} = 2$ Glieder der gegebenen Progression $\div 3 : 96 : 3072 : \ldots$ summiren, so erhalten wir ebenfalls

$$s = \frac{a(\sqrt[n]{e^m}-1)}{e-1} = \frac{3(32^{\frac{10}{5}}-1)}{32-1} = \frac{3(32^2-1)}{31} = \frac{3}{31}[(2^5)^2-1] =$$

$$= \frac{3}{31}(2^{10}-1) = \frac{3}{31} \cdot 1023 = 99 \text{ wie vorhin.}$$

Ist also in der allgemeinen Summenformel für geometrische Progressionen n eine gebrochene Zahl, z. B. $n = \frac{m}{p}$; so heißt dieß nichts anders, als man soll jedes Glied der gegebenen Reihe in p Theile zer-

legen, so daß diese wieder eine geometrische Progression bilden, und von der so entstandenen Reihe m Glieder summiren.

Beyspiel. A kaufte dem B einen prächtigen silbernen Leuchter auf folgende Art ab. Für das erste Loth zahlte er 6 fr., für das zweyte 12 fr, und so für jedes folgende Loth das Doppelte, was er für das vorhergehende zahlte. Wenn nun der Leuchter 10 Loth 1 Quentchen $= 10^1/_4$ Loth wog, wie viel mußte A zahlen?

Hier ist die Reihe: $\div 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots$, also $a = 6$, $e = 2$, und $\frac{n}{m} = 10\frac{1}{4} = \frac{41}{4}$, mithin ist die verlangte Summe

$$s = \frac{a\,(e^{\frac{n}{m}} - 1)}{e - 1} = \frac{6\,(2^{\frac{41}{4}} - 1)}{2 - 1} = 6\,(\sqrt[4]{2^{41}} - 1).$$

Nun ist aber

$$\log.\sqrt[4]{2^{41}} = \frac{41 \,.\, \log. 2}{4} = \frac{41.03010300}{4} = \frac{12.3422300}{4}$$

$$= 3.0855575 = \log. 1217.748$$

5403

172

— 143

29.0,

also $\sqrt[4]{2^{41}} = 1217.748$ näherungsweise, und demnach

$s = 6\,(1217.748 - 1) = 6 \,.\, 1216.748$ fr. $= 121.6748$ fl.

oder $s = 121$ fl. $40^1/_2$ fr. beynahe.

§. 225.

Aufgabe.

Die Summe einer geometrischen Progression ist $= 40\frac{19}{20}$, die Summe der vier ersten Glieder $= \frac{3}{20}$ und die Summe der vier letzten Glieder $= 38\frac{2}{5}$. Welche Zahlen bilden diese Progression, und wie viel Glieder hat die ganze Reihe?

Digitized by Google

Auflösung.

Bezeichnen wir das erste Glied der gesuchten Reihe mit x, ihren Exponenten mit y und die Anzahl ihrer Glieder mit z; so ist die gesuchte Reihe folgende:

$$x : xy : xy^2 : xy^3 : \ldots : xy^{z-4} : xy^{z-3} : xy^{z-2} : xy^{z-1},$$

und wir erhalten der Aufgabe gemäß folgende Gleichungen:

1) $x + xy + xy^2 + xy^3 + \ldots + xy^{z-2} + xy^{z-1} = 40\frac{19}{20} = 40{\cdot}95.$

2) $x + xy + xy^2 + xy^3 = \frac{3}{20} = 0{\cdot}15,$

3) $xy^{z-4} + xy^{z-3} + xy^{z-2} + xy^{z-1} = 38\frac{2}{5} = 38{\cdot}4.$

Summiren wir (nach §. 218) die ersten Seiten dieser Gleichungen, so finden wir folgende Ausdrücke:

A) $x\left(\frac{y^z - 1}{y - 1}\right) = 40{\cdot}95,$

B) $x\left(\frac{y^4 - 1}{y - 1}\right) = 0{\cdot}15,$

C) $xy^{z-4}\left(\frac{y^4 - 1}{y - 1}\right) = xy^{z-4}\left(\frac{1 - y^4}{1 - y}\right) = 38{\cdot}4.$

Dividiren wir die Gleichung C) durch die Gleichung B), so erhalten wir

$y^{z-4} = 38{\cdot}4 : 0{\cdot}15 = 3840 : 15 = 256$, und hieraus folgt

$$y^z \cdot \frac{1}{y^4} = 256, \text{ oder } y^z = 256 . y^4 \ldots . (a).$$

Die Gleichung A) durch B) dividirt, gibt

$$x\left(\frac{y^z - 1}{y - 1}\right) \cdot \frac{y - 1}{x(y^4 - 1)} = 40{\cdot}95 : 0{\cdot}15 = 273,$$

oder $\frac{y^z - 1}{y^4 - 1} = 273$, und statt y^z den Werth aus (a) gesetzt, erhält man

$$\frac{256y^4 - 1}{y^4 - 1} = 273, \text{ oder } 256y^4 - 1 = 273y^4 - 273,$$

woraus $17y^4 = 272$, also $y = \sqrt[4]{\frac{272}{17}} = \sqrt[4]{16} = 2$ gefunden wird.

Digitized by Google

Setzt man nun diesen Werth in die Gleichung B), so findet man $x \cdot \frac{2^4-1}{2-1} = x \cdot 15 = 0{\cdot}15$, folglich $x = 0{\cdot}15 : 15 = 0{\cdot}01$.

Substituirt man endlich die für x und y gefundenen Werthe in A), so erhält man

$$0{\cdot}01 \left(\frac{2^z-1}{2-1}\right) = 40{\cdot}95, \text{ oder}$$

$$2^z - 1 = 40{\cdot}95 : 0{\cdot}01 = 4095, \text{ also}$$

$$2^z = 4096, \text{ und } z \log. 2 = \log. 4096,$$

mithin

$z = \log. 4096 : \log. 2 = 3{\cdot}612359 : 0{\cdot}301030 = 11{\cdot}999\ldots = 12$ ohne Fehler,

Es hat demnach die gesuchte Reihe 12 Glieder, und diese sind der Ordnung nach folgende:

$$= 0{\cdot}01 : 0{\cdot}02 : 0{\cdot}04 : 0{\cdot}08 : 0{\cdot}16 : 0{\cdot}32 : 0{\cdot}64 : 1{\cdot}28 : 2{\cdot}56 : 5{\cdot}12 : 10{\cdot}24 : 20{\cdot}48.$$

§. 226.

Aufgabe.

Es hat jemand ein Gefäß, dessen Volumen = A, und welches mit irgend einer Flüssigkeit, z. B. mit Wein angefüllt ist. Wenn man nun a Theile dieses Weines hinweg nimmt, und den Abgang mit eben so viel Wasser ersetzt; dann wieder a Theile dieser Mischung wegnimmt, das Gefäß wieder mit Wasser anfüllt, und auf diese Art fortfährt, dieselbe Quantität von der jedesmahligen Mischung hinweg zu nehmen, und das Volumen A jedes Mahl durch Wasser zu ergänzen, so entsteht die Frage, wie viel Wein noch in der Mischung, deren Menge = A bleibt, enthalten sey, wenn jene Operation n Mahl wiederhohlt wird?

Auflösung.

Wir setzen hier voraus, daß sich das nachgefüllte Wasser jedes Mahl mit dem noch vorhandenen Weine vollkommen vermische, d. h. so, daß in gleichen Theilen der Mischung gleiche Quantitäten Weines enthalten sind; also wird bey der zweyten und jeder folgenden Wegnahme der Menge a immer wieder ein Theil des hinzugesetzten Wassers hinweg genommen, und wir können auf diese Art also schließen: Es verhält sich bey der jedesmahligen Wegnahme die ganze Menge A zur

Digitized by Google

weggenommenen Menge a, wie die in der ganzen Mischung befindliche Menge Weines W sich verhält zu der Menge Weines, die in der Quantität a enthalten ist; nähmlich es ist jedes Mahl $A : a = W : x$.

Nun enthält das Gefäß nach der ersten Wegnahme nur noch $A - a = R'$ Theile reinen Weines; folglich ist $A : a = A - a : x'$, woraus $x' = \frac{a}{A}(A - a)$ gefunden wird, und es sind demnach nach der zweyten Wegnahme nur noch

$$R'' = (A-a) - x' = (A-a) - \frac{a}{A}(A-a) = (A-a)\left(1 - \frac{a}{A}\right) =$$

$$= (A-a)\left(\frac{A-a}{A}\right) = \frac{1}{A}(A-a)^2$$ Theile Wein in der Mischung vorhanden. Nun wiederhohlen wir denselben Schluß, indem wir setzen: $A : a = \frac{1}{A}(A-a)^2 : x''$, also ist $x'' = \frac{a}{A^2}(A-a)^2$, mithin ist der dritte Rest

$$R''' = \frac{1}{A}(A-a)^2 - \frac{a}{A^2}(A-a)^2 = \frac{1}{A}(A-a)^2\left(1 - \frac{a}{A}\right) =$$

$$= \frac{1}{A^2}(A-a)^3.$$

Auf dieselbe Art findet man den vierten Rest

$$R^{IV} = \frac{1}{A^3}(A-a)^4,\ R^V = \frac{1}{A^4}(A-a)^5,$$

u. s. w. und allgemein den nten Rest

$$R = \frac{1}{A^{n-1}}(A-a)^n.$$

Hieraus folgt $\log. R = n \log.(A-a) - (n-1) \log. A$.

Es sey z. B. $A = 3$ Eimern $= 120$ Maß, $a = 2$ Maß, und $n = 25$, so ist

$\log. R = 25 \log. 118 - 24 \log. 120$, und weil

$25 \log. 118 = 51{\cdot}7970500$

$-24 \log. 120 = -49{\cdot}9003488$

also $\log. R = 1{\cdot}8967012 = \log. 78{\cdot}8318$

6970

42,

so ist $R = 78{\cdot}8318$ Maß sehr nahe, d. h. so viel reiner Wein ist noch am Ende in der letzten Mischung vorhanden, und demnach enthält diese $(120 - 78{\cdot}8318)$ M. $= 41{\cdot}1682$ Maß Wasser.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Aus der Gleichung $R = \frac{1}{A^{n-1}}(A-a)^n$ folgt

$$R = \frac{A}{A^n}(A-a)^n = A\left(\frac{A-a}{A}\right)^n = A\left(1-\frac{a}{A}\right)^n.$$

Da nun immer $a < A$ seyn muß, also $\frac{a}{A} < 1$, mithin $1 - \frac{a}{A} > 0$, oder $1 - \frac{a}{A}$ immer positiv ist, so sieht man, daß auf die oben beschriebene Art der Wein nie ganz aus dem Gefäße genommen werden könne, wenn auch die Quantität a unendlich oft von der Mischung weggenommen wird; übrigens wird R immer kleiner, je größer n und je größer a wird.

Zusatz. 2.

Wenn die Maß von dem Weine, welcher Anfangs im Gefäße vorhanden war, m Kreuzer werth war, wie viel ist eine Maß der nten Mischung noch werth? — Der Werth der ganzen nten Mischung ist offenbar

$$R.m = mA\left(1-\frac{a}{A}\right)^n = \frac{m}{A^{n-1}}(A-a),$$

und weil die Menge der ganzen Mischung unverändert A bleibt, so ist, wenn wir den Werth einer Maß mit z bezeichnen, nothwendig

$A.z = mA\left(1-\frac{a}{A}\right)^n$, folglich $z = m\left(1-\frac{a}{A}\right)^n$.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Digitized by Google

Verbesserungen.

Seite		Zeile		statt	lies
»	23	»	14 v. u.	» 6475908^{3}	» 6475908^{8}
»	—	»	13 »	» 8734526	» 873526
»	—	»	13 »	» 4853294	» 485324
»	33	»	7 v. o.	» $+h$	» $-h$
»	37	»	26 »	» Das	» Da
»	40	»	15 »	» $(D-B+E)$	» $(D-B)+E$
»	—	»	22 »	» $+7-1+5$	» $+7+5$
»	41	»	13 »	» $+2c$	» $+14c$
»	42	»	5 v. u.	» $+2d$	» $-2d$
»	58	»	9 »	» $(\pm a).(+b)$	» $(\pm a).(\pm b)$
»	61	»	4 v. o.	» $+a^2x^2$	» $+a^3x^2$
»	63	»	2 »	» $(A^m B^n Cp Dq \ldots)^m$	» $(A^m B^n Cp Dq \ldots)^n$
»	—	»	24 »	» 64^{2}	» $6^{2}4$
»	—	»	25 »	» $6^{1,2}4$	» $6^{1,2}4$
»	—	»	29 »	» $6^{1,2}25$	» $6^{12}25$
»	68	»	28 »	» $+2.6.7.4$	» $2.6^{1}7.4$
»	77	»	3 »	» $3SC^{2}$	» $3SC^{2}$
»	79	»	5 v. u.	» $(4000+70+20)$	» $(4000+70^{2}+20)$
»	—	»	2 »	» $6x$	» 6^{2}
»	102	»	10 v. o.	» $\frac{60}{7}$	» $\frac{60}{4}$
»	129	»	8 v. u.	» 1732075	» 17352075
»	152	»	10 »	» 371	» 213
»	157	»	6 v. o.	» 256	» 252
»	165	»	4 »	» $\frac{-a+b}{-m+b}$	» $\frac{-a+b}{-m+n}$
»	168	»	10 »	» $\frac{4}{5}$	» $\frac{4}{15}$
»	173	»	12 »	» $\frac{ad}{bd}$	» $\frac{ad}{bc}$
»	205	»	1 v. u.	» $\frac{103}{355}$	» $\frac{103}{356}$
»	207	»	5 »	» $-a^2bc$	» $-ab^2c$
»	219	»	6 v. o.	» $b_{n,m}$	» $b^{n,m}$
»	223	»	2 v. u.	» $\sqrt{a-n}$	» $\sqrt[m]{a-n}$
»	241	»	11 v. o.	» 9^{2}	» 9^{3}

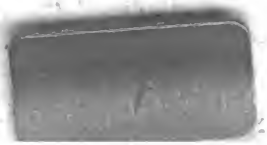
Digitized by Google

Seite		Zeile			statt		lies	
»	253	»	2 v. o.	»	$2m+1$	»	$2m-1$	
»	254	»	5	»	$a^{n-5}b^5$	»	$a^{-n-5}b^5$	
»	290	»	4	»	ist ein Rechnungsfehler, die Rechnung wird richtig seyn, wenn man statt 24 Lth. 3 Qtl. überall setzt 25 » $2\frac{1}{2}$ »			
»	318	»	13	»	q	»	q^n	
»	320	»	17	»	q	»	p	
»	321	»	15	»	$=:\frac{d}{n}$	»	$=\frac{c}{c}:\frac{d}{n}$	
»	352	»	3	»	$-\frac{1}{2}\log.\sqrt{2}$	»	$-\frac{1}{2}\log.\sqrt[3]{2}$	
»	—	»	12 u. 11 v. u.	»	$\log. M=m$ $\log. N=n$	»	$\text{Log.}\ M=m$ $\text{Log.}\ N=n$	
»	—	»	2	»	$=m'n'$	»	$=g^{m'n'}$	
»	353	»	10	»	$g^m=N$	»	$g^m=M$	
»	361	»	18 v. o.	»	$N=A.10^m$	»	$N=A.10^r$	
»	402	»	20	»	$180\ \ 60$	»	$180-60$	
»	410	»	10 v. u.	»	$3x+7y+6z$	»	$3x+7y-6z$	
»	412	»	5 v. o.	»	$\frac{2y-100}{4}$	»	$\frac{2y+100}{4}$	
»	418	»	19	»	$\frac{p^3}{4}$	»	$\frac{p^2}{4}$.	

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google